

АЛГОРИТМ ПОПУТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ НАНОСПУТНИКА ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ПОЛНОГО ЭЛЕКТРОННОГО СОДЕРЖАНИЯ В ИОНОСФЕРЕ НА ОСНОВЕ РЕТРАНСЛЯЦИИ НАВИГАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ ГНСС GPS

Е. А. КАПЛЯРЧУК¹, А. С. ШАПКИН²¹ Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
(г. Минск, Беларусь)² Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси
(г. Минск, Беларусь)

E-mail: ek.genia13@gmail.com

Аннотация. Приведен алгоритм оценивания орбитальных параметров наноспутника-ретранслятора в ходе измерений полного электронного содержания (ПЭС) в ионосфере на основе ретрансляции сигналов GPS на частоты 150/400 МГц. Алгоритм предполагает многократную оценку декартовых координат наноспутника-ретранслятора суммарно-разностным методом и их накопление на интервале наблюдения, определение угла наклона орбитальной плоскости и долготы восходящего узла методом наименьших квадратов, с последующим последовательным оцениванием большой полуоси, эксцентриситета, аргумента перигея и времени его прохождения.

Abstract. An algorithm for estimating the orbital parameters of a nanosatellite repeater during measurements of the total electron content (TEC) in the ionosphere based on the retransmission of GPS signals at frequencies of 150/400 MHz is presented. The algorithm involves multiple estimates of the Cartesian coordinates of the nanosatellite repeater using the sum-difference method and their accumulation over the observation interval, determination of the inclination angle of the orbital plane and the longitude of the ascending node using the least-squares method, followed by sequential estimation of the major semiaxis, eccentricity, argument of perigee and the time of its passage.

Введение

Оценивание полного электронного содержания (ПЭС) и последующее восстановление пространственного распределения электронной концентрации в ионосфере имеет важной значение для теории и практики [1,2]. В [3,4] предложен способ оценивания ПЭС на основе ретрансляции навигационных сигналов глобальной навигационной спутниковой системы GPS с использованием наноспутника-ретранслятора (НР). Минимальный вариант способа предусматривает ретрансляцию сигналов GPS на частоте $f_1=1575,42$ МГц на две частоты $f_{p1}=150$ МГц и $f_{p1}=400$ МГц. Прием ретранслированных сигналов осуществляется одним или несколькими наземными приемными пунктами (ПП), в качестве которых предложено использовать приемные станции спутниковой системы точного позиционирования (ССТП) Республики Беларусь с дополнительным приемным каналом.

При принятому наземным приемным сигналу по каждому видимому навигационному спутнику (НС) GPS измеряются суммарные дальности $\hat{d}_{f_1, f_{p1(2)}}$ и их разности. На основе разностей реализуется измерение полного электронного содержания $\overline{TEC}^{(II)}$ на трассе НР-ПП.

Орбитальные параметры НР необходимы для прогнозирования моментов входа НР в зону прямой видимости с ПП и определения опорных параметров обработки принимаемого ПП сигнала: дальностей между НС-НР и НР-ПП и производных указанных дальностей. Эти параметры желательно осуществлять без привлечения внешних источников непосредственно по ретранслированному НР навигационному сигналу.

Цель статьи – обоснование алгоритма оценки координат и параметров движения наноспутника-ретранслятора сигналов GPS при проведении измерений ПЭС.

Общая структура алгоритма приведена на рисунке 1.



Рис. 1. Последовательность оценивания орбитальных параметров

Для единичных оценок координат НР доступны признаки видимости $V_{n,k} = \overline{0;1}$ n -го навигационного спутника GPS одновременно с НР и k -го ППП и оценки $\hat{\mathbf{d}}_{f_1, f_{p1(2)}}^{(n,k)}$ суммарных дальностей « n -й навигационный спутник GPS – наноспутник-ретранслятор – k -й приемный пункт», измеренные по ретранслированным на частоты $f_{p1(2)}$ навигационным сигналам GPS. Индексы навигационных спутников $n = \overline{1, N}$, где N - общее число НС в ГНСС GPS, индексы приемных пунктов $k = \overline{1, K}$. Число видимых НС для k -го ПП (видимых с учетом кривизны Земли и диаграммы направленности приемной антенны бортового ретранслятора) составляет $N_{GPS_k} = \sum_{n=1}^N V_{n,k}$, так что общее число единичных измерений суммарных дальностей составляет $L = \sum_{k=1}^K N_{GPS_k}$. Орбиту НР полагаем достаточно высокой (800...1000 км), при этом величиной ПЭС на трассах «НС-НР» можно пренебречь.

