

О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Борисенко О.Ф.¹, доцент кафедры высшей математики, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: borisenkoof@bsuir.by

Протько М.А.¹, студент, e-mail: mari.protko@mail.ru

2024

1. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Ключевые слова: формализация, теоремы неопределенности, неразрешимость, невычислимость.

Аннотация: В данной работе исследуются границы применения формальных систем для решения задач, изначальная формулировка которых является слабо выразимой в данной системе.

Определения

В настоящей работе применяют следующие термины с соответствующими определениями:

Под **формализацией** здесь и далее будем понимать процесс представления какой-либо содержательной области в виде формальной системы или исчисления.

Формальной системой назовем тройку $S = (L, P, R)$, где $L \subseteq N$ – разрешимое множество всех предложений системы, а $P, R \subseteq L$ – перечислимые множества доказуемых и опровержимых предложений соответственно. Считаем, что все три множества заданы фиксированными алгоритмами (машинами Тьюринга), обозначаемыми M_L, M_P и M_R .

Под **замкнутой системой** будем понимать такую S , что любое предположение, выражаемое через предположение из L , будет также принадлежать L .

В центре нашего внимания будет попытка установить связь фактического, или **семантического**, отношения следования, которое мы будем обозначать через $p|=q$, которое означает, что из истинности p следует истинность q , с чисто формальным **синтаксическим** отношением выводимости $p|-q$ и заключающимся в том, что q выводимо из p с помощью некоторых четко описанных правил.

Под **языком** L будем понимать множество всех предложений системы S (в данном случае, не обязательно разрешимой), где элементами L являются некие определенные функции, аксиомы и численные (символьные) элементы, а также теории.

Под **формальной теорией** T будем понимать некое множество предложений или формул, принадлежащих языку L . В данном случае теория T состоит из всех формул, которые могут быть выведены в соответствии с некоторым фиксированным отношением следования из множества аксиом принадлежащих L .

Семантическое определение T состоит из всех формул L , которые предполагаются истинными в любой интерпретации, принадлежащей некому множеству интерпретаций. Синтаксическое определение T состоит из всех формул, выводимых посредством аксиом (ранее определенная формальная теория T – синтаксическая).

Формула языка L – это выражение, являющееся утверждением. **Предложение** – это формула языка L , интерпретация которой не зависит от входящих в нее переменных.

Введение

На данный момент времени, в качестве основы любого разрабатываемого алгоритма используются уже существующие решения, а также огромное количество обработанных данных. Изучая современные шифры и их развитие, мне пришла мысль о создании такой программной симуляции, которая позволяла бы из некоего предопределенного множества операций (сложение, позволяющее реализовать сдвиг по алфавиту с помощью ключа) в зависимости от внешних условий («конкуренции», если речь идет о генетических алгоритмах) на выходе получать различные реализации шифрования. Далее, усложнив систему достаточно, возможно будет получать алгоритмы шифрования и их вариации ранее не рассматриваемые и не известные, но подчиняющиеся заранее заданным параметрам. Данная успешная реализация позволила бы создавать легко оптимизируемые под задачу (даже не решенную) алгоритмы используя минимальное количество данных (развивая и далее систему по аналогии).

В процессе разработки данной идеи [1], я столкнулась с проблемой выразимости таких интуитивных понятий, как «истина» и «ложь» (в моем случае – «шифр» и «текст»; «текст со смыслом», «бессмысленное множество букв»; «возможно», «невозможно») средствами формальной логики.

Поэтому, мною была поставлена следующая задача: доказать возможность (или невозможность) создания такой системы, а также определить критерии применимости формальной системы к задачам данной категории.

Здесь и далее используются термины и определения из источников [2-3].

Основная часть

1.1 Обзор проделанной работы

Все выводы, проделанные в данной работе, строились на основании результатов из [1] и [4].

Поставим себе следующую задачу: создать систему, способную реализовывать несколько шифров в зависимости от каких-то внешних параметров (в данном случае – от целевой функции).

Или же такой язык L , что в нем возможно охарактеризовать два множества: E и Q , где E – множество изначального текста, Q – множество шифротекстов. При этом, найдется такая обратимая функция f , что $f(a) = b$, $a \in E, b \in Q$.

