УДК 514.76

Н. П. Можей
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ЭКВИАФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Во введении указан объект исследования – аффинные связности на однородных пространствах. В каком случае однородное пространство допускает инвариантную связность? Если существует хотя бы одна инвариантная аффинная связность, то пространство является изотропно-точным. В статье изучены трехмерные изотропно-точные однородные пространства, на которых действует разрешимая группа преобразований, допускающие инвариантные связности только нулевой кривизны. Цель работы – определить, при каких условиях указанные пространства не допускают эквиаффинных связностей. Охарактеризованы основные понятия: изотропно-точная пара, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, эквиаффинная связность. В основной части работы найдено и приведено в явном виде полное описание трехмерных однородных пространств с разрешимой группой преобразований, допускающих инвариантные аффинные связности только нулевой кривизны, но не допускающих эквиаффинных связностей. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложение в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

Ключевые слова: эквиаффинная связность, группа преобразований, однородное пространство, тензор кривизны, тензор кручения.

Для цитирования: Можей Н. П. Однородные пространства разрешимых групп Ли, не допускающие эквиаффинных связностей нулевой кривизны // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 10–18.
DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-2.

N. P. Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

EQUIAFFINE CONNECTIONS OF ZERO CURVATURE ON HOMOGENEOUS SPACES OF SOLUBLE GROUPS OF TRANSFORMATIONS

In the introduction, the object of research is indicated – affine connections on homogeneous spaces. When a homogeneous space admits an invariant connection? If there exists at least one invariant affine connection, then the space is isotropically-faithful. In this article we study three-dimensional isotropicaly-faithful homogeneous spaces on which a solvable Lie group of transformations operates, allowing invariant connections of zero curvature only. The purpose of the work is to determine under what conditions these spaces do not admit equiaffine connections. The basic notions, such as isotropically-faithful pair, affine connection, curvature and torsion tensors, Ricci tensor, equiaffine connection are defined. In the main part of the paper, a complete description of three-dimensional homogeneous spaces with a solvable group of transformations, allowing invariant affine connections of zero curvature only, but not allowing equiaffine connections, is found and given explicitly. The features of the methods presented in the work is the application of a purely algebraic approach to the description of manifolds and structures on them. The results obtained can be used in the study of manifolds, as well as have applications in various fields of mathematics and physics, since many fundamental problems in these fields are connected with the study of invariant objects on homogeneous spaces.

Keywords: equiaffine connection, transformation group, homogeneous space, curvature tensor, torsion tensor.

For citation: Mozhey N. P. Equiaffine connections of zero curvature on homogeneous spaces of soluble groups of transformations. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 10–18 (In Russian).
DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-2.

Введение. Важнейшими структурами в дифференциальной геометрии многообразий являются структуры различных связностей, имеющие широкое применение в естествознании и математике. Понятие эквиаффинной кривизны первоначально встречается у В. Бляшке [1], альтернативный подход приведен в работе [2]. Вопрос о существовании связности нулевой кривизны является одной из нерешенных проблем, такие связности позволяют дать геометрическую интерпретацию некоторым понятиям математики и физики, например, понятие связности, определяющее представление нулевой кривизны, играет важную роль в теории солитонов. «Дифференциальная геометрия многомерных пространств различных “связностей” является одним из интереснейших разделов современной математики. Очень велико ее значение и в современной физике и механике» [3]. Трехмерные однородные пространства с разрешимой группой преобразований рассматривались в статье [4], причем внимание сосредоточено на пространствах, допускающих аффинные связности только нулевой кривизны. В данной работе определено, при каких условиях такое пространство не допускает эквиаффинных связностей; при изложении сохранены обозначения, введенные в работе [4], в которой приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$, $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если G эффективна на $\bar{G}/G$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$ – инвариантным. *Тензор кручения* $T \in InvT_2^{\,1}(\mathfrak{m})$ и *тензор кривизны* $R \in InvT_3^{\,1}(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}};$$
$$R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T = 0$. Определим тензор Риччи $Ric \in Inv\mathrm{T}_2(\mathfrak{m})$: $Ric(y, z) = \mathrm{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$. Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$, то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$. Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна [5].