Ввиду движения НС и НР по заданным орбитам и ППП в соответствии с вращением Земли наиболее удобно использовать неподвижную декартовую геоцентрическую систему координат. Ось Oz этой системы координат направлена на географический северный полюс, ось Ox лежит в экваториальной плоскости и направлена на фиксированную точку на небесной сфере, причем угол между Гринвичским меридианом и осью Ox неподвижной системы координат известен, ось Oy дополняет систему координат до правой.

Для оценивания орбитальных параметров скорректируем измеренные суммарные дальности с учетом результатов измерения ПЭС на трассах « n -й наноспутник-ретранслятор - k -й ПП»:

$$\tilde{d}_{n,k} = \hat{d}_{f_1, f_{p1}}^{(n,k)} - \frac{A \cdot \overline{TEC}_k^{(II)}}{f_{p1}^2}, \quad (1)$$

где $\overline{TEC}_k^{(II)}$ - результаты измерения ПЭС на трассах «НР - k -й ПП» с учетом усреднения по всем видимым с этого ППП навигационным спутникам.

Оценивание декартовых координат наноспутника

Полагая ошибки оценивания скорректированных суммарных дальностей $\tilde{d}_{n,k}$ гауссовскими с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями $\sigma_{n,k}^2$ запишем логарифм функции правдоподобия в виде

$$\Lambda(x_{НР}, y_{НР}, z_{НР}) = - \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{n=1 \\ V_{n,k}=1}}^N \frac{[\tilde{d}_{n,k} - d_{n,k}(x_{НР}, y_{НР}, z_{НР})]^2}{\sigma_{n,k}^2}, \quad (2)$$

где

$$d_{n,k}(x_{\text{нр}}, y_{\text{нр}}, z_{\text{нр}}) = \sqrt{(x_n - x_{\text{нр}})^2 + (y_n - y_{\text{нр}})^2 + (z_n - z_{\text{нр}})^2} + \sqrt{(x_{\text{ппк}} - x_{\text{нр}})^2 + (y_{\text{ппк}} - y_{\text{нр}})^2 + (z_{\text{ппк}} - z_{\text{нр}})^2} \quad (3)$$

- истинная суммарная дальность « n -й НС -НР - k -й ПП» на момент измерения; (x_n, y_n, z_n) - декартовы координаты n -го НС; $(x_{\text{ппк}}, y_{\text{ппк}}, z_{\text{ппк}})$ - декартовы координаты ПП.

Максимально-правдоподобная оценка вектора координат НР по всем измерениям:

$$(\hat{x}_{\text{нр}}, \hat{y}_{\text{нр}}, \hat{z}_{\text{нр}})^T = \arg \max_{x_{\text{нр}}, y_{\text{нр}}, z_{\text{нр}}} \Lambda(x_{\text{нр}}, y_{\text{нр}}, z_{\text{нр}}), \quad (4)$$

с корреляционной матрицей ошибок оценивания в декартовых координатах вида [5]

$$\mathbf{R} = (\mathbf{H}^T \Phi^{-1} \mathbf{H})^{-1}, \quad (5)$$

где Φ - диагональная матрица дисперсий измерения всех суммарных дальностей размером $L \times L$ с элементами на главной диагонали $\sigma_{n(\ell),k(\ell)}^2$, $\ell = \overline{1, L}$ в соответствии с порядком индексации и признаками видимости; $n(\ell), k(\ell)$ - индексы НС и ПП, соответствующие ℓ -ой измеренной дальности; \mathbf{H} - матрица линеаризации вида