Также, сделаем ограничение, что элементы множеств E и Q могут пересекаться друг с другом (используют один и тот же алфавит).

Иными словами, для получения шифра в данной формальной системе S получим следующие отношения:

$$f(a, b) = \bigcup_{j,i}^{c,k} (a_i * b_j) \bmod n, \quad i = \overline{1, k}, j = \overline{1, c}, \quad (1)$$

где $f(a,b)$ – некая функция симметричного шифрования (биекция), a и b – множество символов текста и ключа соответственно, k – количество символов текста, c – количество символов ключа, n – мощность алфавита символов, $*$ – любая обратимая операция на множестве вычетов n .

Необходимо сделать следующее допущение, чтобы охарактеризовать получаемые результаты: в качестве параметра принадлежности $f(a,b)$ к неким перечислимые множества

доказуемых и опровержимых предложений P или R соответственно ($P, R \subseteq L$) является нахождение такого экстремума функции (1) что содержательное значение поиска экстремума данной функции будет соответствовать ограничению выбора * и порядка i и j , согласно свойству шифра, называемого криптостойкостью.

Т.е., для доказательства принадлежности f к L необходимо найти множество таких значений $f(a,b)$, что не должно существовать полиномиального алгоритма, который, имея половину строки s (где s – строка объединений символов из функции $f(a,b)$) последовательности, сможет предсказать $k + 1$ бит с вероятностью большей 50%.

Т.е. в ситуации, когда мы несколько раз применим (1), мы должны получать дискретное равномерное распределение для каждого элемента из n , даже если этот элемент не встречается в a и b .

Дадим определение фитнес-функции (чтобы рассчитывать в дальнейшем вероятность, а следовательно, и принадлежность L):

$$\mu(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p(u_i) \quad (2)$$

где s – множество символов, получаемых с помощью $f(a,b)$, $p(u_i)$ – вероятность встречи u_i символа, u_i – символ, полученный с помощью $f(a,b)$, где n – мощность множества a .

Расчет данной функции можно в дальнейшем упрощать с помощью свойств дискретного равномерного распределения.

В работах [3-4] использовались генетические алгоритмы в качестве практической реализации, поэтому, было сделано еще одно допущение:

Чем ближе результат $\mu(s)$ к $1/n$, тем лучше:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(s) = \frac{1}{n} \quad (3)$$

Т.е., принадлежность $f(a,b)$ к L будет основываться на близости к пределу $\mu(s)$ (3).

Одной из возможных реализаций (2) в г.а. будет составление множеств s_1 и s_2 , полученных из $f(a,b)$ и $f(c,b)$ с мощностью множеств a и c равной n , а затем проверка (4):

$$(s_1 \cap s_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \emptyset \quad (4)$$

В результате были определены следующие операции (символы языка L , если использовать термины [1]):

- 'k' – взять элемент ключа
- 's' – взять элемент текста
- 'p' – проверка на конец шифрованного текста
- 'm' – перенос указателя читаемого места в гене
- 'zs' – взять элемент текста на позицию x больше
- 'zk' – взять элемент ключа на позицию x больше
- 'mo' – операция взятия модуля
- '+' – операция сложения по mod 26
- '-' – операция вычитания по mod 26
- '*' – операция умножения по mod 26
- '/' – операция деления по mod 26

После некоторых операций следует аргумент:

- 'k' 15 – означает – взять (15 по mod мощность ключа) элемент ключа
- 's' 15 – взять (15 по mod мощность текста) элемент текста
- 'm' 15 – изменить индекс читаемой в гене позиции на (15 mod мощность гена)

После математических операций '+', '-', '*', '/', 'mod' следует два аргумента:

'+' 14 22 – прибавить к 22 значение 14

Приоритеты операций: 'p', 'm', 'k' и 's', '*' и '/', '+' и '-'.

Стоит учесть, что выбор вышеописанных операций делался с упором на возможность реализации простейших шифров из определенной выборки, для упрощения работы по проверке алгоритма.

Реализации шифров с данным набором операций описаны в таблице 1.

