УДК 519.6

МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ СПЕКТРА КАРМАНА

Сытько М.В.[1], студент гр.253504, Клебеко Е.Ю.[2], студент гр.253504

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники[1]
г. Минск, Республика Беларусь

Анисимов В. Я.– канд. физ.-мат. наук

Ключевые слова: аппроксимация функции, спектр Кармана, градиент функции, среднеквадратичное отклонение.

Аннотация: В данной статье рассматривается метод аппроксимации спектра Кармана на примере двух функций, заключенных в определенном диапазоне. Границами диапазона являются внешнее и внутреннее отклонения функции, моделирующие ее значение.

Аппроксимация функции – это метод приближенного представления сложной или неизвестной функции с использованием более простых или известных функций. Основная задача аппроксимации – построение приближённой функции, наиболее близко проходящей около данной непрерывной функции.

Основные идеи и методы аппроксимации функций включают:

1. Выбор базисных функций: для аппроксимации функции сначала необходимо выбрать набор базисных функций, которые будут использоваться для приближения. Эти функции могут быть полиномиальными функциями (например, многочленами), тригонометрическими функциями (синусами, косинусами), экспоненциальными функциями или другими типами функций, которые легко вычислять.
2. Нахождение оптимальных параметров: затем необходимо подобрать параметры (коэффициенты) этих базисных функций таким образом, чтобы приближенная функция наилучшим образом соответствовала исходной функции в определенном смысле (например, с наименьшей среднеквадратичной ошибкой).
3. Методы аппроксимации:
   - *Метод наименьших квадратов*: Этот метод используется для нахождения оптимальных параметров линейной аппроксимации путем минимизации суммы квадратов разностей между значениями исходной функции и значениями приближенной функции.
   - *Интерполяция*: При этом методе используются базисные функции, проходящие через известные точки исходной функции (узлы интерполяции), чтобы получить приближенную функцию, проходящую через эти точки.
   - *Наилучшее приближение*: Ищется функция из заданного класса функций, наилучшим образом приближающая исходную функцию в смысле нормы (например, нормы в пространстве L^2).

4. Оценка качества аппроксимации: после того как функция была приближена, необходимо оценить точность и качество этой аппроксимации. Это может включать оценку ошибки аппроксимации в определенных точках или оценку общей сходимости аппроксимации.

Определим задачу. В качестве входных данных имеется спектр,

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{{l_0}^2}} \cdot A_0}{(x^2 + \frac{1}{L_0^2})^{\frac{11}{6}}}, \tag{1}$$

необходимо получить равный ему спектр, заданный функцией

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{{l_1}^2}} \cdot A_1}{(x^2 + \frac{1}{L_1^2})^2}. \tag{2}$$

Поиск необходимых коэффициентов будем производить по средствам аппроксимации функции. Для этого возьмём функцию (2) за базисную с неизвестными коэффициентами, а функцию (1) – за исходную.

Подберём коэффициенты для исходной функции. Считая $l_0 \approx 1$ мм, а $L_0 \approx 1$ м, оптимальным будет взять $l_0 = 0{,}01$, $L_0 = 100$, амплитуду A_0 возьмём равную 1.

Для оценки точности значений возьмём среднеквадратичную ошибку, которая обычно используется для задачи аппроксимации, она равна сумма квадратов разностей между исходной функцией и аппроксимирующей функцией

$$\sigma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \quad (f(x_i) - g(x_i))^2,$$

где n – количество точек, в которых производится оценка, $f(x_i)$ – исходная функция, $g(x_i)$ – аппроксимирующая функция, x_i – значения аргумента x из набора данных.

Решить эту задачу можно используя различные методы оптимизации, в нашем случае будем использовать метод градиентного спуска. Градиентный спуск – численный метод нахождения локального минимума или макмимума функции с помощью движения вдоль градиента, который является вектором, показывающий направление наибольшего возрастания функции. Основная идея метода заключается в том, чтобы итерированно двигаться в навправлении отрицательного градиента функции, чтобы уменьшить ошибку и найти оптимальные параметры, которые дают наилучшие результаты прогнозирования.

Сформируем задачу оптимизации в виде $min \sum_{i=1}^{n} \quad (y_i - f(x_i; L, l, A))^2$и реализуем алгоритм градиентного спуска, используя возможности языка Python (рисунок 1), а именно библиотеку Scipy. За набор данных x_i возьмём 10000 значений из интересующего нас промежутка $\frac{1}{L}..\frac{1}{l}$.

```
def f(x):
    return (np.exp(-10000 * x**2)*1) / (x**2 + 1/10000)**(11/6)

def g(x, k, E, A):
    return (np.exp(-x**2 / k**2)*A) / (x**2 + 1/E**2)**2

def mse(params, x_data, y_data):
    k, E, A = params
    y_pred = g(x_data, k, E, A)
    mse_value = np.mean((y_data - y_pred)**2)
    print(f"Минимальная среднеквадратичная ошибка: {mse_value:.3f}")
    return mse_value

np.random.seed(0)
x_data = np.linspace(0.01, 100, 10000)
y_data = f(x_data)

initial_guess = [1.0, 0.1, 1.0]

result = minimize(mse, initial_guess, args=(x_data, y_data),method='L-BFGS-B')
```

Рисунок 1 - Исходный код алгоритма программы

На каждой итерации происходит вычисление среднеквадратичной ошибки, которая с каждым шагом уменьшается, пока не достигнет своего минимально возможного значения, после чего начинает возрастать. Этот предел и является оптимальным значением среднеквадратичной ошибки. Результат представлен на рисунке 2

```
Минимальная среднеквадратичная ошибка: 0.753
```

Рисунок 2 - Результат вычисления среднеквадратичной ошибки

На основе минимальной среднеквадратичной ошибки программа вычисляет оптимальное значение, заданных нами коэффициентов и выводит результат на экран (рисунок 3).

