ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ

Котова К. А., Сорока Д. Ф., Тимошевич К. С.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Анисимов В.Я. – канд. физ.-мат. наук

В данной работе рассматривается практическое применение магических квадратов в различных областях, включая численное интегрирование и криптографию. Описывается модификация метода Монте-Карло с использованием магических квадратов для более точной оценки интегралов. Работа демонстрирует разнообразие возможностей применения магических квадратов.

Установление связи между теоретическими концепциями математики и их практическим применением является ключевым аспектом обучения студентов технических специальностей. Для этой цели вполне может подойти изучение практического применения магического квадрата.

Магическим квадратом порядка n называется квадратная таблица размером n × n клеток, заполненная натуральными числами от 1 до n^2, которые размещены таким образом, что суммы чисел любого столбца, строки и главных диагоналей имеют одно и то же значение. Это означает, что если поменять местами числа в соответствующих ячейках относительно оси симметрии, то квадрат останется магическим.

В прикладных задачах математики часто возникает потребность численной оценки интегралов. Для решения данной задачи существует множество методов интегрирования, одним из которых является метод Монте-Карло. Данный метод позволяет вычислять интегралы по различным областям. Реализация метода на практике заключается в следующем: генерируются N случайных чисел, вычисляются значения функции в этих точках, а значение интеграла оценивается как среднее арифметическое значений функции, умноженное на длину интервала. Значение определенного интеграла находится по следующей формуле:

$$\int_a^b f(x) = (b-a)\frac{\sum_{i=1}^{N} f(x_i)}{N} \qquad (1),$$

где N – число испытаний, x_i – случайные значения, вычисляемые по формуле:

$x_i = a + b * r_i \#(2),$

где r_i – случайное число, a, b – границы промежутка интегрирования.

Рассмотрим модификацию данного метода с использование магических квадратов. Разница между ними заключается в том, что модифицированный метод генерирует случайные значения на основе магического квадрата. Для того, чтобы значения находились в интервале интегрирования, их делят на наибольшее число в магическом квадрате: его размерность в квадрате. Далее метод соответствует классическому. Для демонстрации модифицируемого метода был реализован программный продукт, часть которого представлена на рисунке 1.

```
import numpy as np
1 usage
def monte_carlo_magic_square(func, a=0, b=1, n=1000):
    magic_square = np.array([[1, 15, 14, 4], [12, 6, 7, 9],
                             [8, 10, 11, 5], [13, 3, 2, 16]])
    magic_order = magic_square.shape[0]
    total_points = magic_order ** 2
    random_indices = np.random.choice(total_points, size=n, replace=True)
    x_values = magic_square.flatten()[random_indices]
    scaled_x_values = a + (b - a) * x_values / total_points
    y_values = func(scaled_x_values)
    integral_estimate = (b - a) * np.mean(y_values)
    return integral_estimate
estimated_integral = monte_carlo_magic_square(my_function, a=0, b=1, n=10000)
print("Estimated Integral:", estimated_integral)
```

Рисунок 1 – Часть программной реализации алгоритма

Для проверки корректности выполнения алгоритма и демонстрации зависимости точности результата от размерности квадрата была взята функция $f(x) = x^2$ и для нее было найдено значение определенного интеграла на промежутке $[0,1]$.

Результатом выполнения программы является значение 0.363176953125. Так как результат метода Монте-Карло напрямую зависит от количества сгенерированных точек, то в случае модифицированного метода результат зависит от порядка квадрата.

Для того, чтобы еще раз в этом убедиться, для вычисления был взят магический квадрат 10 порядка. Результатом выполнения программы в этом случае стало значение 0.33787308000000005.

В то же время стандартный метод Монте-Карло давал следующий результат - 0.33838943541325506, при условии, что точность и количество точек было эквивалентно модифицированному методу, что показывает нам более точное вычисление методом, основанным на магическом квадрате. Это связано с тем, что магический квадрат обеспечивает более равномерное распределение точек по интервалу, что может улучшить точность оценки интеграла.

Пример модификации метода Монте-Карло показывает, что магические квадраты могут использоваться не только в прикладных задачах, но и являться вспомогательным инструментом в фундаментальных задачах.

Магические квадраты нашли широкое применение в криптографии. Они предоставляют дополнительный уровень безопасности и могут быть использованы в различных криптографических алгоритмах.

Одним из способов использования магических квадратов в криптографии является замена символов. Каждый символ может быть заменен числом, которое соответствует его позиции в магическом квадрате. Затем, для зашифровки сообщения, каждый символ заменяется соответствующим числом из магического квадрата. Расшифровка происходит обратным образом: числа заменяются символами или буквами.

Магические квадраты также применяются в технологиях создания телевизоров, что позволяет обеспечить плавные цветовые переходы, полностью устраняя видимые границы на больших однотонных полях изображения. Алгоритм его построения основан на двух этапах. К первому можно отнести размерность квадратов, на которые будет поделено изображение. Второй шаг включает в себя периодическое зажигание одного и того же числа пикселей по вертикали, горизонтали и диагонали. В качестве примера предпочтительно взять магические квадраты пятого порядка. Варианты включения представлены на рисунке 2.

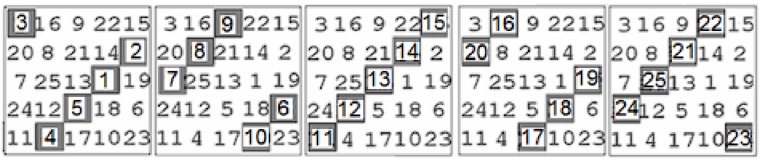

Рисунок 2 - Алгоритм формирования порядка включений пикселей (для квадрата 5-го порядка)

Используя первый вариант включения составим магический квадрат 25 порядка. В результате изображение будет выглядеть следующим образом (рисунок 3):

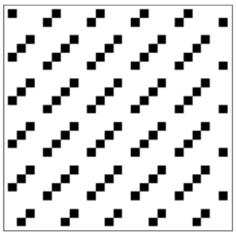

Рисунок 3 - Порядок включения пикселей (черный цвет – пиксель включен, белый – выключен)

Магические квадраты – это уникальные математические структуры, которые имеют множество интересных свойств, применений и используются в различных областях. Изучение магических квадратов помогает лучше понять и применять математические концепции в различных областях жизни, алгоритмы шифрования «методом магического квадрата» могут стать надежной основой для программ, обеспечивающих безопасный доступ к информации.

Список использованных источников:

1. Бубич М. А., Прус Е. А, Силецкий А. А. Применение магических квадратов для построения однотонных изображений: междунар. науч. конф. Информатизация образования, Минск : тез. докл. / Бел. нац. техн. университет; – Минск, 2014. – С. 80-83.

2. Гундина М. А. Прикладная математика. Магические квадраты : учеб. пособие / М. А. Гундина, Н. А. Кондратьева. – М. : Изд-во БНТУ : Наука, 2019. – 17 с.

3. Макарова, Н. В. Волшебный мир магический квадратов. Саратов, 2009. – 180 с

4. Постников, М. М. Магические квадраты / М.М. Постников. - Москва, 2010. - 88 с.