

<https://doi.org/10.21122/1029-7448-2024-67-3-193-208>

УДК 621.3.032.269.1:621.455.4:532.54

Математическое и натурное моделирование режимов работы капиллярного эмиттера электростатического коллоидного микродвигателя

С. В. Редько¹⁾, Е. Б. Чубенко¹⁾, В. П. Бондаренко¹⁾, И. В. Никифоров²⁾,
М. С. Краков³⁾

¹⁾Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (Минск, Республика Беларусь),

²⁾Белорусский государственный университет (Минск, Республика Беларусь),

³⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2024
Belarusian National Technical University, 2024

Реферат. В работе экспериментально и теоретически анализируется динамика процесса эмиссии ионов из капиллярного эмиттера, заполненного ионной жидкостью в качестве рабочего тела. Такие эмиттеры могут использоваться в энергетической системе спутников малой массы в качестве источника реактивной тяги. Экспериментально исследована зависимость тяги микродвигателя от подаваемой на него электрической мощности, что позволило определить наиболее эффективные режимы работы микродвигателя. Это представляет интерес с точки зрения повышения энергоэффективности последнего в условиях ограниченной энерговооруженности спутников малой массы. Обнаружено, что характеристика «напряжение электрического поля – тяга эмиттера» является немонотонной с ярко выраженным максимумом, что накладывает ограничения на величину электрического поля в эмиттере. Для объяснения предела интенсивности эмиссии построена диффузионно-конвективная модель движения ионов внутри капилляра. Основной идеей предложенной модели является предположение о том, что интенсивность эмиссии ионов определяется их концентрацией в устье капилляра, а скорость эмитируемых ионов выше скорости движения ионной жидкости в капилляре как сплошной среды. Причем ускорение ионов в устье эмиттера нелинейно возрастает с повышением внешних сил. Снижение концентрации ионов по мере их эмиссии должно компенсироваться за счет их диффузии внутри капилляра и конвективных потоков, скорость которых ограничена. Построенная модель анализируется численно. Для системы уравнений Навье – Стокса применена схема расщепления, предложенная Чориным. На каждом временном шаге на основе известного поля скорости, плотности и распределения концентрации делается шаг по времени для уравнений движения. Затем с учетом найденной скорости делается шаг по времени для уравнений конвективной диффузии и производится пересчет поля плотности. Созданный код позволил подтвердить возможность существования максимума массового расхода ионов, то есть тяги микродвигателя, что качественно соответствует экспериментальным данным. Определяющим фактором, от которого зависит величина максимума и его положение, является степень нелинейности коэффициента, ответственного за ускорение ионов на выходе из капилляра.

Ключевые слова: ионная жидкость, микродвигатель, диффузия ионов

Для цитирования: Математическое и натурное моделирование режимов работы капиллярного эмиттера электростатического коллоидного микродвигателя / С. В. Редько [и др.] // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. 2024. Т. 67, № 3. С. 193–208. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2023-67-3-193-208>

Адрес для переписки

Краков Михаил Самуилович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-10-11
krakov@bntu.by

Address for correspondence

Krakov Mikhail S.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Тел.: +375 17 292-10-11
krakov@bntu.by

Mathematical and Experimental Simulation of Operating Modes of Capillary Emitter of Electrostatic Colloidal Microthruster

S. V. Redko¹⁾, E. B. Chubenko¹⁾, V. P. Bondarenko¹⁾, I. V. Nikiforov²⁾,
M. S. Krakov³⁾

¹⁾Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (Minsk, Republic of Belarus),

²⁾Belarusian State University (Minsk, Republic of Belarus),

³⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. This work experimentally and theoretically analyzes the dynamics of the process of ion emission from a capillary emitter filled with an ionic liquid as a working fluid. Such emitters can be used in the energy system of low-mass satellites as a source of jet propulsion. The dependence of the thrust of a micromotor on the electrical power supplied to it was experimentally studied, which made it possible to determine the most efficient operating modes of the microthruster. This is of interest from the point of view of increasing the energy efficiency of the latter in conditions of limited power availability of low-mass satellites. It was found that the characteristic “electric field voltage – emitter thrust” is non-monotonic with a pronounced maximum, which imposes restrictions on the magnitude of the electric field in the emitter. To explain the limit of emission intensity, a diffusion-convective model of ion movement inside the capillary was constructed. The main idea of the proposed model is the assumption that the intensity of ion emission is determined by their concentration at the outlet of the capillary, and the velocity of the emitted ions is higher than the velocity of flow of the ionic liquid in the capillary as a continuous medium. Moreover, the acceleration of ions at the outlet of the emitter increases nonlinearly with increasing external forces. The decrease in the concentration of ions as they are emitted must be compensated by their diffusion inside the capillary and convective flows, the velocity of which is limited. The constructed system of equations is analyzed numerically. For the system of Navier – Stokes equations, the projection method proposed by Chorin is applied. Based on the known velocity field, density, and concentration distribution, a time step is taken for the equations of motion. Then, taking into account the found velocity, a time step is taken for the convective diffusion equations and the density field is recalculated. The created code made it possible to confirm the possibility of the existence of a maximum mass flow rate of ions, i.e., micromotor thrust, which is in qualitative agreement with the experimental data. The main factor on which the magnitude of the maximum and its position depend is the degree of nonlinearity of the coefficient responsible for the acceleration of ions at the outlet of the capillary.

