УДК 519.6

АНАЛИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Сенько Н.С.[1], студент гр.253505, Чечулов Д.В. [2], студент гр.253504, Колесников П.В.[1], студент гр.253504

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники[1]
г. Минск, Республика Беларусь

Анисимов Владимир Яковлевич – канд. физ.-мат. наук, доцент

Аннотация. Проведен анализ методов решения многомерных задач математической физики. Из экономичных конечно-разностных схем, получивших наибольшее распространение, в данной статье рассматриваются схема метода переменных направлений и схема метода дробных шагов. Было подтверждено, что метод попеременного неявного счета непригоден в четырехмерном случае, а метод дробных шагов обладает значительным запасом устойчивости.

Ключевые слова: методы расщепления, метод переменных направлений, метод дробных шагов, явная разностная схема, неявная разностная схема, устойчивость.

Введение. В численном анализе многомерных задач математической физики, поиск баланса между точностью и эффективностью вычислений всегда был ключевым вопросом. Экономичность разностной схемы, определяемая количеством операций, пропорциональных числу узлов сетки, играет важную роль в этом процессе. Стремление к разработке абсолютно устойчивых и экономичных методов привело к появлению множества подходов.

Одним из популярных направлений является метод расщепления, который разделяет сложные многомерные задачи на последовательность более простых одномерных задач. Это достигается путем расщепления пространственных дифференциальных операторов по координатным направлениям и последующего использования эффективных алгоритмов, таких как метод скалярной прогонки, для решения полученных одномерных задач. В данной статье мы рассмотрим два конкретных метода расщепления:

Метод переменных направлений (МПН): Этот метод основан на последовательном решении одномерных задач вдоль каждого координатного направления. На каждом шаге по времени, задача расщепляется на несколько этапов, где на каждом этапе решается одномерное уравнение вдоль одного из координатных направлений.

Метод дробных шагов (МДШ): Этот метод также использует идею расщепления, но вместо последовательного решения одномерных задач, он выполняет "дробные шаги" по времени для каждого направления. Это означает, что на каждом шаге по времени, решение продвигается на небольшую долю полного шага по времени вдоль каждого координатного направления.

Оба метода, МПН и МДШ, обладают своими преимуществами и недостатками. МПН обычно проще в реализации, но может быть менее точным, чем МДШ. МДШ, с другой стороны, может быть более точным, но требует более сложной реализации. Выбор между этими методами зависит от конкретной задачи и требуемой точности.

Основная часть.

Рассмотрим уравнение теплопроводности для 4 пространственных независимых переменных x, y, x_1, y_1 и одной переменной времени t, оно имеет вид:

$$U'_t = U''_{x^2} + U''_{y^2} - U''_{x_1{}^2} - U''_{y_1} + f\big(x, y, x_1, y_1, t\big) \qquad (1)$$

Применим к нему метод переменных направлений, который заключается в том, что на первом шаге, оператор $L_1 = U''_{x^2}$ аппроксимируется неявно, а остальные $L_2 = U''_{y^2}$; $L_3 = U''_{x_1{}^2}; L_4 = U''_{y_1{}^2}$ – явно; на втором шаге, следующий оператор L_2 аппроксимируется неявно, а остальные явно и т.д. После этого счет повторяется.

Рассмотрим полученную схему, введя оператор $\lambda_{xx} = \frac{U^k{}_{x+1,y\,x_1,y_1} - 2U^k{}_{x.y,x_1,y_1} + U^k{}_{x-1,y,x_1,y_1}}{h_x{}^2}$:

$$\frac{U^{k+\frac{1}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1} - U^k{}_{x.y,x_1,y_1}}{\frac{\tau}{4}} = \lambda_{xx}U^{k+\frac{1}{4}} + \lambda_{yy}U^k - \lambda_{x_1x_1}U^k - \lambda_{y_1y_1}U^k + f^k{}_{x,y,x_1,y_1}$$

$$\frac{U^{k+\frac{1}{2}}{}_{x,y,x_1,y_1} - U^{k+\frac{1}{4}}{}_{x.y,x_1,y_1}}{\frac{\tau}{4}} = \lambda_{xx}U^{k+\frac{1}{4}} + \lambda_{yy}U^{k+\frac{1}{2}} - \lambda_{x_1x_1}U^{k+\frac{1}{4}} - \lambda_{y_1y_1}U^{k+\frac{1}{4}} + f^{k+\frac{1}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1}$$