Под *эквиаффинной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, через $\{e_1, \ldots, e_n, u_1, u_2, u_3\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ $(n = \dim \mathfrak{g})$. Будем полагать, что подалгебра $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1, \ldots, e_n$, а $\{u_1, u_2, u_3\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в источнике [4], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$. Аффинная связность называется *тривиальной*, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$. Тривиальную пару типа $d.n$ обозначаем $d.n.1$.

Теорема. *А) Все трехмерные тривиальные однородные пространства, допускающие инвариантные аффинные связности только нулевой кривизны, но не допускающие эквиаффинных связностей, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, локально имеют вид $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{a}$ – коммутативный идеал в $\bar{\mathfrak{g}}$, а $\mathfrak{g}$ сопряжена одной из следующих подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$:*

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 1}$

2. $\begin{array}{|ccc|}\hline x & & \\ & \lambda x & \\ & & \mu x \\ \hline\end{array}$ $\lambda \le \mu \le 1, \lambda\mu > 0, (\lambda, \mu) \ne (-2, -1), (\lambda, \mu) \ne (1/4, 1/2), \lambda + \mu \ne -1;$
4. $\begin{array}{|ccc|}\hline \lambda x & x & \\ -x & \lambda x & \\ & & \mu x \\ \hline\end{array}$ $\mu > 0, \mu \ne -2\lambda;$
7. $\begin{array}{|ccc|}\hline x & & x \\ & \lambda x & \\ & & x \\ \hline\end{array}$ $\lambda \ne 0, \lambda \ne -2;$
9. $\begin{array}{|ccc|}\hline x & x & \\ & x & x \\ & & x \\ \hline\end{array}$.

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 2}$

1. $\begin{array}{|ccc|}\hline x & & \\ & \lambda x & \\ & & y \\ \hline\end{array}$ $|\lambda| \le 1, \lambda \ne 0;$
2. $\begin{array}{|ccc|}\hline x + y & & \\ & \lambda x & \\ & & \mu y \\ \hline\end{array}$ $-1 \le \mu \le \lambda, \lambda\mu > 0, (\lambda, \mu) \ne (-1, -1);$
3. $\begin{array}{|ccc|}\hline \lambda x & x & \\ -x & \lambda x & \\ & & y \\ \hline\end{array}$ $\lambda \ge 0;$
4. $\begin{array}{|ccc|}\hline y & x & \\ -x & y & \\ & & \lambda x + \mu y \\ \hline\end{array}$ $\lambda \ge 0, (\lambda, \mu) \ne (0, 0), (\lambda, \mu) \ne (0, -2);$

$$5.\ \begin{array}{|ccc|}\hline y & & x+\lambda y\\ & x & \\ & & y\\ \hline\end{array};\ 6.\ \begin{array}{|ccc|}\hline y & & y\\ & x & \\ & & y\\ \hline\end{array};\ 8.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & & x\\ & y & \\ & & \lambda y\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}\lambda\neq 0,\\ \lambda\neq -1;\end{array}$$

$$9.\ \begin{array}{|ccc|}\hline y & & x\\ & \lambda y & \\ & & \mu y\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}(\lambda,\mu)\neq(1/2,-1/2),\\ (\lambda,\mu)\neq(1/2,1/4),\\ \lambda\neq 0,\mu\neq 0,\\ \lambda+\mu\neq -1;\end{array}\ 10.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & x\\ & x & y\\ & & x\\ \hline\end{array};$$

$$11.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & -x\\ & x & y\\ & & x\\ \hline\end{array};\ 12.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & \\ & x & y\\ & & x\\ \hline\end{array};\ 14.\ \begin{array}{|ccc|}\hline y & y & x\\ & y & y\\ & & y\\ \hline\end{array};$$

$$15.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & & x\\ & y & y\\ & & y\\ \hline\end{array};\ 16.\ \begin{array}{|ccc|}\hline y & & x\\ & \lambda y & \\ & & \lambda y\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}\lambda\neq 0,\\ \lambda\neq -1/2;\end{array}$$

$$19.\ \begin{array}{|ccc|}\hline y & y & x\\ & y & \\ & & \lambda y\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}\lambda\neq 0,\\ \lambda\neq -2;\end{array}\ 21.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & \\ & \lambda x & y\\ & & (2\lambda-1)x\\ \hline\end{array}\ \lambda\neq 1,0,1/2;$$

$$22.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & \\ & x & y\\ & & 2x\\ \hline\end{array}.$$

