УДК 517.91: 519.6

Буланов Сергей Георгиевич

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЕВ В АДДИТИВНОЙ ФОРМЕ

Представлен подход к анализу устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем численного интегрирования. Результатом преобразований должны стать критерии устойчивости, допускающие программную реализацию. В работе на основе аддитивных преобразований получены критерии устойчивости, математическая конструкция которых позволила снять ряд ограничений, накладываемых на критерии, полученные ранее в мультипликативной форме. Форма представления критериев влечет возможность компьютеризировать анализ устойчивости по ходу приближенного решения дифференциальной системы. Результатом дальнейших исследований может стать интегральная форма *критериев, пригодная для теоретических оценок устойчивости и компьютерной реализации.*

Устойчивость по Ляпунову, компьютерный анализ устойчивости, разностные решения дифференциальных уравнений.

Bulanov Sergei Georgievich

LYAPUNOV STABILITY ANALYSIS OF SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BASED ON CRITERIA IN ADDITIVE FORM

An approach to Lyapunov stability analysis of systems of ordinary differential equations based on the transformation of difference numerical integration schemes is presented. The result of the transformations should be sustainability criteria that allow for programmatic implementation. In the work, based on additive transformations, stability criteria were obtained, the mathematical design of which made it possible to remove a number of restrictions imposed on the criteria previously obtained in multiplicative form. The form of presentation of the criteria entails the possibility of computerizing the stability analysis in the process of approximate solution of the differential system. The result of further research may be an integral form of criteria suitable for theoretical assessments of stability and computer implementation.

Lyapunov stability, computer stability analysis, difference solutions of differential equations.

Введение

Работа посвящена решению актуальной задачи – разработке критериев устойчивости по Ляпунову систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Исследование устойчивости требуется проводить во многих разделах механики, гидродинамики, машиностроения, при управлении реактивными установками и космическими аппаратами, в теории сверхоперативного управления [1-3]. В технических приложениях важно, чтобы анализ устойчивости выполнялся в режиме реального времени [4, 5]. В работе предлагается подход к анализу устойчивости по Ляпунову систем нелинейных ОДУ на основе критериев, конструируемых на основе аддитивных преобразований разностных схем численного интегрирования. Критерии конструируются в виде необходимых и достаточных условий, форма критериев должна иметь возможность их программной реализации. Предполагается, что аддитивная форма критериев позволит снять ряд ограничений, накладываемых на критерии в мультипликативной форме.

Основная часть

Рассмотрим нелинейную систему ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y), \; Y(t_0) = Y_0. \tag{1}$$

Предполагается, что в области $R: \{ t_0 \le t < \infty; \widetilde{Y}(t), Y(t): \left\| \widetilde{Y}_0 - Y_0 \right\| \le \delta, \delta > 0 \}$ для (1) выполнены все условия существования и единственности решения, функция $F(t, Y)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по t.

В предшествующих работах были получены критерии устойчивости системы (1) в мультипликативной форме, которые в дополнении к оговоренным ограничениям, накладываемым на правую часть системы (1) требуют выполнения аналога условия Липшица и условия $\widetilde{y}_{ki}(t) - y_{ki}(t) \ne 0$, $\forall t \in [t_0, \infty)$, $i = 0, 1, \ldots,$ $k = 1, 2, \ldots, n$ [6].

Необходимость выполнения дополнительных условий, накладываемых на правую часть системы (1), влечет уменьшение класса систем ОДУ, анализ устойчивости решений которых можно выполнять на основе ранее разработанных критериев [7].

Предложенный подход с учетом дополнительных ограничений позволяет свести анализ устойчивости нелинейной системы ОДУ к анализу устойчивости линейной системы ОДУ на основе линеаризации в достаточно малой окрестности возмущения начальных данных [8, 9].