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial d_{n(\ell),k(\ell)}(x_{\text{нр}}, y_{\text{нр}}, z_{\text{нр}})}{\partial x_{\text{нр}}} & \frac{\partial d_{n(\ell),k(\ell)}(x_{\text{нр}}, y_{\text{нр}}, z_{\text{нр}})}{\partial y_{\text{нр}}} & \frac{\partial d_{n(\ell),k(\ell)}(x_{\text{нр}}, y_{\text{нр}}, z_{\text{нр}})}{\partial z_{\text{нр}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial d_{n(L),k(L)}(x_{\text{нр}}, y_{\text{нр}}, z_{\text{нр}})}{\partial x_{\text{нр}}} & \frac{\partial d_{n(L),k(L)}(x_{\text{нр}}, y_{\text{нр}}, z_{\text{нр}})}{\partial y_{\text{нр}}} & \frac{\partial d_{n(L),k(L)}(x_{\text{нр}}, y_{\text{нр}}, z_{\text{нр}})}{\partial z_{\text{нр}}} \end{pmatrix}.$$

Оценивание орбитальных параметров наноспутника-ретранслятора

Оценивание ОП проводится для модели движения НР по невозмущенной эллиптической орбите [6-8]. Центр Земли совпадает с одним из фокусов эллипса. Такая орбита полностью описывается шестью орбитальными параметрами (рисунок 2) [8]: углом наклона орбиты γ ; долготой восходящего узла Ω ; апогеем a ; эксцентриситетом e , аргументом перигентра ω и временем t_0 прохождения перигентра (или истинной аномалией в заданный момент времени) [10]. Система координат $Oxuz$ – неподвижная геоцентрическая, плоскость $хуз$ совпадает с экватором, ось Oz направлена на северный полюс, Ox – в направлении Гринвичского меридиана, например, в момент начала текущих суток (UTC = 0), ось Oy дополняет систему до правой.

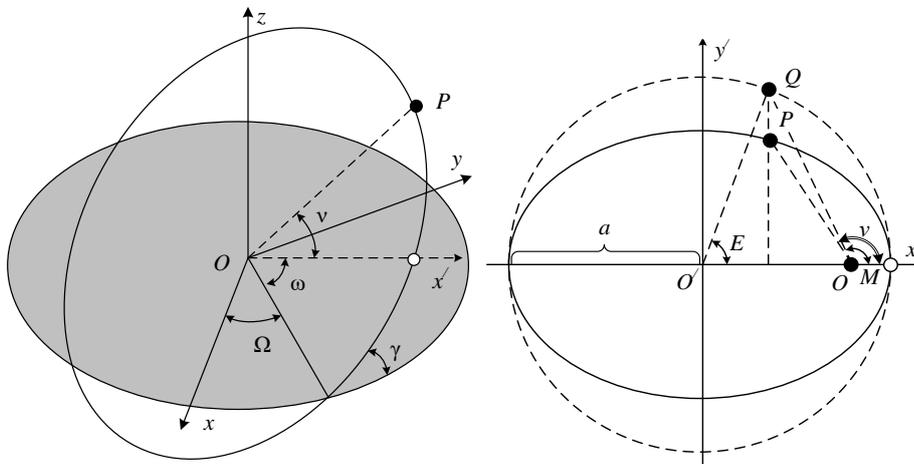


Рис. 2. Иллюстрации орбитальных параметров (а), эксцентрисической и истинной аномалий (б)

Доступными для определения орбитальных параметров являются $m = \overline{1, M}$ результатов измерения декартовых координат НР, полученных в моменты времени t_m на одном из интервалов видимости НР с ПП. Возмущающие факторы, влияющие на орбитальные параметры НР в пределах интервала видимости (Луна, аномалии гравитационного поля Земли, влияние атмосферы и т.д.) считаем фиксированными.

Уравнение орбитальной плоскости в неподвижной геоцентрической системе координат имеет вид

$$Ax + By + Cz = 0 \text{ или } \mathbf{w}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \gamma \sin \Omega \\ -\sin \gamma \cos \Omega \\ \cos \gamma \end{pmatrix}$ - нормальный вектор орбитальной плоскости.