Keywords: ionic fluid, microthruster, ion diffusion

For citation: Redko S. V., Chubenko E. B., Bondarenko V. P., Nikiforov I. V., Krakov M. S. (2024) Mathematical and Experimental Simulation of Operating Modes of Capillary Emitter of Electrostatic Colloidal Microthruster. *Energetika. Proc. CIS Higher Educ. Inst. and Power Eng. Assoc.* 67 (3), 193–208. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2023-67-3-193-208> (in Russian)

Введение

В последнее десятилетие на околоземные орбиты выводится большое количество спутников малой массы. По общепринятой классификации [1] такие аппараты классифицируют как микроспутники (масса от 10 до 100 кг), наноспутники (масса от 1 до 10 кг), пикоспутники (масса от 0,1 до 1 кг) и фемтоспутники (масса до 0,1 кг). Находясь на низких орбитах, эти спутники из-за трения в верхних слоях атмосферы требуют периодической коррекции орбиты, которая позволяет значительно продлить срок существования

спутников. Возможность коррекции орбиты зависит от энерговооруженности космического аппарата и энергоэффективности работы корректирующих орбиту двигателей. Последняя определяется [2] удельным импульсом I_{sp} , который равен отношению средней скорости истечения газов из двигателя V_{ef} к ускорению свободного падения:

$$I_{sp} = \frac{V_{ef}}{g_0}. \quad (1)$$

Расход рабочего тела двигателя (пропеллента) связан с удельным импульсом следующим соотношением [2]:

$$\Delta m = m_0 \left[1 - \exp \left(- \frac{\Delta V}{g_0 I_{sp}} \right) \right]. \quad (2)$$

Из соотношения (2) следует, что чем выше удельный импульс, тем меньше расход пропеллента, что решающим образом влияет на энергоэффективность корректирующего орбиту двигателя.

Для коррекции орбиты могут быть использованы двигатели различного принципа действия: разгон реактивной струи за счет сжигания топлива, высвобождение энергии сжатого газа, передача энергии электрического поля заряженным частицам, в том числе за счет эффекта Холла. Каждый из них имеет свои особенности, преимущества и недостатки. Химические двигатели обладают большой тягой, но малым удельным импульсом (до 400 c^{-1}), что ведет к повышенному расходу пропеллента и, следовательно, низкой энергоэффективности. Хранение практически значимой массы сжатого газа требует крупных прочных сосудов, способных выдерживать высокие давления, что увеличивает бесполезную инертную массу спутника. Двигатели, использующие эффект Холла, плохо масштабируются с уменьшением размеров спутников.

В последнее время для малых космических аппаратов все большее распространение получают двигатели, использующие электростатическое поле для ускорения пропеллента [4]. Электростатический коллоидный (или электрораспылительный) двигатель малой тяги можно легко масштабировать за счет агрегации группы эмиттеров и изменения их геометрии для достижения желаемых характеристик тяги. Кроме того, у электрораспыления есть потенциал для дуального применения, когда одно и то же топливо может использоваться в нескольких бортовых системах. Обычное топливо, которое может быть выброшено за счет электростатического поля, можно также сжигать в химическом двигателе, то есть с одним видом топлива можно работать в разных режимах тяги: малая тяга с высокой эффективностью или большая тяга с малой эффективностью.

Первый вариант двигательной системы с электрораспылением и ионной жидкостью в качестве рабочего тела был относительно успешно использован в миссии ST-7/LISA Pathfinder [5]. Необходимость продолжения развития этой технологии стала очевидной из-за некоторых аномалий, которые

возникли во время миссии: один двигатель малой тяги имел медленное время отклика и скачки тока, а другой двигатель малой тяги вышел из строя после 1670 ч работы.

Основные преимущества двигателей на ионных жидкостях по сравнению с двигателями на жидких металлах состоят в том, что такие источники способны генерировать пучки как положительно, так и отрицательно заряженных ионов с различной массой, в том числе в диапазоне выше 5000 атомных единиц массы (а. е. м.). Жидкометаллические источники принципиально не могут эмитировать отрицательные ионы, а масса даже очень тяжелых металлических кластерных ионов не превышает 1500 а. е. м. Рабочее напряжение при использовании ионных жидкостей будет ниже, чем при использовании жидких металлов из-за более низкого поверхностного натяжения ионных жидкостей; также отпадает необходимость даже в минимальном нагреве ионных жидкостей, без которого нельзя обойтись в случае жидких металлов и сплавов [6]. Эти преимущества особенно важны для нано-, пико- и фемтоспутников с ограниченными ресурсами бортовой энергосети.

В двигателях на ионных жидкостях эмиссия ионов происходит с вершины конуса Тейлора, образовавшегося в результате развития неустойчивости под действием электрического поля. Подача жидкости к поверхности эмиссии осуществляется с помощью системы капилляров или пористой среды. В ряде работ (например, [7]) было отмечено, что вольт-амперная характеристика двигателя может быть нестабильной. Оптическими методами в работе [7] зафиксировано, что при запуске двигателя малой тяги на поверхности эмиссии появлялись светящиеся точки. Количество точек увеличивалось с ростом тока. При некотором критическом значении наблюдались сильные колебания ионного тока. В зависимости от напряжения или уровня тока эмиссии флуктуации носили разный характер. Среди них наиболее выраженными были так называемые ступенчатые колебания с крутыми подъемами и спадами. Кроме того, были обнаружены и некоторые другие периодические колебания эмитируемого тока. Природа описанной нестабильности не до конца ясна.

Целью настоящей работы является установление экспериментальных закономерностей работы капиллярного микродвигателя и построение математической модели, которая способна объяснить как нелинейный характер вольт-амперной характеристики ионных двигателей, так и нестационарный режим их работы.

Экспериментальный анализ

Цель эксперимента – получение зависимости тяги микродвигателя от подаваемой на него электрической мощности. По данной зависимости можно определить наиболее эффективные режимы работы микродвигателя, что представляет определенный интерес с учетом ограниченной энергообеспеченности спутников малой массы.