<u>$\dim\mathfrak{g}=3$</u>

$$1.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & \\ & y & \\ & & z\\ \hline\end{array};\ 2.\ \begin{array}{|ccc|}\hline y & x & \\ -x & y & \\ & & z\\ \hline\end{array};\ 6.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & & x\\ & y & \\ & & z\\ \hline\end{array};$$

$$7.\ \begin{array}{|ccc|}\hline y & & x\\ & \lambda y & \\ & & z\\ \hline\end{array}\ \lambda\neq 0;\ 8.\ \begin{array}{|ccc|}\hline y & & x\\ & z & \\ & & \lambda y+\mu z\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}(\lambda,\mu)\neq(0,0),\\ (\lambda,\mu)\neq(-1,-1);\end{array}$$

$$9.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & z\\ & x & y\\ & & x\\ \hline\end{array};\ 10.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & z\\ & y & \lambda x+y\\ & & y\\ \hline\end{array};\ 11.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & z\\ & y & x\\ & & y\\ \hline\end{array};$$

$$12.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & & z\\ & & y\\ & & x\\ \hline\end{array};\ 13.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & z\\ & \lambda x & y\\ & & \mu x\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}-1<\lambda\leq 1,\\ \mu\neq 0,\\ \lambda+\mu\neq -1;\end{array}\ 14.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & z\\ & -x & y\\ & & \mu x\\ \hline\end{array}\ \mu>0;$$

$$16.\ \begin{array}{|ccc|}\hline \lambda x & x & z\\ -x & \lambda x & y\\ & & \mu x\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}\mu>0,\\ \mu\neq -2\lambda;\end{array}\ 17.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & \lambda x+y & z\\ & x & \\ & & y\\ \hline\end{array};$$

$$18.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & x & z\\ & x & \\ & & y\\ \hline\end{array};\ 19.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & z\\ & x & \\ & & \lambda x\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}|\lambda|\leq 1,\\ \lambda\neq 0,\\ \lambda\neq -1;\end{array}$$

$$20.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & z\\ & \lambda x & \\ & & \mu x\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}\lambda\leq\mu,\\ \lambda\neq 0,\mu\neq 0,\\ \lambda+\mu\neq -1;\end{array}\ 21.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & z\\ & \lambda x & x\\ & -x & \lambda x\\ \hline\end{array}\ \lambda<0;$$

$$22.\ \begin{array}{|ccc|}\hline \lambda x & y & z\\ & \mu x & x\\ & -x & \mu x\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}\lambda\neq -2\mu;\\ \lambda>0;\end{array}\ 23.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & z\\ & \lambda x & y\\ & & (2\lambda-1)x\\ \hline\end{array}\ \lambda\neq 1,1/2,0;$$

$$24.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & z\\ & x & y\\ & & 2x\\ \hline\end{array};\ 26.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & x & z\\ & y & y\\ & & y\\ \hline\end{array};\ 27.\ \begin{array}{|ccc|}\hline y & x & z\\ & \lambda y & y\\ & & \lambda y\\ \hline\end{array}\ \lambda\neq 0,-1/2;$$

$$28.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & x & z\\ & & y\\ & & x\\ \hline\end{array};\ 29.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & x & z\\ & x & y\\ & & \mu x\\ \hline\end{array}\ \mu\neq 0,-2;$$

$$30.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & x & z\\ & x & x+y\\ & & x\\ \hline\end{array};\ 31.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x+y & z & \\ & x & z\\ & & x-y\\ \hline\end{array}$$

<u>$\dim\mathfrak{g}=4$</u>

$$4.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & u\\ & y & \\ & & z\\ \hline\end{array};\ 6.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & u\\ & \lambda x & z\\ & & y\\ \hline\end{array}\ -1\leq\lambda\leq 1;\ 7.\ \begin{array}{|ccc|}\hline \lambda x & x & u\\ -x & \lambda x & z\\ & & y\\ \hline\end{array}\ \lambda\geq 0;$$

$$8.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & & u\\ & y & z\\ & & \lambda x+\mu y\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}\lambda\leq\mu,\\ (\lambda,\mu)\neq(0,0),\\ (\lambda,\mu)\neq(-1,-1);\end{array}$$