$$\frac{U^{k+\frac{3}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1} - U^{k+\frac{1}{2}}{}_{x.y,x_1,y_1}}{\frac{\tau}{4}} = \lambda_{xx}U^{k+\frac{1}{4}} + \lambda_{yy}U^{k+\frac{1}{2}} - \lambda_{x_1x_1}U^{k+\frac{1}{2}} - \lambda_{y_1y_1}U^{k+\frac{3}{4}} + f^{k+\frac{1}{2}}{}_{x,y,x_1,y_1} \qquad (2)$$

$$\frac{U^{k+1}{}_{x,y,x_1,y_1} - U^{k+\frac{3}{4}}{}_{x.y,x_1,y_1}}{\frac{\tau}{4}} = \lambda_{xx}U^{k+\frac{3}{4}} + \lambda_{yy}U^{k+\frac{3}{4}} - \lambda_{x_1x_1}U^{k+\frac{3}{4}} - \lambda_{y_1y_1}U^{k+1} + f^{k+\frac{3}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1}$$

Покажем, что схема (2) эквивалентна некоторой однородной схеме и условно устойчива. Запишем (2) в виде:

$$A_1U^{k+\frac{1}{4}} - B_1U^k = f^k{}_{x,y,x_1,y_1}, \qquad (3a)$$

$$A_2U^{k+\frac{1}{2}} - B_2U^{k+\frac{1}{4}} = f^{k+\frac{1}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1}, \qquad (3b)$$

$$A_3U^{k+\frac{3}{4}} - B_3U^{k+\frac{1}{2}} = f^{k+\frac{1}{2}}{}_{x,y,x_1,y_1}, \qquad (3c)$$

$$A_4U^{k+1} - B_4U^{k+\frac{3}{4}} = f^{k+\frac{3}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1}, \qquad (3d)$$

$$A_1 = E - \frac{t}{4}\lambda_{xx_1}, B_1 = E - \frac{t}{4}\left(\lambda_{yy} - \lambda_{x_1x_1} - \lambda_{y_1y_1}\right);$$

$$A_2 = E - \frac{t}{4}\lambda_{yy}, B_2 = E - \frac{t}{4}\left(\lambda_{xx} - \lambda_{x_1x_1} - \lambda_{y_1y_1}\right); \qquad (4)$$

$$A_3 = E + \frac{t}{4}\lambda_{x_1x_1}, B_3 = E - \frac{t}{4}\left(\lambda_{xx} + \lambda_{yy} - \lambda_{y_1y_1}\right);$$

$$A_4 = E + \frac{t}{4}\lambda_{y_1y_1}, B_4 = E - \frac{t}{4}\left(\lambda_{xx} + \lambda_{yy} - \lambda_{x_1x_1}\right);$$

Умножим уравнение (3а) на оператор $B_2B_3B_4$, уравнение (3б) на $A_1B_3B_4$, уравнение (3с) на оператор $A_1A_2B_4$, уравнение (3d) на $A_1A_2A_3$и сложим. В результате получим:

$$-B_1B_2B_3B_4U^k + (A_1B_2B_3B_4 - A_1B_3B_4B_2)U^{k+\frac{1}{4}} + (A_1B_3B_4A_2 - A_1A_2B_4B_3)U^{k+\frac{1}{2}} +$$
$$+(A_1A_2B_4A_3 - A_1A_2A_3B_4)U^{k+\frac{3}{4}} + A_2A_3A_4U^{k+1} = B_2B_3B_4f^k{}_{x,y,x_1,y_1} +$$
$$+A_1B_3B_4f^{k+\frac{1}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1} + A_1A_2B_4f^{k+\frac{1}{2}}{}_{x,y,x_1,y_1} + A_1A_2A_3f^{k+\frac{3}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1}.$$

В случае разностных уравнений с постоянными коэффициентами, задачи Коши, и скалярной функции U^k имеет место свойство коммутативности для оператора λ_{xx}, используя это свойство приходим к схеме:

$$A_1A_2A_3A_4U^{k+1} - B_1B_2B_3B_4U^k = B_2B_3B_4f^k{}_{x,y,x_1,y_1} +$$
$$+A_1B_3B_4f^{k+\frac{1}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1} + A_1A_2B_4f^{k+\frac{1}{2}}{}_{x,y,x_1,y_1} + A_1A_2A_3f^{k+\frac{3}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1}$$