Для проведения исследований изготовлен прототип электростатического коллоидного микродвигателя, который представлял собой ионный источник, состоящий из металлического тянущего электрода с круглым отверстием, выполняющим роль пролетной щели, фторопластового корпуса, заполненного пропеллентом – ионной жидкостью, и кварцевого цилиндрического капилляра внутренним диаметром 100 мкм, выполняющего функцию эмиттера, расположенного напротив центра пролетной щели тянущего электрода. Измерение зависимости тяги от электрической мощности проводилось в вакуумной камере с помощью лабораторных электронных весов Sartorius CP225D высокого класса точности, регулируемого высоковольтного источника питания Advanced Energy, электронной дистанционной системы управления и телеметрии. Фотография исследуемого прототипа микродвигателя на стенде в вакуумной камере приведена на рис. 1а. Для измерения тяги использовался прямой метод, при котором собранный прототип микродвигателя размещался на чаше весов, обеспечивающих точность измерений до единиц микроньютонов (рис. 1б).

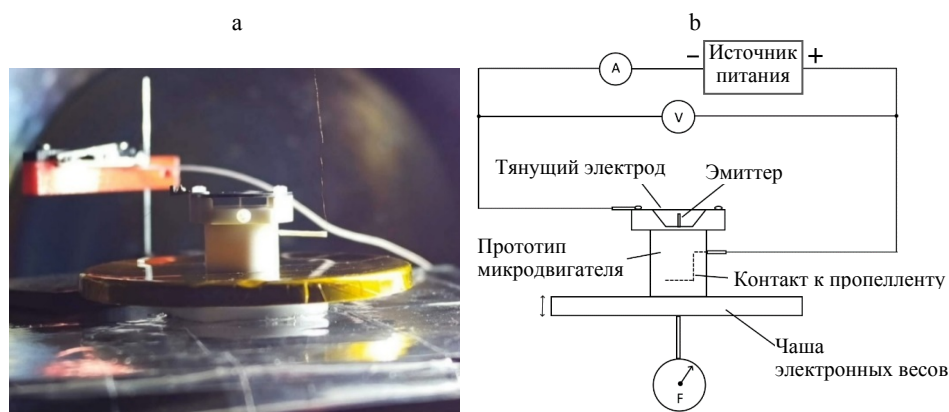


Рис. 1. Внешний вид прототипа электростатического коллоидного микродвигателя на чаше весов в вакуумной камере (а) и принципиальная схема экспериментальной установки для проведения измерений тяги (б)

Fig. 1. External view of the prototype of electrostatic colloidal microthruster on the scale in a vacuum chamber (a) and circuit diagram of experimental setup for performing thrust measurements (b)

Раз в секунду весы передавали информацию о результатах измерений в систему сбора данных на базе компьютера. Одновременно с этим системой сбора данных регистрировались значения тока и напряжения на выводах высоковольтного источника питания. Положительное смещение от источника питания было приложено к ионной жидкости, а отрицательное – к тянущему электроду. Использованный высоковольтный источник питания позволял отдельно установить ограничения по выходному току и напряжению. В установившемся режиме работы блок питания ограничивал ток, при этом напряжение на экспериментальном образце микродвигателя находилось в пределах от 2300 до 2400 В. Запуск прототипа микро-

двигателя происходил при большем напряжении, поэтому ограничение по напряжению на блоке питания было установлено 3600 В.

Зависимость тяги от подаваемой мощности (рис. 2) определялась в соответствии со следующим алгоритмом, который повторялся для каждой экспериментальной точки:

1. Установка ограничения по напряжению на блоке питания.
2. Установка ограничения по току на блоке питания.
3. Включение блока питания.
4. Ожидание около 600 с.
5. Отключение блока питания.
6. Ожидание стабилизации показаний весов (от 30 до 300 с).

Величину тяги определяли по двум показаниям весов – при включении и при выключении микродвигателя (рис. 3)

$$F = \frac{\Delta F_1 + \Delta F_2}{2}, \quad (3)$$

где $\Delta F_1 = F_{\text{откл}} - F_{\text{вкл}}$; $\Delta F_2 = F_{\text{вкл}} - F_{\text{откл}}$.

Мощность вычисляли как произведение измеренных значений тока и напряжения, подаваемых источником питания, усредненных за время включения:

$$P = IU, \quad (4)$$

где $I = \frac{\sum_{i=1}^T I_i}{T}$; $U = \frac{\sum_{i=1}^T U_i}{T}$; T – общее время работы (в секундах) прототипа микродвигателя в конкретном режиме.

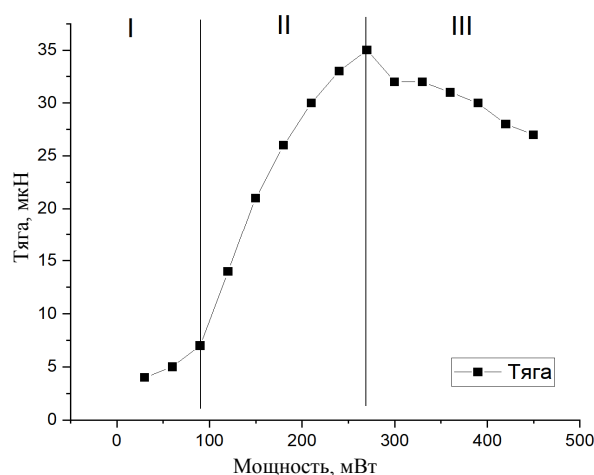


Рис. 2. Зависимость тяги прототипа микродвигателя от подаваемой источником питания мощности

Fig. 2. Thrust dependence of a microthruster prototype on the power supplied by the power supply

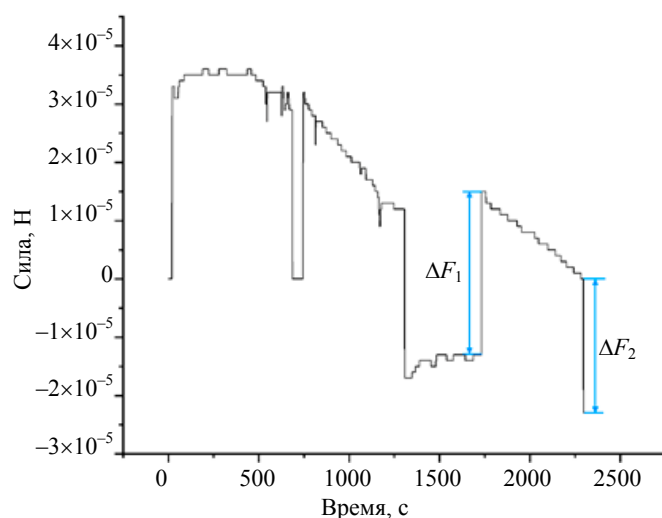


Рис. 3. Изменение показаний весов во времени в процессе работы прототипа микродвигателя с указанием метода определения тяги для одного рабочего режима, соответствующего одной точке на графике, представленном на рис. 2