$$9.\ \begin{array}{|ccc|}\hline y & x & u\\ -x & y & z\\ & & \lambda x+\mu y\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}\lambda\geq 0,\\ (\lambda,\mu)\neq(0,0),\\ (\lambda,\mu)\neq(0,-2);\end{array}$$

$$10.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & z & u\\ & x & \\ & & y\\ \hline\end{array};\ 11.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & z & u\\ & y & \\ & & \lambda x+\mu y\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}-1\leq\mu<1,\\ (\lambda,\mu)\neq(0,0),\\ (\lambda,\mu)\neq(-1,-1);\end{array}$$

$$12.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & z & u\\ & y & \\ & & \lambda x+y\\ \hline\end{array}\ \lambda\geq 0;\ 13.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & z & u\\ & \lambda y & y\\ & -y & \lambda y\\ \hline\end{array}\ \lambda\geq 0;$$

$$14.\ \begin{array}{|ccc|}\hline \lambda x+\mu y & z & u\\ & y & x\\ & -x & y\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}\lambda\geq 0,\\ (\lambda,\mu)\neq(0,-2);\end{array}\ 15.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & z & u\\ & y & \lambda x+y\\ & & y\\ \hline\end{array}\ \lambda\geq 0;$$

$$16.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & z & u\\ & y & x\\ & & y\\ \hline\end{array};\ 17.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & \lambda x+y & u\\ & x & z\\ & & y\\ \hline\end{array};\ 18.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & x & u\\ & x & z\\ & & y\\ \hline\end{array};$$

$$19.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & u\\ & & z\\ & & x\\ \hline\end{array};\ 20.\ \begin{array}{|ccc|}\hline & y & u\\ & x & z\\ & & \lambda x\\ \hline\end{array}\ \lambda\neq 0,-1;$$

$$21.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x & y & u\\ & \lambda x & z\\ & & \mu x\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{l}\mu\neq 0,\\ \lambda+\mu\neq -1;\end{array}\ 22.\ \begin{array}{|ccc|}\hline x+y & z & u\\ & x & z\\ & & x-y\\ \hline\end{array}.$$

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 5}$

$$4.\ \boxed{\begin{matrix} x & & v \\ & y & u \\ & & z \end{matrix}};\ 5.\ \boxed{\begin{matrix} x & y & v \\ -y & x & u \\ & & z \end{matrix}};\ 6.\ \boxed{\begin{matrix} x & u & v \\ & y & \\ & & z \end{matrix}};$$

$$7.\ \boxed{\begin{matrix} x & u & v \\ & y & z \\ & -z & y \end{matrix}};\ 8.\ \boxed{\begin{matrix} & z & v \\ & x & u \\ & & y \end{matrix}};\ 9.\ \boxed{\begin{matrix} x & z & v \\ & \lambda x & u \\ & & y \end{matrix}};$$

$$10.\ \boxed{\begin{matrix} x & z & v \\ & y & u \\ & & \lambda x + \mu y \end{matrix}}\ \begin{matrix} (\lambda, \mu) \neq (0, 0), \\ (\lambda, \mu) \neq (-1, -1). \end{matrix}$$

$\underline{\dim \mathfrak{g} = 6}$

$$5.\ \boxed{\begin{matrix} x & u & w \\ & y & v \\ & & z \end{matrix}}.$$

Греческими буквами здесь обозначены параметры, подалгебры с одинаковыми номерами, но разными значениями параметров, не сопряжены друг другу, латинскими буквами обозначены переменные, по умолчанию они принадлежат $\mathbb{R}$; базис подалгебры выбираем, придав одной из переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Б) Все трехмерные нетривиальные однородные пространства, допускающие инвариантные аффинные связности только нулевой кривизны, но не допускающие эквиаффинных связностей, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, локально имеют вид 1.2.2 ($\lambda < -1$), 1.2.3 ($0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$), 1.4.2 ($\lambda > 0$), 1.7.3, 2.2.2, 2.4.2, 2.8.5, 2.9.2 ($\mu \neq 0, -1, -\frac{1}{2}$), 2.15.2, 2.16.3, 2.19.5, 3.8.7, 3.13.3 ($0 < \mu < 2$), 3.13.5 ($\mu \neq -1$, $-2 < \mu < 0$), 3.14.3, 3.19.17, 3.20.25 ($\mu \neq -\frac{1}{3}$, $\mu < 0$), 3.20.26 ($\lambda \neq \frac{1}{4}$, $\lambda > 0$), 4.8.9, 4.11.5, где