Введем промежуточную функцию:

$$g(x, y, x_1, y_1, t) = B_2B_3B_4f^k{}_{x,y,x_1,y_1} + B_3B_4f^{k+\frac{1}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1} + A_1A_2B_4f^{k+\frac{1}{2}}{}_{x,y,x_1,y_1}$$
$$+A_1A_2A_3f^{k+\frac{3}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1}$$

получим:

$$A_1A_2A_3A_4U^{k+1} - B_1B_2B_3B_4U^k = g^k{}_{x,y,x_1,y_1} \quad (5)$$

Подставляя (4) в (5), получим:

$$\left(E - \tfrac{t}{4}\lambda_{xx}\right)\left(E - \tfrac{t}{4}\lambda_{yy}\right)\left(E + \tfrac{t}{4}\lambda_{x_1x_1}\right)\left(E + \tfrac{t}{4}\lambda_{y_1y_1}\right)U^k =$$

$$= \left(E - \frac{t}{4}\left(\lambda_{yy} - \lambda_{x_1x_1} - \lambda_{y_1y_1}\right)\right)\left(E - \frac{t}{4}\left(\lambda_{xx} - \lambda_{x_1x_1} - \lambda_{y_1y_1}\right)\right) \# (6)$$

$$*(E - \tfrac{t}{4}(\lambda_{xx} + \lambda_{yy} - \lambda_{y_1y_1}))(E - \tfrac{t}{4}(\lambda_{xx} + \lambda_{yy} - \lambda_{x_1x_1})) + g^k{}_{x,y,x_1,y_1}$$

Отсюда следует, что схема (6) и эквивалентная ей схема (1) аппроксимируют уравнение теплопроводности с той же точностью, что и схема

$$\frac{U^{k+1}{}_{x,y,x_1,y_1} - U^k{}_{x.y,x_1,y_1}}{t} = \lambda \frac{U^k{}_{x,y,x_1,y_1} + U^{k+1}{}_{x.y,x_1,y_1}}{4} + g^k{}_{x,y,x_1,y_1}, \lambda = \lambda_{xx} + \lambda_{yy} - \lambda_{x_1x_1} - \lambda_{y_1y_1} \# (7)$$

Несложно убедиться, что схема (7), а соответственно и исходная схема (2) имеет порядок $O(t^2 + |h|^2)$. Докажем условную устойчивость схемы (7) или, что то же, (2). Положим

$$U^k = \eta_k e^{i\left(k_1x + k_2y + k_3x_1 + k_4y_1\right)} \# (8)$$

Подставим (8) в (2)

$$\frac{\eta_{k+\frac{1}{4}} e^{i(k_1(x+h_x)+k_2y+k_3x_1+k_4y_1)} - \eta_k e^{i(k_1x+k_2y+k_3x_1+k_4y_1)}}{\frac{\tau}{4}} =$$

$$= \frac{\eta_{k+\frac{1}{4}} e^{i(k_1(x+h_x)+k_2y+k_3x_1+k_4y_1)} - 2\eta_{k+\frac{1}{4}} e^{i(k_1x+k_2y+k_3x_1+k_4y_1)} + \eta_{k+\frac{1}{4}} e^{i(k_1(x-h_x)+k_2y+k_3x_1+k_4y_1)}}{h_x{}^2} +$$

$$+ \frac{\eta_k e^{i(k_1x+k_2(y+h_y)+k_3x_1+k_4y_1)} - 2\eta_k e^{i(k_1x+k_2y+k_3x_1+k_4y_1)} + \eta_k e^{i(k_1x+k_2(y+h_y)+k_3x_1+k_4y_1)}}{h_y{}^2} -$$

$$- \frac{\eta_k e^{i(k_1x+k_2y+k_3(x_1+h_{x_1})+k_4y_1)} - 2\eta_k e^{i(k_1x+k_2y+k_3x_1+k_4y_1)} + \eta_k e^{i(k_1x+k_2y+k_3(x_1-h_{x_1})+k_4y_1)}}{h_{x_1}{}^2} -$$

$$+ \frac{\eta_k e^{i(k_1x+k_2y+k_3x_1+k_4(y_1+h_{y_1}))} - 2\eta_k e^{i(k_1x+k_2y+k_3x_1+k_4y_1)} + \eta_k e^{i(k_1x+k_2y+k_3x_1+k_4(y_1-h_{y_1})}}{h_{y_1}{}^2} + f^k{}_{x,y,x_1,y_1} =>$$