Fig. 3. Changes in scale readings over time during operation of the microthruster prototype, indicating the method for determining thrust for one operating mode, corresponding to one point on the graph shown in Fig.2

Из полученной зависимости следует, что у прототипа микродвигателя с полым капилляром есть узкий диапазон, в котором развиваемая тяга пропорциональна подаваемой мощности (область II на рис. 2). За его пределами эффективность работы эмиттера с полым капилляром существенно ниже. Предположительно, в области I происходят лишь перемещение заряженных компонентов жидкости и соответствующее перераспределение заряда без какой-либо заметной ионизации. Так как в составе стенда отсутствует компенсатор заряда, можно наблюдать некое отличное от нуля значение тяги на грани погрешности измерений. В области III наступает ограничение по току и снижение тяги. При работе в этом режиме отмечалось яркое свечение в области между эмиттером и тянущим электродом, что могло быть обусловлено бомбардировкой тянущего электрода ионами пропеллента за счет настолько сильного искривления их траекторий движения, что они переставали в полном объеме покидать микродвигатель через пролетную щель тянущего электрода. Для более детального объяснения наблюдаемых феноменов разработана математическая модель работы коллоидного микродвигателя с цилиндрическим полым капилляром, выполняющим роль эмиттера, в котором роль пропеллента выполняет ионная жидкость.

Система определяющих уравнений

Ионная жидкость представляет собой совокупность ионов двух сортов с разной массой m^+ и m^- , имеющих равные заряды q^+ и q^- и образовавшихся-

ся в результате диссоциации сложных органических молекул. Ионные жидкости принципиально отличаются от жидких металлов массой ионов и соответственно величиной коэффициента диффузии. Если в металлах коэффициент диффузии имеет порядок $D \sim 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ [8], то в ионных жидкостях эта величина на три порядка меньше: $D \sim 10^{-11} \text{ м}^2/\text{с}$ [9]. Это означает, что и подвижность ионов в ионных жидкостях также на три порядка меньше. Поэтому можно предположить, что в процессе движения ионов к выходу из эмиттера (то есть к плоскости эмиссии) диффузионные процессы могут играть определяющую роль, так как из-за низкой подвижности ионов их концентрация на выходе из капилляра поддерживается именно за счет диффузии из внутреннего объема капилляра.

Подвижность ионов $b = u/F$, определяемая как отношение скорости иона к силе, действующей на него, связана с коэффициентом диффузии соотношением Эйнштейна $b = D/kT$. По аналогии с газами, для которых коэффициент диффузии практически обратно пропорционален молекулярной массе, предположим, что и для этих двух сортов ионов коэффициент диффузии также обратно пропорционален массе ионов. Тогда для коэффициентов диффузии положительных ионов D^+ и отрицательных ионов D^- должно выполняться соотношение:

$$D^+ m^+ = D^- m^- . \quad (5)$$

Пусть n^+ и n^- – количество положительных и отрицательных ионов в жидкости. С учетом соотношения (1) и конвективного переноса уравнения диффузии принимают вид:

$$\frac{\partial n^+}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) n^+ = D^+ \Delta n^+ ; \quad (6)$$

$$\frac{\partial n^-}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) n^- = D^- \Delta n^- . \quad (7)$$

При этом должно выполняться уравнение неразрывности, которое с учетом выражения для плотности $\rho = m^+ n^+ + m^- n^-$ принимает вид

$$\nabla \cdot \left[(m^+ n^+ + m^- n^-) \vec{u} \right] = 0. \quad (8)$$

Мы рассматриваем ионную жидкость как сплошную среду, движение которой описывается уравнением Навье – Стокса

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \vec{u}. \quad (9)$$

В качестве модели капилляра, использованного в эксперименте, рассмотрим двумерную прямоугольную полость, заполненную ионной жидкостью и находящуюся в электрическом поле, имеющем только компоненту $E = E_x$ (рис. 4). Границы полости $y = 0$ и $y = H$ твердые, и на них выполня-

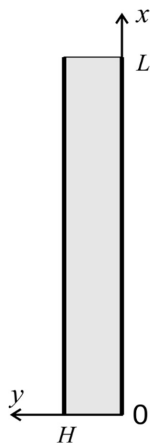


Рис. 4. Двумерная модель капиллярного эмиттера

Fig. 4. Two-dimensional model of a capillary emitter

ются условия прилипания для скорости и непроницаемости для обоих типов ионов. Количество ионов в единице объема на входе в капилляр $x = 0$ считаем равным и постоянным. На границе $x = L$ ионы одного типа эмитируются во внешнюю среду. Для определенности считаем, что эмитируются положительные ионы. Не вдаваясь в детали причин эмиссии ионов, структуру и размеры конуса Тейлора, предполагаем, что плотность потока эмитируемых ионов есть величина, пропорциональная концентрации ионов на выходе из канала.

Жидкость движется в канале под действием внешнего электрического поля. Можно предположить, что скорость жидкости на выходе из канала пропорциональна этому действию. Тогда граничное условие для скорости зададим в виде:

$$u_x = A; \quad x = L, \quad (10)$$

где параметр A отражает влияние внешнего электрического поля.