Таблица 1 – Шифры и соответствующие гены

шифр Цезаря:	'+' 's' 0 'k' 0 '+' 'zs' 1 'k' 0 'm' 4
шифр Виженера:	'+' 's' 0 'k' 0 '+' 'zs' 1 'zk' 1 'm' 4
шифр Бофора:	'-' 's' 0 'k' 0 '-' 'zs' 1 'zk' 1 'm' 4
шифр Вернама (одноразовый блокнот)	'mo' 's' 0 'k' 0 'mo' 'zs' 1 'zk' 1 'm' 4
аффинный шифр:	'+' '*' 5 's' 0 '+' '*' 5 'zs' 1 'm' 4
шифр простой перестановки:	's' 1 'zs' 2 'm' 4

В процессе работы [3] было обнаружено следующее свойство:

В наихудшем случае для проверки принадлежности $f(a,b) \in L$ нам придется рассмотреть все возможные комбинации из s (число размещений из w всевозможных слотов предусмотренных в генетических алгоритмов).

Согласно свойствам генетических алгоритмов из [5], мы получаем NP-задачу (перебор всех вариантов).

Если рассмотреть все возможные решения s на отображении $\mu(s)$, может получиться ситуация с очень большим разбросом локальных экстремумов. Что и является наихудшим случаем, встреча которого значительно влияет на скорость поиска решения.

Также данная реализация никак не учитывает выбор параметров i и j из (1), когда эти индексы должны описываться также некими обратимыми функциями.

В данной реализации совершенно не учитывается семантический смысл выполняемого алгоритма, из чего получается, что, хоть множество термов и функций языка L (определенного в соответствии с (1)) допускает существование некой функции шифрования $f(a,b)$, ограничения, налагаемые фитнес-функцией (3) приводят к тому, что они будут исключаться из рассмотрения (т.е., мы не получаем всевозможные решения, а только те, конкретные свойства которых мы можем описать в этой же системе S).

Поэтому, мною была поставлена следующая цель: найти критерии таких задач, понять их свойства и возможные варианты решения.

1.2 Постановка цели

Возвращаясь к работе [4], существует категория задач, которая оперирует семантическим смыслом. Пример из раздела 1.1. относится к данной категории, поскольку, основное определение шифра – возможность прочтения (т.е., осмысления некой информации в нем) текста при наличии ключа. Т.е., шифр отличается от обычного текста только наличием «смысла» в втором и отсутствием в первом.

Но, если попытаться оперировать этими категориями в строго формализованной системе (в машине Тьюринга, или же оперируя предикативной логикой), может возникнуть парадокс, подобный следующему сочетанию слов друг за другом «Это предложение ложь. Предыдущее предложение правда». Также и с описанием шифра. Шифр – что-то, что не равняется чему-то. Но это что-то (если смотреть с другой стороны) равняется шифру.

Переведа это на язык логики, получаем:

$$p| = q \leftrightarrow p| - q \quad (5)$$

Согласно работе [6], доказательство отсутствия эквивалентности выражения (5) является признаком неразрешимой задачи на машине Тьюринга. Неразрешима она потому, что мы не можем перейти из семантических отношений в синтаксические без потерь.

Семантическое и синтаксическое следование не равносильны друг другу. Пример этому – семантическое определение арифметики, по которому ее теоремы Т полны и разрешимы, а значит, аксиоматизированы. Но при переходе к синтаксическому определению, по теореме Гёделя, получаем обратный результат.

Т.е., в случае, когда необходимо доказать нечто используя машину Тьюринга, делается искусственная надстройка над сигнатурой, позволяющая определить понятие истины. Чаще всего, это некоторые перечисления, свойства и теоремы, которые задаются в качестве аксиом.

Иными словами, доказав выражение (5) на множестве L для формул подчиняющихся (1) можно с уверенностью сказать, что фитнес-функция из (2) в данной системе S не существует (ее операторы и слова будут относиться к иной системе, которая лишь пересекается с описанной нами системой S)

Поэтому, целью данной работы является определение критериев, при которых существует (5), а также поиск границы применимости всех последующих утверждений.