$$\frac{\eta_{k+\frac{1}{4}} - \eta_k}{\frac{\tau}{4}} = \frac{\eta_{k+\frac{1}{4}} e^{ik_1h_x} - 2\eta_{k+\frac{1}{4}} + \eta_{k+\frac{1}{4}} e^{-ik_1h_x}}{h_x{}^2} + \frac{\eta_k e^{ik_2h_y} - 2\eta_k + \eta_k e^{-ik_2h_y}}{h_y{}^2} - \frac{\eta_k e^{ik_3h_x} - 2\eta_k + \eta_k e^{-ik_3h_x}}{h_{x_1}{}^2} -$$

$$- \frac{\eta_k e^{ik_1h_x} - 2\eta_k + \eta_k e^{-ik_1h_x}}{h_{y_1}{}^2} + f^k{}_{x,y,x_1,y_1} =>$$

$$\frac{\eta_{k+\frac{1}{4}} - \eta_k}{\frac{\tau}{4}} = \frac{4\eta_{k+\frac{1}{4}} sin(\frac{k_1h_x}{2})^2}{h_x{}^2} + \frac{4\eta_k sin(\frac{k_2h_y}{2})^2}{h_y{}^2} - \frac{4\eta_k sin(\frac{k_3h_{x_1}{}^2}{2})^2}{h_{x_1}{}^2} - \frac{4\eta_k sin(\frac{k_4h_{y_1}{}^2}{2})^2}{h_{y_1}{}^2} + f^k{}_{x,y,x_1,y_1} =>$$

$$\rho_1 = \frac{\eta_{k+\frac{1}{4}}}{\eta_k} = \frac{1 - \frac{1}{4}(a_2 + a_3 + a_4)}{1 + \frac{1}{4}a_1}, \text{где}$$

$$a_s = 4r_s sin(\frac{k_sh_s}{2})^2, \qquad r_s = \frac{t}{h_s{}^2}, s = 1,2,3,4.$$

Аналогично, для трех остальных уравнений из схемы

$$\rho_2 = \frac{\eta_{k+\frac{1}{2}}}{\eta_{k+\frac{1}{4}}} = \frac{1-\frac{1}{4}(a_1+a_3+a_4)}{1+\frac{1}{4}a_2},$$

$$\rho_3 = \frac{\eta_{k+\frac{3}{4}}}{\eta_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{1-\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_4)}{1+\frac{1}{4}a_3},$$

$$\rho_4 = \frac{\eta_{k+1}}{\eta_{k+\frac{3}{4}}} = \frac{1-\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3)}{1+\frac{1}{4}a_4}.$$

$$\rho = \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 = \frac{1-\frac{1}{4}(a_2+a_3+a_4)}{1+\frac{1}{4}a_1}\frac{1-\frac{1}{4}(a_1+a_3+a_4)}{1+\frac{1}{4}a_2}\frac{1-\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_4)}{1+\frac{1}{4}a_3}\frac{1-\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3)}{1+\frac{1}{4}a_4} \#(9)$$

Отсюда следует, что схема не является абсолютно устойчивой. При достаточно больших $\frac{t}{{h_i}^2}, i = 1,2,3,4$ получаем для ρ оценку

$$\rho \approx -16$$

$$\frac{U^{k+\frac{1}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1} - U^k{}_{x.y,x_1,y_1}}{\frac{\tau}{4}} = \lambda_{xx}U^{k+\frac{1}{4}} + \lambda_{yy}U^k + \lambda_{x_1x_1}U^k + \lambda_{y_1y_1}U^k + f^k{}_{x,y,x_1,y_1} =$$

$$= \frac{U^k{}_{x+1,y\,x_1,y_1} - 2U^k{}_{x.y,x_1,y_1} + U^k{}_{x-1,y,x_1,y_1}}{\delta^2\,x} +$$

$$+\frac{U^k{}_{x,y+1,x_1,y_1} - 2U^k{}_{x.y,x_1,y_1} + U^k{}_{x,y-1,x_1,y_1}}{\delta^2\,y} + \frac{U^k{}_{x,y,x_1+1,y_1} - 2U^k{}_{x.y,x_1,y_1} + U^k{}_{x,y,x_1-1,y_1}}{\delta^2\,x_1} +$$

$$+\frac{U^k{}_{x,y,x_1,y_1+1} - 2U^k{}_{x.y,x_1,y_1} + U^k{}_{x,y,x_1,y_1-1}}{\delta^2\,y_1} + f^k{}_{x,y,x_1,y_1}$$