Более сложным является определение граничного условия для концентрации на выходе из канала. Плотность потока положительных ионов, движущихся вместе с потоком вдоль канала, определяется соотношением

$$-D^+ \frac{\partial n^+}{\partial x} + u_x n^+.$$

Поток эмитируемых ионов определяется их концентрацией на выходе из канала и скоростью ионов на выходе u_x^i . Тогда плотность потока эмитируемых ионов равна

$$\vec{j}_x = u_x^i n^+. \quad (11)$$

Очевидно, что при приближении к устью канала под воздействием внешнего поля скорость ионов u_x^i возрастает и превышает скорость потока u_x . Так как величина u_x^i зависит от внешнего поля, то есть от коэффициента A , предположим, что эта зависимость носит нелинейный характер, и степень ускорения ионов возрастает с ростом коэффициента A . Этому предположению удовлетворяет, например, выбранная нами зависимость

$$u_x^i = k(A)A, \quad (12)$$

где коэффициент $k(A)$ отражает степень нелинейности. Исследованный вид зависимости $k(A)$ будет представлен ниже.

Исходя из сделанных предположений, граничные условия для концентрации ионов и скорости движения жидкости в капилляре можно сформулировать следующим образом:

1. В начальный момент времени $t = 0$ ионная жидкость является электрически нейтральной, то есть количество положительных и отрицательных ионов одинаково, жидкость неподвижна:

$$n^+(x, y, 0) = n^-(x, y, 0) = n_0; \quad \vec{u}(x, y, 0) = 0. \quad (13)$$

2. На входе в канал поддерживается начальная концентрация ионов, задано свободное граничное условие для скорости, скорость направлена вдоль плоскости капилляра:

$$n^+(0, y, t) = n^-(0, y, t) = n_0; \quad \left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad u_y(0, y, t) = 0. \quad (14)$$

3. Твердые стенки канала являются непроницаемыми, то есть поток массы сквозь них равен нулю, на них выполняется условие прилипания:

$$\left. \frac{\partial n^+}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial n^-}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial n^+}{\partial y} \right|_{y=H} = \left. \frac{\partial n^-}{\partial y} \right|_{y=H} = 0; \quad (15)$$

$$u_x(x, 0, t) = u_y(x, 0, t) = u_x(x, H, t) = u_y(x, H, t) = 0. \quad (16)$$

4. На выходе из канала конвективно-диффузионный поток массы положительных ионов равен эмитируемому потоку, описываемому выражением (11), поток отрицательных ионов отсутствует, а скорость описывается уравнением (10):

$$\left(-D^+ \frac{\partial n^+}{\partial x} + An^+ \right)_{x=L} = k(A)An^+; \quad \left. \frac{\partial n^-}{\partial x} \right|_{x=L} = 0,$$

или

$$-D^+ \frac{\partial n^+}{\partial x} = [k(A) - 1]An^+; \quad \frac{\partial n^-}{\partial x} = 0, \quad x = L. \quad (17)$$

Используя в качестве масштабов для координат ширину канала H , для времени H^2/D , для скорости D/H , для давления $\rho D^2/H^2$, можно записать полученную выше систему уравнений и граничных условий в безразмерном виде (все переменные в уравнениях, приведенных ниже, безразмерные):

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + \text{Sc} \Delta \vec{u}; \quad (18)$$

$$\nabla(\rho\vec{u}) = 0; \quad (19)$$

$$\frac{\partial n^+}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)n^+ = \Delta n^+; \quad (20)$$

$$\frac{\partial n^-}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)n^- = \Delta n^-, \quad (21)$$

где безразмерная плотность $\rho = \frac{m^+n^+ + m^-n^-}{\rho_0}$, $\rho_0 = m^+n_0^+ + m^-n_0^-$, $Sc = \nu/D$ –

число Шмидта. Начальное и граничные условия имеют вид:

$$t = 0: \quad n^+(x, y, 0) = n^-(x, y, 0) = n_0, \quad \vec{u}(x, y, 0) = 0; \quad (22)$$

$$x = 0: \quad n^+(0, y, t) = n^-(0, y, t) = n_0, \quad \left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad u_y(0, y, t) = 0; \quad (23)$$

$$y = 0, y = H: \quad \left. \frac{\partial n^+}{\partial x} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial n^-}{\partial x} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial n^+}{\partial x} \right|_{y=H} = \left. \frac{\partial n^-}{\partial x} \right|_{y=H} = 0; \quad (24)$$

$$u_x(x, 0, t) = u_y(x, 0, t) = u_x(x, H, t) = u_y(x, H, t) = 0; \quad (25)$$

$$x = L: \quad \frac{\partial n^+}{\partial x} + u_x n^+ = k(N_E)N_E n^+, \quad \frac{\partial n^-}{\partial x} = 0; \quad (26)$$

$$u_x|_{x=L} = N_E, \quad (27)$$

где $N_E = AH/D$ – безразмерный комплекс, характеризующий отношение потока ионов, вызванного внешними силами (электрическое поле) к диффузионному потоку ионов. Далее для коэффициента $k(N_E)$, отражающего степень ускорения ионов на выходе из канала под действием внешнего поля, нами используется зависимость $k(N_E) = 1,5(1 + N_E^2/a)$. Величина коэффициента a определяет степень нелинейности.

Таким образом, на тягу коллоидного микродвигателя одновременно влияют два фактора. С одной стороны, скорость жидкости в канале с ростом внешнего поля увеличивается, что должно привести к росту тяги. С другой стороны, из-за ускорения ионов в устье канала их концентрация на выходе уменьшается, что может замедлить рост тяги или даже уменьшить ее. Анализ сформулированной системы уравнений с точки зрения баланса этих факторов и их влияния на тягу коллоидного микродвигателя является предметом численного моделирования.

Численное моделирование

Разностная схема. Для приближенного решения многомерных нестационарных задач математической физики широко используются различные классы схем расщепления. Для системы уравнений Навье – Стокса применение схем расщепления (наиболее известной из которых является схема Чорина [10]) обосновано в [11, 12]. Алгоритм метода состоит из последовательного повторения следующих операций на каждом временном шаге:

- на основе известного поля скорости, плотности и распределения концентрации делается шаг по времени для уравнений движения;
- с учетом найденной скорости делается шаг по времени для уравнений конвективной диффузии;
- производится пересчет поля плотности.