1.3 О формальной системе Геделя

В своей работе [7] Гедель определял множество S (или же, формальную систему P, если обратиться к оригинальному документу) таким образом:

Система S, определенная Геделем имеет следующие свойства:

- Наличие констант: “~” (не), “∨” (или), “Π” (для всех), “0” (ноль), “f” (функция от), “(”, “)” (скобки).
- Наличие переменных следующих типов:
 - 1) Первый тип – натуральные числа (включая 0): “x1”, “y1”, “z1”, ...
 - 2) Второй тип – классы на основе типа a: “x2”, “y2”, “z2”, ...
 - 3) Третий тип – классы классов типа a: “x3”, “y3”, “z3”, ...

На основе данных отношений получаем следующие предложения (формулы) формального языка L:

~(a), (a) Π(b), xP(a) (где x – любая переменная, значения которой принадлежат S)

Свойства 1-2 (в [7] 1-5, но в изложении всех аксиом не имеется смысла) являются аксиомами.

Но что, если система S описана по-другому? Что если определенные в [7] аксиомы, или же, предположения (assumptions) отличаются от изначальных? Какие формальные системы можно отнести к таковым?

Воспользуемся [8] для определения общих критериев формальных систем:

- a) L – язык, использующий формальную логику для доказательства теорем. Что значит, что необходимо использовать определенные правила для составления предложений и формул L . Каждая формула языка L состоит из конечного числа символов, выбранного из множества (конечного или бесконечно перечислимого). Множество является постоянным, как и правила языка L . Каждый символ из множества может использоваться более одного раза в любой формуле. Правила построения предложений языка L таковы, что интерпретация предложений L будет содержать некое утверждение (не обязательно истинное). Если A предложение языка L , и существует некое T , являющееся интерпретацией A , то A выражает T в L . Нет ограничения на существования такого T , что T интерпретирует A , но при этом A не будет принадлежать L (если перефразировать – существуют невыразимые предложения между различными L).
- b) Среди символов языка L должно существовать отрицание “ \sim ” (не), при использовании которого как A , так и $\sim A$ (\bar{A}) принадлежат языку L и выражают противоположные друг другу значения («истина» – «ложь», «0» – «1»).
- c) Для каждого положительного числа должна быть формула из L , обозначающая данное число. К тому же, символы языка L должны включать переменные (в самом буквальном смысле, используемом в формальной арифметике)
- d) Должен существовать процесс, посредством которого утверждения языка L возможно охарактеризовать как «доказуемые». Определение «доказуемости» должно выражаться без использования значения формул (через отношения синтаксического следования).

Пунктов 1-4 достаточно для формулировки первой теоремы Геделя. (В любом формальном языке L найдется такое утверждение F , что ни F ни $\sim F$ невозможно доказать).

Язык L называется непротиворечивым (simply consistent), если не найдется такого F , что оба утверждения F и не $\sim F$ возможно доказать. Если же язык L противоречив, то в нем существует доказуемое ложное утверждение.

Но в работе [9] показана логика непротиворечивого языка L , в котором возможно доказать ложные утверждения. Логика языка L , в которой данная ситуация невозможна, называется ω -полной.

После работы [9], свойства формального языка были дополнены:

- e) Если F и $\sim F$ возможно доказать в L , значит все утверждения в L доказуемы. Значит, если L не непротиворечива, то L и не ω -полна.
- f) Существует символ \supset языка L , что формула A , выражающая предложение S и формула B , выражающая предложение T , тогда $A \supset B$ выражает предложение «Если верно S , тогда верно T ».

Утверждений 1-6 будет достаточно для доказательства неполноты тремя разными способами: для доказательства Россера, Клини и Геделя. Все три доказательства эквивалентны друг другу.