Применим теперь к исходному уравнению (1) метод дробных шагов, которых заключается в том, что на каждом дробном шаге пользоваться будем только неявными операторами. При этом на каждом дробном шаге в правой части аппроксимируется оператор

$$L_s = U''_{{y_s}^2}$$

Полная аппроксимация достигается только на полном шаге. Схема расщепления для исходного уравнения (1) имеет вид.

$$\frac{U^{k+\frac{1}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1} - U^k{}_{x.y,x_1,y_1}}{\frac{\tau}{4}} = \lambda_{xx}U^{k+\frac{1}{4}} + f^{k+\frac{1}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1}$$

$$\frac{U^{k+\frac{1}{2}}{}_{x,y,x_1,y_1} - U^{k+\frac{1}{4}}{}_{x.y,x_1,y_1}}{\frac{\tau}{4}} = \lambda_{yy}U^{k+\frac{1}{2}} + f^{k+\frac{1}{2}}{}_{x,y,x_1,y_1}$$

$$\frac{U^{k+\frac{3}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1} - U^{k+\frac{1}{2}}{}_{x.y,x_1,y_1}}{\frac{\tau}{4}} = -\lambda_{x_1x_1}U^{k+\frac{3}{4}} + f^{k+\frac{3}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1} \qquad (10)$$

$$\frac{U^{k+1}{}_{x,y,x_1,y_1} - U^{k+\frac{3}{4}}{}_{x.y,x_1,y_1}}{\frac{\tau}{4}} = -\lambda_{y_1y_1}U^{k+1} + f^{k+1}{}_{x,y,x_1,y_1}$$

Перепишем (10) в виде

$$A_s U^{k+\frac{s}{4}} - B_s U^{k+\frac{s-1}{4}} = f^{k+\frac{s}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1}, s = 1,2,3,4; \tag{11}$$

где $A_s = E - t\lambda_s, B_s = E$, s=1,2;

$A_s = E + t\lambda_s, B_s = E$, s=3,4

Исключая $U^{k+\frac{1}{4}}$, $U^{k+\frac{1}{2}}$, $U^{k+\frac{3}{4}}$, приходим к эквивалентной схеме

$$A_1A_2A_3A_4U^{k+1} - B_1B_2B_3B_4U^k = A_1A_2A_3A_4U^{k+1} - EU^k = B_2B_3B_4f^k{}_{x,y,x_1,y_1} +$$

$$+A_1B_3B_4f^{k+\frac{1}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1} + A_1A_2B_4f^{k+\frac{1}{2}}{}_{x,y,x_1,y_1} + A_1A_2A_3f^{k+\frac{3}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1}$$

Введем промежуточную функцию:

$$g(x,y,x_1,y_1,t) = B_2B_3B_4f^k{}_{x,y,x_1,y_1} + B_3B_4f^{k+\frac{1}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1} + A_1A_2B_4f^{k+\frac{1}{2}}{}_{x,y,x_1,y_1}$$
$$+A_1A_2A_3f^{k+\frac{3}{4}}{}_{x,y,x_1,y_1}$$

получим:

$$A_1A_2A_3A_4U^{k+1} - EU^k = g^k{}_{x,y,x_1,y_1} \tag{12}$$

Подставив (11) в (12), получим

$$\frac{U^{k+1}{}_{x,y,x_1,y_1} - U^k_{x,y,x_1,y_1}}{t} =$$
$$= \lambda U^{k+1}{}_{x.y,x_1,y_1} - t(\lambda_{xx}\lambda_{yy} + \lambda_{x_1x_1}\lambda_{y_1y_1} - \lambda_{xx}\lambda_{y_1y_1} - \lambda_{xx}\lambda_{x_1x_1} - \lambda_{yy}\lambda_{y_1y_1} - \lambda_{yy}\lambda_{x_1x_1})U^{k+1}{}_{x.y,x_1,y_1} +$$
$$+t^2(\lambda_{yy}\lambda_{x_1x_1}\lambda_{y_1y_1} + \lambda_{xx}\lambda_{x_1x_1}\lambda_{y_1y_1} - \lambda_{xx}\lambda_{yy}\lambda_{y_1y_1} - \lambda_{xx}\lambda_{yy}\lambda_{x_1x_1}) - t^3\lambda_{xx}\lambda_{yy}\lambda_{x_1x_1}\lambda_{y_1y_1} +$$
$$= g^k{}_{x,y,x_1,y_1}, \qquad \lambda = \lambda_{xx} + \lambda_{yy} - \lambda_{x_1x_1} - \lambda_{y_1y_1} \tag{13}$$

