О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, АССОЦИИРОВАННОЙ С МОДЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЗИКИ

В.В. Цегельник[1]

[1]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, П.Бровки, 6, 220013 Минск, Беларусь,
tsegvv@bsuir.by

Система дифференциальных уравнений [1]

$$2s_n = \frac{1}{1-s_{n-1}^2}\left(\frac{n}{t}s_{n-1} - \frac{ds_{n-1}}{dt}\right), \quad 2s_{n-1} = \frac{1}{1-s_n^2}\left(\frac{n+1}{t}s_n + \frac{ds_n}{dt}\right), \tag{1}$$

где t – непрерывная независимая переменная, n – произвольный параметр, ассоциируется (в случае натурального n) с уравнением [2]

$$(n+1)s_n = t(s_{n+1}+s_{n-1})(1-s_n^2), \tag{2}$$

представляющим второе дискретное уравнение Пенлеве, и дискретным модифицированным уравнением Кортевега-де Фриза [3]

$$\frac{ds_n}{dt} = -(s_{n+1}-s_{n-1})(1-s_n^2). \tag{3}$$

Уравнения системы (1) получаются в результате вычитания из (2) уравнения (3) и замены в полученном выражении n на $n-1$, а также в результате сложения уравнений (2) и (3).

Система (1) в обозначениях $t = z$, $s_{n-1} = v = v(z)$, $s_n = u = u(z)$ принимает вид

$$v = \frac{1}{2(1-u^2)}\left(\frac{n+1}{z}u + u'\right), \quad u = \frac{1}{2(1-v^2)}\left(\frac{n}{z}v - v'\right), \quad ' = \frac{d}{dz}. \tag{4}$$

Относительно неизвестных функций v, u система (4) эквивалентна соответственно уравнениям

$$v'' = -\frac{v}{1-v^2}v'^2 - \frac{1}{z}v' + \frac{n^2}{z^2}\cdot\frac{v}{1-v^2} - 4v(1-v^2), \tag{5}$$

$$u'' = -\frac{u}{1-u^2}u'^2 - \frac{1}{z}u' + \frac{(n+1)^2}{z^2}\cdot\frac{u}{1-u^2} - 4u(1-u^2). \tag{6}$$

Таким образом, справедливы

Теорема 1 [1]. *Пусть* $v = v(z)$ *– решение уравнения* (5). *Тогда функция* $u(z)$*, определяемая формулой из* (4)*, является решением уравнения* (6).

Теорема 2. *Пусть* $u = u(z)$ *– решение уравнения* (6). *Тогда функция* $v(z)$*, определяемая формулой из* (4)*, является решением уравнения* (5).

Уравнения (5), (6)с помощью преобразований

$$v = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-y}},\ u = \frac{\sigma}{\sqrt{1-q}},\ z^2 = \tau,\ \varepsilon^2 = \sigma^2 = 1 \tag{7}$$

сводятся к уравнениям

$$y'' = \frac{3y-1}{2y(y-1)}y'^2 - \frac{y'}{\tau} - \frac{n^2}{2}\cdot\frac{(y-1)^2}{y\tau^2} + 2\frac{y}{\tau}, \tag{8}$$

$$q'' = \frac{3q-1}{2q(q-1)}q'^2 - \frac{q'}{\tau} - \frac{(n+1)^2}{2}\cdot\frac{(q-1)^2}{q\tau^2} + 2\frac{q}{\tau} \tag{9}$$

соответственно. Каждое из уравнений (8), (9) представляет собой пятое уравнение Пенлеве

$$w'' = \frac{3w-1}{2w(w-1)}w'^2 - \frac{w'}{\tau} + \frac{(w-1)^2}{\tau^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma w}{\tau} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1} \tag{10}$$

при значениях параметров $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{n^2}{2}$, $\gamma = 2$, $\delta = 0$ и $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{(n+1)^2}{2}$, $\gamma = 2$, $\delta = 0$ соответственно.

Из (4) с помощью преобразований (7) несложно получить формулы взаимно однозначного соответствия между решениями уравнений (8) и (9)

$$y = 1 + \frac{4\tau q^2(q-1)}{[(n+1)(1-q)+\tau q']^2}, \tag{11}$$

$$q = 1 + \frac{4\tau y^2(y-1)}{[n(y-1)+\tau y']^2}. \tag{12}$$

Формула (12) (преобразование Беклунда уравнения (10) в случае $\alpha = \delta = 0$, $\gamma \neq 0$) получена в [4]. Обобщение формулы (12) на случай, когда в (10) $\alpha\gamma \neq 0$, $\delta = 0$ дано в [5]. В работе [6] показано, что система дифференциальных уравнений (11), (12) является системой Пенлеве–типа.

Решения уравнения (5) определяют класс сепарабельных решений комплексного sin-Gordon уравнения, известного также, как модель Полмайера–Лунда–Редже. Более подробная информация о других приложениях (с конкретными ссылками на источники) содержится в [7]. К системе (4) сводится также система двух дифференциальных уравнений, ассоциированная с сильношунтированной моделью Джозефсона [8]. Систему (4) можно получить из системы [9] двух дифференциальных уравнений (описывающей класс аксиально–симметричных стационарных решений уравнений Эйнштейна), если в ней выполнить масштабные преобразования неизвестных функций и независимой переменной.

Литература

1. Hisakado M. *Unitary matrix models and Painlevé III* // Mod. Phys. Lett. 1996. Vol. A11. P. 3001–3010.

2. Nijhoff F. W., Papageorgiu V. *Similarity reductions of integrable lattices and discrete Painlevé II equation* // Phys. Lett. 1991. Vol. 153A. P. 337–344.

3. Kharchev S., Marshakov A., Mironov A., Zabrodin A. *Matrix models among integrable theories: Forced hierarchies and formalism operator* // Nucl. Phys. 1991. Vol. B336. P. 659–691.

4. Бордаг Л. А., Китаев А. В. *Об алгебраических и рациональных решениях пятого уравнения Пенлеве*. Дубна, 1986. 14 с. (Препринт / Объед. ин-т ядер. исслед.: Р5-86-334).

5. Adler V. E. *Nonlinear chains and Painlevé equations* // Physica. 1994. Vol. 73D. P. 335–351.

6. Цегельник В. В. *О формулах взаимно однозначного соответствия между решениями системы двух дифференциальных уравнений* // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45, № 2. С. 50–53.

7. Clarkson P. A. *Open problems for Painlevé equations* // SIGMA. 2019. Vol. 15. Art. 006. 20 p.

8. Bibilo Y., Glutsyuk A. A. *On families on constructions in model of overdamped Josephson junstion and Painlevé 3 equation* // Nonlinearity. 2022. Vol. 35. P. 5427–5480.

9. Marek J. J. J. *Some solutions of Einstein's equations in general relativity* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1968. Vol. 64. P. 167–170.