1.4 Доказательство неразрешимости

Исходя из свойств, описанных в [10] и утверждений a-f, определим те из них, которые позволят точно указать неразрешимость задачи без необходимости досконального изучения логики и конструкций языка L , используемого при формализации поставленной задачи:

Задача неразрешима с помощью языка L , если:

- Найдется такая теория или аксиома T принадлежащая L , что среди рекурсивных отношений этой теории найдется хотя бы одно неразрешимое.
- T является ω -непротиворечивой
- T является неполной
- Среди утверждений языка L найдется хотя бы одно недоказуемое (средствами системы S , которой принадлежит язык L)
- Если некая система S' имеет вышеописанные свойства и при этом дополнительные аксиомы из S не делают ложные утверждения S' доказуемыми, то система S ($S' \supset S$) также имеет эти свойства (если задача неразрешима в S' , она также неразрешима и в S).
- Формальная система является неотделимой

Возвращаясь к формальной системе из пункта 1.1 получаем следующие выводы:

Если определять шифр как принадлежность к некому множеству всех возможных шифров P , то мы определяем две взаимоисключающие аксиомы, говорящие что элемент k принадлежит P , когда он не принадлежит $\sim P$.

Чаще всего, данная формулировка может возникнуть при задаче классификации, в которой основное отличие объектов друг от друга возникает из их интуитивно понятного определения, которое, при переходе от семантического смысла (данного человеком) в синтаксический, становится аксиомой.

Т.е., если мы имеем объект P , и хотим классифицировать все объекты, к P не относящиеся, единственным параметром будет то, что в P не входит. А это уже нарушает пункт о w – неполноте, из чего следует, что данная задача неразрешима.

Если же в данную систему S добавить еще одну аксиому, дающую возможность сильного доказательства утверждения о принадлежности $k \in P$ (что было сделано в работе [3]), будет получен еще одним вариант доказательства неполноты. Поскольку алфавиты шифра и теста одинаковые (одно из условий), а пространство ключей неограниченно, то найдётся такой ключ K и функция шифрования F что $F(a,K) = c$, $c \in E$; где E – пространство текстов. Т.е., c будет одновременно и шифром, и текстом. Т.е., аксиомы позволяют одновременно и доказать, и опровергнуть утверждение (что c – шифротекст). Из чего следует, что задача неразрешима.

Добавляя все новые и новые аксиомы, расписывая ограничения, мы все равно никогда не обнаружим данный ответ (особенно если он будет противоречив в данной системе), или же придем к противоречию там, где его изначально не было (из-за добавления аксиом). А значит, поставленная задача не будет решена.

В любой формальной системе действует неопределенность Геделя. Если задачу можно привести к предикативной логике (а было доказано, что найдется такая функция z Геделя, что это будет возможно), то в ней будут существовать данные ограничения (неразрешимость), которые возникают из-за неэквивалентности, описанной еще в (1.1).

Неразрешимость возникает тогда, когда в системе необходимо определить семантический смысл относительно синтаксического, причем в формальной системе S невозможно определить достаточное количество параметров для полноценной выразимости семантики без возникновения парадоксов.

Подход с маркировкой данных (точное недоказуемое соответствие, становящееся аксиомой [3]), может работать, но он будет значительно уступать по скорости уже существующим алгоритмам (тем же нейронным сетям).

1.5 О «симуляционных играх»

Рассмотрим другой возможный вариант решения поставленной задачи.

Если отталкиваться от предположения, что возможно создать некую систему или модель с реализуемым на вычислительной технике подобием семантической логики, то задачу возможно разрешить, если возможно использовать несколько синтаксических систем S над данной семантической.

По каким принципам можно построить такую систему?

Во-первых, следует воздержаться от константного определения «лжи» и «правды» (также может быть отношениями принадлежности/непринадлежности, в генетических алгоритмах – «живой»/«мертвый»). Определения данных параметров (если они являются ключевыми для задачи классификации) должны исходить из теорем, построенных на простейших аксиомах, но никак не из аксиом как таковых (по этой причине фитнес функция (2) не подходит – ее невозможно никоим образом соотнести с (1), они не относятся к одной системе S ((2) – вероятность встречи, (1) – простой расчет. Их нельзя связать посредством пунктов a-f из раздела 1.3).

Предположим, что такая система существует только в том случае, если в ней попросту невозможно существование противоречий в одной синтаксической системе (но таких систем одновременно в ней можно построить несколько).

Еще одно свойство данной системы – ее рекурсивность – она может выразить сама себя (имеет для этого все вычислительные средства).

Вышеописанные выводы сделаны на основании работ [11-12].