Особенности авторского кода и его верификация. Код, реализующий разностную схему, написан на языке C++ и использовал разнесенные («шахматные») сетки узлов [13]. Для выбора шага сетки и шага по времени были проведены тестовые вычисления для следующих параметров задачи (все величины безразмерные): $H = L = 1$; $Sc = 10$; $a = 1500$. На выходе из канала рассчитывался безразмерный массовый расход эмитируемых ионов

$$J = \frac{m^+}{m^+ + m^-} \int_0^1 u_x(L) n^+(y, L) dy. \quad (28)$$

Множитель $\frac{m^+}{m^+ + m^-}$ учитывает тот факт, что тяга двигателя определяется не только количеством эмитируемых ионов, но и их массой.

Так как параметр N_E определяет также и концентрацию ионов на выходе из канала n_L^+ , эти две величины использовались в качестве критерия оценки достоверности созданного кода и определения шага по времени и дробности сетки, обеспечивающих приемлемую точность.

Шаг по времени выбирался из требования обеспечения устойчивости численного счета и уменьшался до тех пор, пока величина J на данной сетке не переставала изменяться. В зависимости от сетки величина шага по времени лежала в диапазоне от $5 \cdot 10^{-7}$ до $2 \cdot 10^{-6}$.

В табл. 1 представлены значения массового расхода эмитируемых положительных ионов J и их концентрация n_L^+ на выходе из канала на центральной линии симметрии для различных сеток и величин параметра N_E для различного числа шагов N_x прямоугольной сетки вдоль оси x и N_y вдоль оси y . Все расчеты выполнены для канала длиной $L = 1$ и шириной $H = 1$ и жидкости с числом Шмидта $Sc = 10$.

Видно, что наибольшее влияние на точность полученных результатов имеет количество шагов сетки вдоль оси x .

Таблица 1

**Значения массового расхода эмитируемых положительных ионов
 и их концентрация при различных параметрах моделирования**

**Mass flow rates of emitted positive ions and their concentration
 at various simulation parameters**

	$N_x = 120; N_y = 40$		$N_x = 120; N_y = 60$		$N_x = 180; N_y = 40$		$N_x = 240; N_y = 40$		$N_x = 240; N_y = 60$	
N_E	J	n_L^+	J	n_L^+	J	n_L^+	J	n_L^+	J	n_L^+
2	1,096	0,6450	1,079	0,6437	1,083	0,6896	1,079	0,6874	1,0811	0,6880
4	1,998	0,6979	1,992	0,6884	1,994	0,6430	2,003	0,6447	1,996	0,6428
8	3,711	0,6140	3,715	0,6147	3,727	0,6128	3,736	0,6125	3,739	0,6130
12	5,149	0,5793	5,160	0,5797	5,184	0,5773	5,203	0,5764	5,205	0,5767
16	6,204	0,5349	6,807	0,5353	6,270	0,5319	6,301	0,5301	6,306	0,5307
20	6,861	0,4855	6,866	0,4858	6,956	0,4807	7,004	0,4783	7,008	0,4786
25	7,188	0,4237	7,192	0,424	7,321	0,4164	7,390	0,4126	7,398	0,4130
30	7,111	0,3677	7,113	0,3678	7,274	0,3573	7,359	0,3520	7,365	0,3523
35	6,788	0,3204	6,791	0,3206	6,972	0,3069	7,069	0,3000	7,074	0,3002
40	6,351	0,2827	6,353	0,2828	6,545	0,2661	6,649	0,2574	6,652	0,2576
45	5,882	0,2537	5,884	0,2538	6,078	0,2340	6,184	0,2337	6,206	0,2241

Все результаты, представленные ниже, получены на сетке $N_x \times N_y = 240 \times 60$, так как дальнейшее увеличение количества шагов приводит к изменению значения полученных величин в четвертой значащей цифре и не имеет дальнейшего смысла.

Результаты. На рис. 5 показано, как изменяется концентрация положительных ионов на выходе из канала. Как видно, при включении внешнего воздействия концентрация быстро снижается до некоего установившегося значения. Как скорость снижения концентрации ионов на выходе, так и величина установившейся концентрации зависят от критерия N_E . С ростом N_E время установления концентрации и ее установившаяся величина n_{\min}^+ снижаются. На рис. 6 показано изменение установившейся концентрации в зависимости от критерия N_E . Как видно, с ростом критерия N_E снижение концентрации ионов оказывается весьма значительным, что может привести к снижению потока эмитируемых ионов, то есть и тяги ионного микродвигателя.

Интересным является представленное на рис. 7 распределение концентрации ионов в плоскости симметрии вдоль оси канала в зависимости от параметра N_E . При малых значениях N_E ускорение ионов в устье капилляра невелико и профиль концентрации близок к линейному, а степень обеднения потока ионами также мала, то есть минимальная концентрация несущественно меньше единицы. Соответственно градиент концентрации также невелик и вклад диффузионной подпитки в эмиссию ионов невелик. С ростом N_E в силу нелинейного характера зависимости $k(N_E)$ дефицит ионов на выходе из капиллярного эмиттера из-за резкого увеличения скорости эмиссии должен восполняться за счет диффузионных процессов. Последнее приводит к образованию узкой зоны пониженной концентрации положи-

тельных ионов вблизи устья эмиттера и значительному градиенту концентрации в этой зоне (кривая 3 на рис. 7). Отметим, что последнее требует использовать достаточно мелкую сетку вдоль капилляра.

Особый интерес вызывает зависимость массового расхода эмитируемых ионов от параметра N_E , характер зависимости которой можно сравнить с экспериментальными данными по развиваемой тяге. Эта зависимость показана на рис. 8.