1.2.2, $\lambda < -1$	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	λu_2	$(\lambda + 1)u_3$
u_1	$-u_1$	0	u_3	0
u_2	$-\lambda u_2$	$-u_3$	0	0
u_3	$-(\lambda + 1)u_3$	0	0	0

1.2.3, $0 < \lambda \leq 1/2$	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	λu_2	$(1 - \lambda)u_3$
u_1	$-u_1$	0	0	0
u_2	$-\lambda u_2$	0	0	u_1
u_3	$(\lambda - 1)u_3$	0	$-u_1$	0

1.4.2, $\lambda > 0$	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$\lambda u_1 - u_2$	$u_1 + \lambda u_2$	$2\lambda u_3$
u_1	$-\lambda u_1 + u_2$	0	u_3	0
u_2	$-\lambda u_2 - u_1$	$-u_3$	0	0
u_3	$-2\lambda u_3$	0	0	0

1.7.3	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$2u_2$	$u_1 + u_3$
u_1	$-u_1$	0	0	u_2
u_2	$-2u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1 - u_3$	$-u_2$	0	0

2.2.2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2	0
e_2	0	0	u_1	0	u_3
u_1	$-u_1$	$-u_1$	0	0	0
u_2	$-u_2$	0	0	0	u_1
u_3	0	$-u_3$	0	$-u_1$	0

2.4.2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2	$2u_3$
e_2	0	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	$-u_1$	u_2	0	u_3	0
u_2	$-u_2$	$-u_1$	$-u_3$	0	0
u_3	$-2u_3$	0	0	0	0

2.9.2, $\mu \neq 0$, $\mu \neq -1, -1/2$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1 - \mu)e_2$	u_1	$(\mu + 1)u_2$	μu_3
e_2	$(\mu - 1)e_2$	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_2	$-(\mu + 1)u_2$	0	0	0	0
u_3	$-\mu u_3$	$-u_1$	$-u_2$	0	0

2.8.5	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	0	u_1
e_2	$-e_1$	0	0	u_2	u_3
u_1	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-u_3$	$-u_2$	0	0

2.15.2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_1	0	0	u_1
e_2	$-e_1$	0	0	u_2	$u_2 + u_3$
u_1	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-u_2 - u_3$	$-u_2$	0	0

2.16.3	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-(1/2)e_1$	0	0	u_1
e_2	$(1/2)e_1$	0	u_1	$(1/2)u_2$	$u_2 + (1/2)u_3$
u_1	0	$-u_1$	0	0	0
u_2	0	$-(1/2)u_2$	0	0	u_1
u_3	$-u_1$	$-u_2 - (1/2)u_3$	0	$-u_1$	0

2.19.5	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-(1/2)e_1$	0	0	u_1
e_2	$(1/2)e_1$	0	u_1	$u_1 + u_2$	$e_1 + (1/2)u_3$
u_1	0	$-u_1$	0	0	0
u_2	0	$-u_1 - u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-e_1 - (1/2)u_3$	0	0	0

3.8.7	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$2e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	0	0	$-e_3$	0	u_2	u_3
e_3	$-2e_3$	e_3	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_3$	$-u_1$	$-u_2$	0	0

3.13.3, $0 < \mu < 2$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-2\mu)e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	$(1-\mu)u_2$	μu_3
e_2	$(2\mu-1)e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$(\mu-1)u_2$	0	0	0	0	u_1
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-u_1$	0

3.13.5, $\mu \neq -1$, $-2 < \mu < 0$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$(1-\mu)e_3$	u_1	$(1+\mu)u_2$	μu_3
e_2	$-e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	u_2
u_2	$-(\mu+1)u_2$	0	0	0	0	0
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	$-u_2$	0	0

3.14.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-3e_2$	$-e_3$	u_1	$-u_2$	$2u_3$
e_2	$3e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	e_3	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	u_2	0	0	0	0	u_1
u_3	$-2u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-u_1$	0

3.19.17	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-2e_2$	$-e_3$	0	$2u_2$	u_3
e_2	$2e_2$	0	0	0	u_1	e_3
e_3	e_3	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	0	0
u_2	$-2u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	$-u_3$	$-e_3$	$-u_1$	0	0	0