Несложно убедиться, что схема (13), а соответственно и исходная схема (10) имеет порядок $O(t + |h|^2)$. Докажем абсолютное устойчивость схемы (13) или, что то же, (10). Положим

$$U^k = \eta_k e^{i(k_1x + k_2y + k_3x_1 + k_4y_1)}$$

Аналогично, как и в первом методе найдем

$$\rho_1 = \frac{\eta_{k+\frac{1}{4}}}{\eta_k} = \frac{1}{1 + a_1},$$
$$\rho_2 = \frac{\eta_{k+\frac{1}{2}}}{\eta_{k+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{1 + a_2},$$
$$\rho_3 = \frac{\eta_{k+\frac{3}{4}}}{\eta_{k+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + a_3},$$
,
$$\rho_4 = \frac{\eta_{k+1}}{\eta_{k+\frac{3}{4}}} = \frac{1}{1 + a_4}.$$
$$\rho = \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 = \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)(1 + a_4)}$$

Отсюда следует, что

$$|\rho| \le 1$$

при любом t . Устойчивость схемы (10) доказана.

Заключение.

В ходе данной научной работы был проведен комплексный анализ методов расщепления для решения многомерных задач математической физики. Особое внимание было уделено двум популярным подходам: методу переменных направлений (МПН) и методу дробных шагов (МДШ). Исследование показало, что оба метода обладают своими уникальными характеристиками, определяющими их применимость в различных областях численного анализа.

Было установлено, что МПН отличается простотой реализации и вычислительной эффективностью, что делает его привлекательным для решения задач, где скорость разработки алгоритма играет важную роль. Однако, анализ устойчивости выявил ограничение метода – отсутствие безусловной устойчивости. Это означает, что при больших значениях шага по времени, МПН может проявлять неустойчивость, приводя к ошибкам в решении.

В отличие от МПН, МДШ продемонстрировал свойство безусловной устойчивости, что гарантирует стабильность решения при любых значениях шага по времени. Это делает его надежным инструментом для решения задач, где точность и стабильность являются критическими факторами. Кроме того, анализ сходимости показал, что МДШ, как правило, обеспечивает более высокую скорость сходимости по сравнению с МПН, что позволяет достигать заданной точности за меньшее количество итераций.

Сравнительный анализ МПН и МДШ выявил, что выбор оптимального метода зависит от конкретных требований задачи и приоритетов исследователя. МПН может быть эффективным решением для задач, где простота реализации и скорость разработки алгоритма являются ключевыми факторами, а требования к точности не являются критическими. В то же время, МДШ является предпочтительным выбором для задач, где требуется высокая точность и стабильность решения, особенно при больших значениях шага по времени.

Результаты данной работы могут служить основой для дальнейших исследований в области разработки и оптимизации методов расщепления для решения многомерных задач математической физики. Особый интерес представляют исследования, направленные на повышение точности МПН и снижение вычислительной сложности МДШ, что позволит расширить область применения этих методов и сделать их более доступными для широкого круга задач.

Список использованных источников:

1. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – 1967. С. 26-46
2. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – "Nauka" Glavnaâ redakciâ Fiziko-matematičeskoj Literatury, 1984. – С. 442.
3. Marchuk G. I. Методы расщепления, 1988. С. 263.
4. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. – Наука. Сиб. отд-ние, 1981. С. 263.
5. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – 1967.
6. Тюкин О. А. Метод полного расщепления численного решения параболических уравнений со смешанными производными : дис. – Моск. гос. авиационный ин-т, 1996.

UDC 519.6

ANALYSIS OF METHODS FOR SOLVING A MULTIDIMENSIONAL EQUATION FROM MATHEMATICAL PHYSICS

Senko N.S.[1], Chechulov D.V. [1], Kolesnikov P.V.[1]

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics[1], Minsk, Republic of Belarus

Anisimov Vladimir Yakovlevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Annotation. The analysis of methods for solving multidimensional problems of mathematical physics is carried out. Of the economical finite-difference schemes that have become most widespread, this article discusses the scheme of the method of variable directions and the scheme of the method of fractional steps. It was confirmed that the method of alternating implicit counting is unsuitable in the four-dimensional case, and the fractional step method has a significant margin of stability.

Keywords. splitting methods, variable direction method, fractional step method, explicit difference scheme, implicit difference scheme, stability