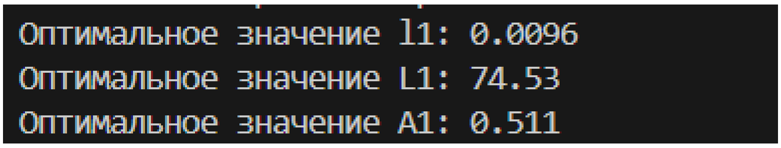

Рисунок 3 - Результат вычислений оптимальных значений коэффициентов

После получения необходимых нами значений сравним полученные результаты коэффициентов функций в таблице 1 и построим графики заданной и исходной функций в программной системе Maple, специально созданной для решения математических задач. Изобразим для наглядности графики в одной системе координат. На рисунке 4 видно, что графики функций практически полностью накладываются друг на друга. Таким образом, мы можем сделать вывод, что добились поставленной задачи.

Таблица 1 – Сравнение полученных коэффициентов.

	$f()$	$g()$
A_0, A_1	1,000	0,511
L_0, L_1	100,000	74,530
l_0, l_1	0,010	0,0096
σ	0,753	

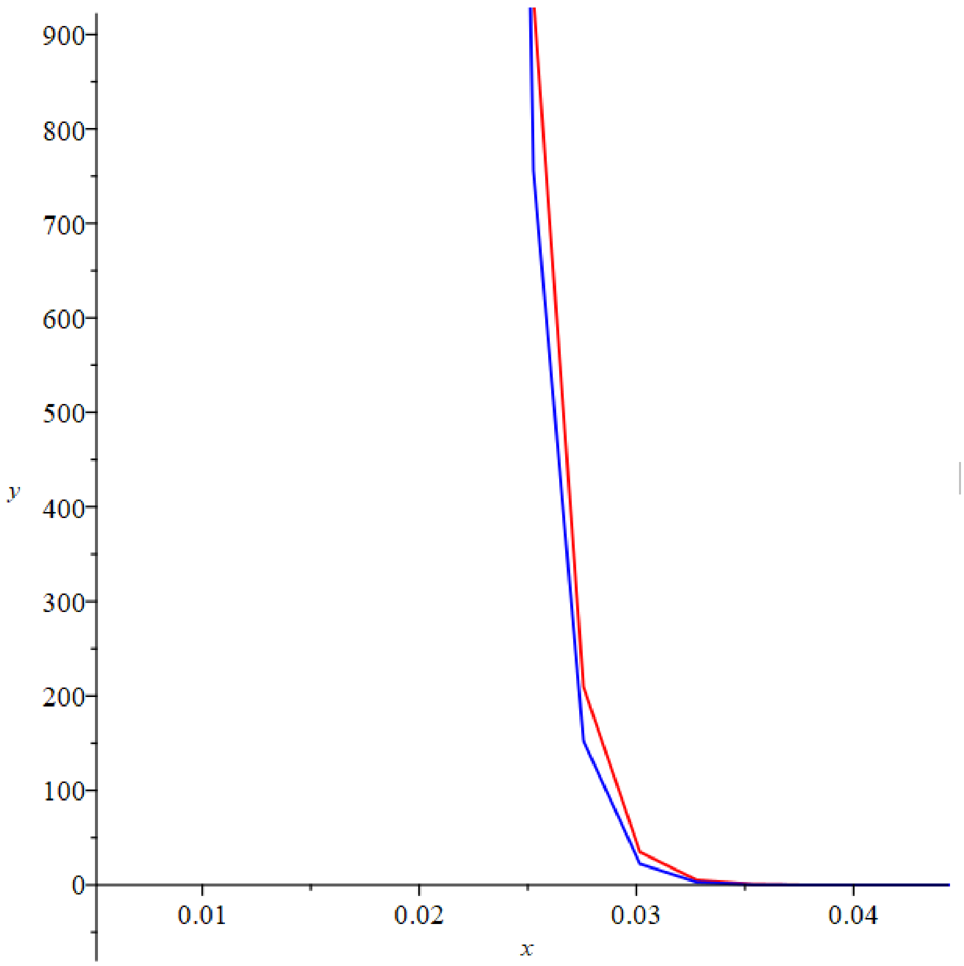

Рисунок 4 - график наложения функций, синий - исходная функция, красный - базисная функция

Список использованных источников:

1. А.М. Данилов. Интерполяция, аппроксимация, оптимизация: анализ и синтез сложных систем : учеб. пособие / А.М. Данилов, И.А. Гарькина - Пенза: ПГУАС, 2014. – 168 с.

2. Nocedal, Jeorge; Wright, Stephen J. Numerical Optimization — 2nd edition. — USA: Springer, 2006, p. 136-144

3. Richard H. Byrd, Peihuang Lu, Jorge Nocedal. A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization – 1996, p. 2-5.

UDC 519.6

METHODS FOR APPROXIMATING THE SPECTRUM KARMAN

Sytsko M.V.[1]*, Klebeko E.Y.*[1]

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics[1]*, Minsk, Republic of Belarus*

Anisimov Vladimir Yakovlevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Keywords. *function approximation, Karman spectrum, function gradient, mean square deviation*

Annotation*: This article considers the method of approximation of the spectrum of Karman on the example of two functions, enclosed in a certain range. The boundaries of the range are the external and internal deviations of the function that simulate its value*.