Для реализации семантической логики вычислительными средствами воспользуемся сочетанием «симуляционной игры» и принципов генетических алгоритмов, а именно, отбором («естественным») и возможностью мутаций (способ переноса информации).

Согласно [11], данная симуляция будет иметь следующие правила (термины и определения согласуются с данными в [3],[5],[12]):

- Не должно быть начальной закономерности, для которой существует простое доказательство того, что популяция может расти неограниченно.
- Должны быть начальные закономерности, которые, по-видимому, растут неограниченно.
- Должны быть простые начальные паттерны, которые растут и изменяются в течение значительного периода времени, прежде чем закончатся тремя возможными способами: полностью исчезнут (из-за перенаселенности или станут слишком редкими устанавливаясь в стабильную конфигурацию, которая впоследствии остается неизменной, или вступая в фазу колебаний, в которой они повторяют бесконечный цикл из двух или более периодов.

В системе необходимо реализовать следующие процессы: смерть, рождение, конкуренцию.

Заключение

В итоге проделанной работы были выявлены критерии неразрешимых задач, а также рассмотрены границы применимости первой теоремы неопределенности (в разных ее

вариациях). В результате была выяснена необходимость в создании нескольких формальных систем для реализации первоначальной задачи.

В процессе создания практической реализации по разделу 1.5., была обнаружена дальнейшая необходимость в практическом анализе взаимоотношения нескольких формальных систем друг с другом (возможно ли создать несколько таких непересекающихся по теоремам и аксиомам систем S , чтобы все они одновременно принадлежали семантической системе M ?), а также возможность реализации семантической системы на машине Тьюринга (какие процессы необходимо реализовать, чтобы уйти от ограничений формальной арифметики?).

Список использованных источников

1. Протьюко, М. А. Простейшие шифры и генетический алгоритм [Электронный ресурс] / М. А. Протьюко, О. Ф. Борисенко // Репозиторий БГУИР, 2023. ISSN: 2410-4655; 25 стр.
2. Линдон Р. Заметки по логике / перевод с англ. Гостева Ю.А., ред. Яглома Н.М. – Издательство «Мир», Москва, 1968. – 126 с.
3. Беклемишев Л.Д. Теоремы Геделя о неполноте и границы их применимости // «Успехи математических наук» т.65, вып. 5, 2010 – с. 62-103.
4. Протьюко, М. А. Китайская комната и системы шифрования // Компьютерные системы и сети : сборник статей 59-й научной конференции аспирантов, магистрантов и студентов, Минск, 17–21 апреля 2023 г. / Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. – Минск, 2023. – С. 25–28. УДК 004.83.
5. Панченко, Т.В. Генетические алгоритмы: учеб.пособие / под ред. Ю. Ю. Тарасевича. – Астрахань : Издательский дом «Астраханский университет», 2007. – 87 с.
6. Протьюко, М. А. Формализация и исследование операций замкнутых систем = Formalization and research of closed systems operations / М. А. Протьюко // Компьютерные системы и сети : сборник статей 59-й научной конференции аспирантов, магистрантов и студентов, Минск, 17–21 апреля 2023 г. / Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. – Минск, 2023. – С. 504–506. УДК 510.164.
7. Kurt Gödel. On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems. Dover, 1962
8. Barkley Rosser. An Informal Exposition of Proofs of Gödel's Theorems and Church's Theorem / The Journal of Symbolic Logic, Vol. 4, No. 2 (Jun., 1939), pp. 53-60
9. Alfred Tarski, *Linige Betrachtungen über die JBegriffe der w-Widerspruchsfreiheit und der w-Vollständigkeit*, Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 40 (1933), pp. 97-112.
10. Беклемишев, Л.Д. Теоремы Гёделя о неполноте и границы их применимости. (395) УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2010 г. сентябрь — октябрь т. 65, вып. 5
11. Martin Gardner MATHEMATICAL GAMES The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life"// Scientific American 223 (October 1970): 120-123.
12. Протьюко, М. А. Имитация модели зарождения жизни // Компьютерные системы и сети : сборник статей 59-й научной конференции аспирантов, магистрантов и студентов, Минск, 17–21 апреля 2023 г. / Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. – Минск, 2023. – С. 242–245. УДК: 004.021.