3.20.25, $\mu \neq -\frac{1}{3}$, $\mu < 0$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-2\mu)e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	$2\mu u_2$	μu_3
e_2	$(2\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1	e_3
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-2\mu u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	$-\mu u_3$	$-e_3$	$-u_1$	0	0	0

3.20.26, $\lambda \neq \frac{1}{4}$, $\lambda > 0$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\lambda)e_2$	$(1-2\lambda)e_3$	u_1	λu_2	$2\lambda u_3$
e_2	$(\lambda-1)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$(2\lambda-1)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-\lambda u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	0
u_3	$-2\lambda u_3$	0	$-u_1$	0	0	0

4.8.9	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$2e_3$	e_4	u_1	0	$-u_3$
e_2	0	0	$-e_3$	0	0	u_2	u_3
e_3	$-2e_3$	e_3	0	0	0	0	u_1
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_3$	$-u_1$	$-u_2$	$-u_2$	0	0

4.11.5	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	0	0
e_2	0	0	$-e_3$	$-(1/2)e_4$	0	u_2	$(1/2)u_3$
e_3	$-e_3$	e_3	0	0	0	u_1	e_4
e_4	$-e_4$	$(1/2)e_4$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	0	$-(1/2)u_3$	$-e_4$	$-u_1$	0	0	0

В работе [4] приведен список трехмерных однородных пространств разрешимых групп Ли, допускающих аффинные связности только нулевой кривизны, соответственно, для доказательства этой теоремы достаточно выбрать из них пространства, не допускающие эквиаффинных связностей. Заметим также, что у пространств, указанных в теореме, связность имеет нулевую кривизну, тензор Риччи также нулевой (то есть симметрический), следовательно, при равенстве нулю тензора кручения аффинная связность является локально эквиафинной связностью без кручения. Находим афинные связности и тензоры кручения. Проверяя, при каких условиях пространство не допускает эквиаффинных связностей, получаем искомый результат.

Действительно, выпишем инвариантные связности на пространствах, приведенных в работе [4]. Прямыми вычислениями получаем, что, например, у пар, перечисленных в пункте Б теоремы (в некотором базисе), аффинная связность тривиальна с нулевой кривизной и кручением, за исключением пар, выписанных ниже. Если тензор кручения нулевой, то аффинная связность (которая также является локально эквиафинной) имеет вид, приведеннный в табл. 1.

Если же тензор кручения может быть ненулевым, то аффинная связность и сам тензор кручения имеют вид, приведеннный в табл. 2 и 3.

Следовательно, аффинная связность является локально эквиафинной связностью без кручения при $q_{1,3} = \frac{1}{2}$ в случаях 3.14.3, 3.13.3 ($\mu \neq 0$), 2.16.3; при $p_{2,3} = \frac{1}{2}$ в случаях 4.8.9, 3.8.7, 3.13.5, 2.8.5, 2.9.2 ($\mu \neq 0, -1, -\frac{1}{2}$), 2.15.2, 1.7.3; при $r_{1,2} = q_{1,3} - 1$ в случаях 2.2.2, 1.2.3; при $r_{1,2} = q_{1,3}$ в случае 3.20.26 ($\lambda = \frac{1}{3}$); при $p_{3,2} = \frac{1}{2}$ в случаях 2.4.2, 1.4.2 и при $q_{3,1} = p_{3,2} - 1$ в случае 1.2.2.

Таблица 1

Аффинная связность (тензор кручения нулевой)

Пара	Аффинная связность (тензор кручения нулевой)
4.11.5, 3.19.17, 3.20.25 $\mu \neq 0, -\frac{1}{3}$	$\Lambda(u_1) = 0,\ \Lambda(u_2) = 0,\ \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.20.26 $\lambda \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.19.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $r_{1,3} \in \mathbb{R}$

Таблица 2

Аффинная связность (тензор кручения может быть ненулевым)

Пара	Аффинная связность (тензор кручения может быть ненулевым, $p_{i,j},\ q_{i,j},\ r_{i,j} \in \mathbb{R},\ i, j = \overline{1,3}$)
3.13.3 $\mu \neq 0$, 3.14.3	$\Lambda(u_1) = 0,\ \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4.8.9, 3.8.7, 3.13.5 ($\mu \neq -1$), 2.8.5, 2.9.2 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ($\mu \neq 0, 1, -1, -\frac{1}{2}$) 2.15.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.2.2, 1.2.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.16.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 2

3.20.26 $\lambda = \frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.4.2, 1.4.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.2 $\mu = 1$, 1.7.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.2 $\lambda = \frac{1}{2}$ ($\mu \neq 0, 1, -1, -\frac{1}{2}$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Аналогично, у всех пар, перечисленных в пункте A теоремы, локально эквиаффинные связности имеют вид, указанный в табл. 4.