Для m -го измерения $\Psi_m = (\hat{x}_m, \hat{y}_m, \hat{z}_m)^T$ координат СР расстояние $\xi_m = \sin \gamma \sin \Omega \cdot \hat{x}_m - \sin \gamma \cos \Omega \cdot \hat{y}_m + \cos \gamma \cdot \hat{z}_m = \mathbf{w}^T \Psi_m$; $\Psi_m = (\hat{x}_m, \hat{y}_m, \hat{z}_m)^T$ между измерениями и орбитальной плоскостью - гауссовская случайная величина с дисперсией $\sigma_{\xi_m}^2 = \mathbf{w}^T \mathbf{R}_m \mathbf{w}$. Так как все точки орбиты должны принадлежать искомой плоскости, то максимально правдоподобные оценки угла наклона плоскости орбиты и долготы восходящего узла

$$(\hat{\gamma}, \hat{\Omega}) = \arg \min_{\gamma, \Omega} \sum_{m=1}^M \frac{|\mathbf{w}^T(\gamma, \Omega) \hat{\Psi}_m|^2}{\mathbf{w}^T(\gamma, \Omega) \mathbf{R}_m \mathbf{w}(\gamma, \Omega)}. \quad (7)$$

При примерно равноточных измерениях выражение можно упростить за счет отказа от вычисления дисперсии в знаменателе и сформулировать оптимизационную задачу в виде нахождения уравнения проходящей через центр Земли плоскости, для которой сумма квадратов расстояний результатов измерений декартовых координат от указанной плоскости минимальна:

$$(\hat{\gamma}, \hat{\Omega}) = \arg \min_{\gamma, \Omega} \sum_{m=1}^M (\sin \gamma \sin \Omega \cdot \hat{x}_m - \sin \gamma \cos \Omega \cdot \hat{y}_m + \cos \gamma \cdot \hat{z}_m)^2. \quad (8)$$

После нахождения нормального вектора орбитальной плоскости находим другие орбитальные параметры: большую полуось a , эксцентриситет e и аргумент перигея ω , а также время прохождения перигея t_0 .

Запишем выражение для радиус-вектора орбиты r_m в моменты времени t_m [8]:

$$r_m = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(v_m - \omega)} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(v_m - \omega)}, \quad (9)$$

где $p = a(1 - e^2)$ - фокальный параметр; v_m - истинная аномалия в момент времени t_m .

Взаимосвязь истинной v_m и эксцентрической E_m аномалий определяется уравнением

$$v_m = 2 \arctg \frac{E_m}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}. \quad (10)$$

Эксцентрическую аномалию находим путем численного решения уравнения

$$E_m - e \cdot \sin E_m = M_m, \quad (11)$$

где $M_m = n \cdot (t_m - t_0)$ - средняя аномалия, соответствующая истинной аномалии v_m ; $n = \sqrt{\frac{K}{a^3}} = \frac{2\pi}{T}$

K - гравитационная постоянная Земли; T - период обращения НР.

Декартовы координаты НР для момента времени t_m запишем в виде

$$\zeta_m(a, e, \omega, t_0) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{M}_z(\hat{\Omega}) \mathbf{M}_x(\hat{\gamma}) \begin{pmatrix} r_m \cos v_m \\ r_m \sin v_m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $\mathbf{M}_z(\hat{\Omega})$, $\mathbf{M}_x(\hat{\gamma})$ - матрицы вращения относительно осей Oz и Ox :

$$\mathbf{M}_z(\Omega) = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_x(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Тогда оценки максимального правдоподобия орбитальных параметров

$$(\hat{a}, \hat{e}, \hat{\omega}, \hat{t}_0) = \arg \min_{a, e, \omega, t_0} \sum_{m=1}^M (\hat{\Psi}_m - \zeta_m)^T \mathbf{R}_m^{-1} (\hat{\Psi}_m - \zeta_m). \quad (13)$$

Эта задача оптимизации по четырем параметрам оказывается сложной. Для ее упрощения вычислим оценки истинных аномалий по единичным измерениям декартовых координат

$$\hat{v}_m = \arccos \frac{\hat{\Psi}_m \cdot \hat{\mathbf{f}}}{|\hat{\Psi}_m| \cdot |\hat{\mathbf{f}}|}, \quad (14)$$

где $\hat{\mathbf{f}} = (\cos \hat{\Omega}, \sin \hat{\Omega}, 0)^T$

Это позволяет отказаться от оптимизации по \hat{t}_0 в (13). Кроме того, при примерно равноточных измерениях можно отказаться от вычислений корреляционных матриц по каждому разовому измерению и сформулировать оптимизационную задачу в виде

$$(\hat{a}, \hat{e}, \hat{\omega}) = \arg \min_{a, e, \omega} \sum_{m=1}^M |\hat{\Psi}_m - \zeta_m|^2, \quad (15)$$

где ζ_m рассчитывается согласно (9) и (12).