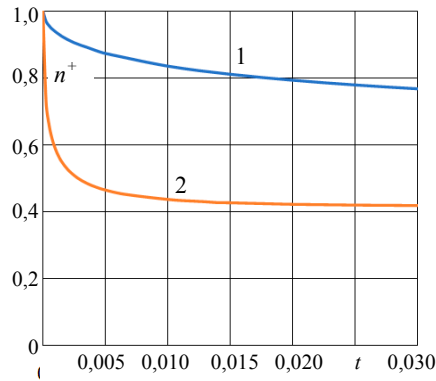


Рис. 5. Изменение концентрации положительных ионов на выходе из капилляра во времени:

1 – $N_E = 4$; 2 – 25; $L = 1$; $Sc = 10$; $a = 1500$

Fig. 5. Change in concentration of positive ions at the output from a capillary over time:

1 – $N_E = 4$; 2 – 25; $L = 1$; $Sc = 10$; $a = 1500$

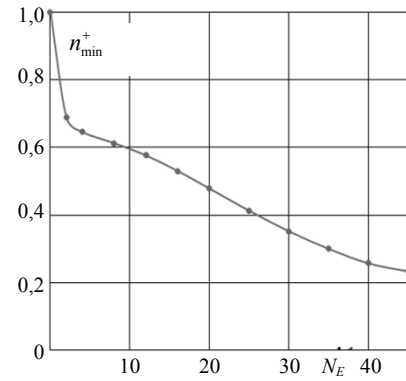


Рис. 6. Зависимость установившейся концентрации на выходе из капилляра от критерия N_E :

$L = 1$; $Sc = 10$; $a = 1500$

Fig. 6. Dependence of steady-state concentration at the outlet from a capillary on the criterion N_E :

$L = 1$; $Sc = 10$; $a = 1500$

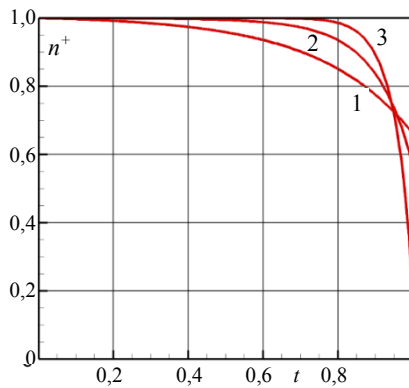


Рис. 7. Распределение концентрации положительных ионов вдоль оси капилляра:

1 – $N_E = 4$; 2 – 12; 3 – 45;
 $L = 1$; $Sc = 10$; $a = 1500$

Fig. 7. Distribution of the concentration of positive ions along the capillary axis:

1 – $N_E = 4$; 2 – 12; 3 – 45;
 $L = 1$; $Sc = 10$; $a = 1500$

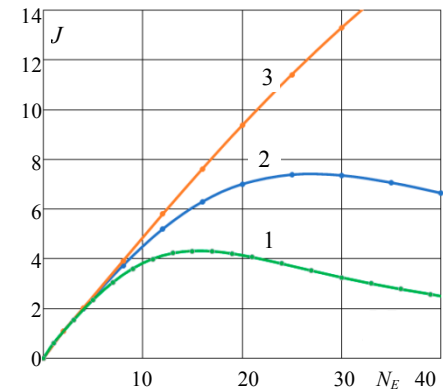


Рис. 8. Зависимость тяги капиллярного микродвигателя от параметра N_E (подаваемой электрической мощности):

1 – $a = 500$; 2 – 1500; 3 – 15000; $L = 1$; $Sc = 10$

Fig. 8. Dependence of capillary micromotor thrust on N_E parameter (supplied electrical power): 1 – $a = 500$; 2 – 1500; 3 – 15000;

$L = 1$; $Sc = 10$

Видно, что при линейном характере зависимости $k(N_E)$ (кривая 3) тяга микродвигателя также почти линейно возрастает с увеличением подаваемой мощности. Повышение степени нелинейности приводит к повышенному ускорению ионов при приближении к устью капиллярного эмиттера и, как следствие, уменьшению их концентрации. В результате суммарный поток эмитируемых в единицу времени ионов также снижается. Кривая 2 на рис. 8 по характеру практически полностью соответствует экспериментальным данным, представленным на рис. 3. Увеличение степени нелинейности коэффициента $k(N_E)$ (кривая 1) приводит к уменьшению максимального значения тяги и сдвигает максимум влево.

Отметим, что также проводился анализ влияния на тягу свойств ионной жидкости, то есть числа Шмидта. Обнаружено, что при значениях числа Шмидта $Sc = 10, 100$ и 1000 величина J отличается в третьей значащей цифре, но время счета возрастает пропорционально величине Sc . Поэтому выше все данные представлены для значения числа Шмидта $Sc = 10$.

ВЫВОДЫ

1. Проведены эксперименты и построена математическая модель, описывающая работу капиллярного микродвигателя с ионной жидкостью в качестве рабочего тела.

2. Экспериментально обнаружено, что с ростом подаваемой на двигатель электрической мощности тяга микродвигателя возрастает только до определенной величины, а затем начинает снижаться.

3. В основе построенной математической модели лежит предположение, что поток эмитируемых ионов обеспечивается как течением ионной жидкости в капилляре, так и диффузионными процессами в нем. Приближаясь к выходу из эмиттера, ионы ускоряются под действием внешнего поля и быстро покидают капилляр, в результате их количество не успевает восполняться течением жидкости и концентрация на выходе снижается. Под действием возникшего градиента концентрации дефицит ионов восполняется за счет диффузионных процессов. Определяющим является нелинейный характер увеличения скорости ионов на выходе из эмиттера от внешних сил. Показано, что именно эта нелинейность может привести к немонотонному характеру зависимости тяги микродвигателя от подаваемой мощности.

Работа выполнена в рамках задания 4.1.2 ГПНИ Республики Беларусь «Многофункциональные и композиционные материалы».