Для остальных трехмерных однородных пространств, приведенных в теореме, локально эквиаффинная связность также существует и тривиальна.

Заметим, что в случаях 3.20.25 ($\mu = -\frac{1}{3}$) и 3.13.5 ($\mu = -1$) $\mathrm{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$, то есть эквиафинные связности существуют (и совпадают с локально эквиаффинными), в случаях 1.2.1 ($\mu + \lambda = -1$), 1.4.1 ($\mu = -2\lambda$), 1.7.1 ($\lambda = -2$), 2.2.1 $(\lambda, \mu) = (-1,-1)$, 2.4.1 $(\lambda, \mu) = (0,-2)$, 2.8.1 ($\lambda = -1$), 2.9.1 ($\lambda + \mu = -1$), 2.16.1 ($\lambda = -1/2$), 2.19.1 ($\lambda = -2$), 3.8.1 ($\lambda, \mu) = (-1,-1)$, 3.13.1 ($\mu + \lambda = -1$), 3.16.1 ($\mu = -2\lambda$), 3.19.1 ($\lambda = -1$), 3.20.1 ($\mu + \lambda = -1$), 3.21.1 ($\lambda = 0$), 3.22.1 ($\lambda = -2\mu$), 3.23.1 ($\lambda = 0$), 3.27.1 ($\lambda = -1/2$), 3.29.1 ($\mu = -2$), 4.8.1 ($\lambda, \mu) = (-1,-1)$, 4.9.1 ($\lambda, \mu) = (0,-2)$, 4.11.1 ($\lambda, \mu) = (-1,-1)$, 4.14.1 ($\lambda, \mu) = (0,-2)$, 4.20.1 ($\lambda = -1$), 4.21.1 ($\mu + \lambda = -1$), 5.10.1 ($\lambda, \mu) = (-1,-1)$ также имеем $\mathrm{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, то есть эквиаффинная связность существует (и тривиальна), а в остальных случаях, приведенных в теореме, $\mathrm{tr}\Lambda(\mathfrak{g}) \neq 0$, так как даже $\Lambda(\mathfrak{g}) \notin \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$, следовательно указанные пары не допускают эквиаффинных связностей.

Таблица 3

Тензор кручения

Пара	Тензор кручения
3.14.3, 3.13.3 $\mu \neq 0$, 2.16.3	$T(u_1,u_2) = T(u_1,u_3) = 0$, $T(u_2,u_3) = \left(2q_{1,3} - 1, 0, 0\right)$
4.8.9, 3.8.7, 3.13.5, 2.8.5, 2.9.2 $\mu \neq 0, -1, -1/2$, 2.15.2, 1.7.3	$(0,0,0), \left(0, 2p_{2,3} - 1, 0\right), (0,0,0)$
3.20.26 $\lambda = 1/3$	$(0,0,0), (0,0,0), \left(q_{1,3} - r_{1,2}, 0, 0\right)$
2.2.2, 1.2.3	$(0,0,0), (0,0,0), \left(q_{1,3} - r_{1,2} - 1, 0, 0\right)$
2.4.2, 1.4.2	$\left(0, 0, 2p_{3,2} - 1\right), (0,0,0), (0,0,0)$
1.2.2	$\left(0, 0, p_{3,2} - q_{3,1} - 1\right), (0,0,0), (0,0,0)$