После оптимизации (15) имеем пять орбитальных параметров и остается оценить \hat{t}_0 по критерию минимума измеренных и прогнозируемых декартовых координат

$$\hat{t}_0 = \arg \min_{t_0} \sum_{m=1}^M |\hat{\Psi}_m - \zeta_m(\hat{a}, \hat{e}, \hat{\omega}, \hat{\gamma}, \hat{\Omega}, t_0)|^2, \quad (16)$$

где $\zeta_m(\hat{a}, \hat{e}, \hat{\omega}, \hat{\gamma}, \hat{\Omega}, t_0)$ вычисляется в этом случае согласно (9)-(12).

После оценки ОП уравнение движения НР примет вид

$$\begin{pmatrix} x_{\text{НР}}(t) \\ y_{\text{НР}}(t) \\ z_{\text{НР}}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_z(\hat{\Omega}) \mathbf{M}_x(\hat{\gamma}) \begin{pmatrix} r(t) \cos v(t) \\ r(t) \sin v(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

где зависимости $r(t)$, $v(t)$ определяются (9), (11) путем подстановки в них найденных оценок ОП и соответствующего момента времени t .

Путем дифференцирования (17) могут быть найдены составляющие вектора скорости НР по осям координат. Отметим, что при задании координат НР и составляющих скорости для некоторого момента времени далее может быть выполнено интегрирование уравнений движения НР с учетом различных возмущающих, но детерминированных факторов: неравномерности гравитационного поля Земли, влияния Луны, остатков атмосферы и т.д. [10].

Таким образом, задача оценивания орбитальных параметров наноспутника-ретранслятора разделена на последовательное решение задач измерения его декартовых координат на видимом участке орбиты для всех ПП и видимых НС с заданной дискретностью суммарно-дальномерным методом с компенсацией ионосферной задержки, оценивания угла наклона и долготы восходящего узла орбиты по критерию минимума суммы квадратов отклонений измеренных координат от орбитальной плоскости, вычисления оценок истинных аномалий по декартовым координатам, оценивания большой полуоси эллипса, эксцентриситета и аргумента перицентра по критерию минимума суммы квадратов отклонений декартовых координат от модельной эллиптической орбиты и результирующего оценивания времени прохождения перигея с использованием всех предыдущих оценок, что позволило преобразовать оптимизационную задачу с шестью параметрами в последовательно решаемые задачи оптимизации с двумя, тремя и одним параметром.

Список использованных источников

1. Determination of total electron content in the ionosphere over the territory of the Republic of Belarus based on global navigation satellite systems data / A. O. Naumov [et al.] // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series. – 2024. – Vol. 69, № 1. – P. 53–64.
2. Naumov, A., Khmarskiy, P., Byshnev, N., Piatrouski, M. (2023). Methods and software for estimation of total electron content in ionosphere using GNSS observations. *Engineering Applications*, 2(3), 243–253.
3. Способ оценивания полного электронного содержания в ионосфере на основе ретрансляции сигналов глобальной навигационной спутниковой системы GPS / И. В. Белоконов [и др.] // Информатика. – 2023. – Т. 20, № 2. – С. 7–27. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-2-7-27>.
4. Обработка ретранслированных навигационных сигналов глобальной навигационной спутниковой системы GPS в задаче оценивания полного электронного содержания в ионосфере / Е. А. Каплярчук [и др.] // Информатика. – 2023. – Т. 20, № 3. – С. 21–36. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-3-21-36>
5. Ширман, Я.Д. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех / Я. Д. Ширман, В. Н. Манжос. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.
6. Саврасов, Ю. С. Алгоритмы и программы в радиолокации / Ю. С. Саврасов. – М.: Радио и связь, 1985. – 216 с.
7. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / Под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. –4-е изд., перераб. и доп. – М. : ИПРЖР, 2010. – 800 с.
8. Дубошин, Г.Н., Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1975. – 799 с.