ЛИТЕРАТУРА

1. Konecny, G. Small Satellites-A Tool for Earth Observation [Electronic Resource] / G. Konecny // XXth ISPRS Congress Commission IV – Istanbul, Turkey-2004. Mode of access: <https://www.isprs.org/proceedings/xxxv/congress/comm4/papers/428.pdf>.
2. Гришин, С. Д. Электрические ракетные двигатели космических аппаратов / С. Д. Гришин, Л. В. Лесков. М.: Машиностроение, 1989. 216 с.
3. Berg, S. Ignition Evaluation of Monopropellant Blends of HAN and Imidazole-Based Ionic Liquid fuels / S. Berg, J. Rovey // 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. AIAA, 2012. Art. No 974. <https://doi.org/10.2514/6.2012-974>.
4. Introduction to Focused Ion Beams: Instrumentation, Theory, Techniques and Practice / eds. L. A. Giannuzzi, F. A. Stevie. NY: Springer, 2005. 358 p. <https://doi.org/10.1007/b101190>.

5. Experimental Results From the ST7 Mission on LISA Pathfinder / G. Anderson [et al.] // *Physical Review D*. 2018. Vol. 98, No 10. P. 102005. <https://doi.org/10.1103/physrevd.98.102005>.
6. Ionic Liquids. Physicochemical Properties / S. Zhang [et al.]. Amsterdam: Elsevier, 2009. 520 p.
7. Effects of Non-Uniform Operation of Emission Sites on Characteristics of a Porous Electropray Thruster / C. Chen [et al.] // *Acta Astronautica*. 2021. Vol. 178. P. 192–202. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.09.002>.
8. Грабовский, Р. И. Курс физики / Р. И. Грабовский. 11-е изд., стер. СПб.: Лань, 2009. 608 с.
9. Диффузия в ионных жидкостях. Исследование методом классической молекулярной динамики [Электронный ресурс] / Г. Ивановскис [и др.] // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2013. Т. 14, вып. 2. С. 1–7. Режим доступа: www.chemphys.edu.ru/pdf/2013-04-29-012.pdf.
10. Chorin, A. J. A numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems / A. J. Chorin // *Journal of Computational Physics*. 1967. Vol. 2, No 1. P. 12–26. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(67\)90037-x](https://doi.org/10.1016/0021-9991(67)90037-x).
11. Rannacher, R. On Chorin's Projection Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations / R. Rannacher // *Navier-Stokes Equations II – Theory and Numerical Methods* / eds: J. G. Heywood [et al.]. Berlin: Springer, 1992. 1530. P. 167–183. (Lecture Notes in Mathematics, vol. 1530). <https://doi.org/10.1007/BFb0090341>.
12. Harlow, F. H. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with a Free Surface / F. H. Harlow, J. E. Welch // *Physics of Fluids*. 1965. Vol. 8. P. 2182–2189. <https://doi.org/10.1063/1.1761178>.

Поступила 09.01.2024 Подписана в печать 12.03.2024 Опубликовано онлайн 31.05.2024

REFERENCES

1. Konecny G. (2004) Small Satellites-A Tool for Earth Observation. *XXth ISPRS Congress Commission IV – Istanbul, Turkey-2004*. Available at: <https://www.isprs.org/proceedings/xxxv/congress/comm4/papers/428.pdf>.
2. Grishin S. D., Leskov L. V. (1989) *Electric Rocket Engines for Spacecraft*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 216 (in Russian).
3. Berg S., Rovey J. (2012) Ignition evaluation of monopropellant blends of HAN and imidazole-based ionic liquid fuels. *50th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*. AIAA, 974. <https://doi.org/10.2514/6.2012-974>.
4. Giannuzzi L. A., Stevie F. A. (eds) *Introduction to Focused Ion Beams: Instrumentation, Theory, Techniques and Practice*. NY, Springer, 2005. 358. <https://doi.org/10.1007/b101190>.
5. Anderson G., Anderson J., Anderson M., Aveni G., Bame D., Barela P., Blackman K., Carmain A., Chen L., Cherng M., Clark S., Connally M., Connolly W., Conroy D., Cooper M., Cutler C., D'Agostino J., Demmons N., Dorantes E. (et al.) (2018) Experimental Results from the ST7 Mission on LISA Pathfinder. *Physical Review D*, 98 (10), 102005. <https://doi.org/10.1103/physrevd.98.102005>.
6. Lu X., Zhou Q., Li X., Zhang X., Liquids S. L. (2009) *Physicochemical Properties*. Amsterdam, Elsevier. 520.
7. Chen C., Chen M., Fan W., Zhou H. (2021) Effects of Non-Uniform Operation of Emission Sites on Characteristics of a Porous Electropray Thruster. *Acta Astronautica*, 178, 192–202. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.09.002>.
8. Grabovsky R. I. (2009) *Physics course*. 11th ed. Saint Petersburg, Lan' Publ. 2009. 608 (in Russian).
9. Ivanovskis G., Norman G. E., Stegailov V. V., Usmanova D. R. (2013) Diffusion in Ionic Liquids. *Classical Molecular Dynamics Research. Physicochemical Kinetics in Gas Dynamics*, 14 (2), 1–7. Available at: www.chemphys.edu.ru/pdf/2013-04-29-012.pdf (in Russian).
10. Chorin A. J. (1967) A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems. *Journal of Computational Physics*, 2 (1), 12–26. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(67\)90037-x](https://doi.org/10.1016/0021-9991(67)90037-x).
11. Rannacher R. (1992). On Chorin's Projection Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations. Heywood J. G., Masuda K., Rautmann R., Solonnikov V. A. (eds) *The Navier-Stokes Equations II – Theory and Numerical Methods. Lecture Notes in Mathematics, vol 1530*. Springer, Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/BFb0090341>.
12. Harlow, F. H., Welch J. E. (1965) Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with a Free Surface. *Physics of Fluids*, 8, 2182–2189. <https://doi.org/10.1063/1.1761178>.

Received: 09 January 2024

Accepted: 12 March 2024

Published online: 31 May 2024