Таблица 4

Локально эквиаффинная связность

Пара	Локально эквиаффинная связность (без кручения)
4.11.1 $\lambda = 1/2, \mu = 0$, 4.21.1 $\mu = 1 - \lambda$ ($\lambda \neq 1$), 3.27.1 $\lambda = 1/2$, 2.16.1 $\lambda = 1/2$, 2.21.1 $\lambda = 3/4$	$\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\Lambda(u_3) = \begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.8.1 $\lambda = 0, \mu = 1/2$, 3.8.1 $\lambda = 1/2, \mu = 0$, 2.8.1 $\lambda = 1/2$, 2.9.1 $\lambda = 2\mu$ ($\mu \neq 0, 1/4, 1/3, -1/3, 1/2$), 1.2.1 $\mu = \lambda / 2$ ($\lambda \neq -2, -2/3$) 1.7.1 $\lambda = 2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&r_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$

Продолжение табл. 4

Пара	Локально эквиаффинная связность (без кручения)
3.7.1 $\lambda = 1/2$, 2.1.1 $\lambda = 1/2$, 1.2.1 $\lambda = 1/2$ ($\mu \neq 1/2, 1$), 1.7.1 $\lambda = 1/2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&q_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
3.14.1 $\mu \neq 0, 2$, 2.9.1 $\lambda = 1$, $\mu = 1/2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&r_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$
2.9.1 $\lambda = 1/2$ $\mu \neq 0, -1/2, -3/2, 1/4, 1/2$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&q_{1,2}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&r_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
1.2.1 $\mu = 2\lambda$ ($\lambda \neq 1/3, 1/4$)	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&q_{3,2}&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
1.2.1 $\lambda = 1/2$, $\mu = 1$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&q_{1,2}&0\\0&0&0\\0&q_{3,2}&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
4.11.1 $\mu = -1, \lambda = 1$, 3.8.1 $\lambda = -1, \mu = 1$, 3.20.1 $\mu = 1 - \lambda$ ($\lambda \neq 0$), 2.2.1 $\lambda = \mu = 1$, 2.9.1 $\lambda = 1 - \mu$ ($\mu \neq 0, 1, 1/3, 1/2$), 1.2.1 $\mu = 1 - \lambda$ ($\lambda \neq 1/3, 1/2$)	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&q_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&q_{1,3}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Продолжение табл. 4

Пара	Локально эквиаффинная связность (без кручения)
4.14.1 $\lambda = 0, \mu = 2$, 3.22.1 $\lambda = 2\mu \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.1 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, 1.2.1 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.23.1 $\lambda = \frac{2}{3}$, 2.21.1 $\lambda = \frac{2}{3}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 2q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.4.1 $\lambda = 0, \mu = 2$, 1.4.1 $\mu = 2\lambda$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.1 $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = \frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 4

1.2.1 $\mu = \lambda + 1$ ($\lambda \neq -2$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2.1 $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{2}{3}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Прямыми вычислениями для всех пар, приведенных в работе [4], получаем, что других трехмерных однородных пространств с разрешимой группой преобразований, допускающих аффинные связности только нулевой кривизны, но не допускающих эквиаффинных связностей, нет.

Заключение. Таким образом, найдено и приведено в явном виде полное описание трехмерных однородных пространств с разрешимой группой преобразований, допускающих инвариантные связности только нулевой кривизны, но не допускающих эквиаффинных связностей. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

Список литературы

1. Blaschke W. Vorlesungen ùber Differentialgeometrie. Berlin: Springer, 1923. Vol. 2. 230 s.
2. Olver P. Recursive moving frames // Results Math. 2011. No. 60. P. 423–452.
3. Veblen O., Whitehead J. The foundations of differential geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932, 230 p.
4. Можей Н. П. Связности нулевой кривизны на однородных пространствах разрешимых групп Ли // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2017. № 6 (105). С. 104–111.
5. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. 263 p.

References

1. Blaschke W. Vorlesungen ùber Differentialgeometrie. Berlin, Springer Publ., 1923, vol. 2. 230 s. (Auf Deutsch).

2. Olver P. Recursive moving frames. *Results Math*., 2011, vol. 60, pp. 423–452.
3. Veblen O., Whitehead J. The foundations of differential geometry. Cambridge, Cambridge Univ. Press Publ., 1932. 230 p.
4. Mozhey N. P. Connections of zero curvature on homogeneous spaces of solvable Lie groups. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta* [Izvestiya Gomel State University], 2017, no. 6 (105), pp. 104–111 (In Russian).
5. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge, Cambridge Univ. Press Publ., 1994. 263 p.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна − кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna − PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 15.03.2024