Далее будут конструироваться критерии устойчивости системы (1) на основе аддитивных преобразований разностных схем. Точное решение системы (1) в форме метода Эйлера с остаточным членом на каждом шаге имеет вид:

$$y_{k(i+1)} = y_{ki} + h\, f_k(t_i, Y_i) + q_{ki}, \; k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где q_{ki} – остаточные члены формулы Тейлора для k-й компоненты решения.

Для произвольно выбранной независимой переменной t шаг h предполагается равномерным на отрезке $[t_0, t]$, величины t, i, h связаны соотношениями: $t = \text{const}$, $t = t_{i+1}$, $h = (t_{i+1} - t_0)/(i+1)$, $i = 0, 1, \ldots,$ $t_{j+1} = t_j + h$, $0 \le j \le i$.

С целью снятия дополнительных ограничений выполним следующее преобразование выражения (2) в аддитивной форме

$$y_{k(i+1)} = y_{k(i-1)} + h\, f_k(t_{i-1}, Y_{i-1}) + q_{k(i-1)} + h\, f_k(t_i, Y_i) + q_{ki},\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

или,

$$y_{k(i+1)} = y_{k(i-2)} + h\, f_k(t_{i-2}, Y_{i-2}) + q_{k(i-2)} + h\, f_k(t_{i-1}, Y_{i-1}) + q_{k(i-1)} + h\, f_k(t_i, Y_i) + q_{ki},$$
$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Рекуррентное преобразования влечет соотношение

$$y_{k(i+1)} = y_{k0} + \sum_{\ell=0}^{i} h f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}) + \sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)},\ y_{k0} = y_k(t_0),\ k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3)$$

Для возмущенного решения (1), по аналогии с (3), справедливо равенство

$$\tilde{y}_{k(i+1)} = \tilde{y}_{k0} + \sum_{\ell=0}^{i} h f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) + \sum_{\ell=0}^{i} \tilde{q}_{k(i-\ell)},\ \tilde{y}_{k0} = \tilde{y}_k(t_0),\ k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4)$$

Выполняя предельный переход при $i \to \infty$ на любом отрезке $[\,t_0, t\,]$ получим точное представление решения системы (1)

$$y_k(t) = y_{k0} + \lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} h\, f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}) + \lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)},\ \ \forall t \in [t_0, \infty),\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Суммы остаточных членов оценивается на основе неравенств

$$\left| \sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)} \right| \le \sum_{\ell=0}^{i} \left| q_{k(i-\ell)} \right| \le \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{i} c_1 h^2 = \frac{1}{2}(i+1) c_1 h^2 = \frac{1}{2}(t - t_0) c_1 h.$$

Следовательно, $\left| \sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)} \right| \le \frac{1}{2}(t - t_0) c_1 h \to 0,\ i \to \infty$. Поэтому $\lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} q_{k(i-\ell)} = 0$, $\forall t \in [t_0, \infty)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. По аналогии доказывается, что $\lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} \tilde{q}_{k(i-\ell)} = 0$.

На основе соотношений (3), (4) и оценок остаточных членов получим выражение для точного значения величины возмущения на промежутке $[\,t_0, t\,]$

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} h(f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell})), \qquad (5)$$
$$\forall t \in [t_0, \infty),\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Выделим в (5) возмущение начальных данных в виде множителя:

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i \to \infty} \sum_{\ell=0}^{i} h(f_k(t_{i-\ell}, \tilde{Y}_{i-\ell}) - f_k(t_{i-\ell}, Y_{i-\ell}))}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \times (\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)) \qquad (6)$$
$$\forall t \in [t_0, \infty),\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Из (6) следует, что характер устойчивости решения задачи (1) определяется сомножителем перед начальным возмущением $\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)$.

Теорема 1. Для устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно существование $\Delta,\ 0<\Delta\le\delta$ такого, что $\forall \widetilde{Y}(t)$: $0<\left\|\widetilde{Y}_0-Y_0\right\|\le\Delta$ выполняется соотношение

$$\left|\frac{\widetilde{y}_k(t_0)-y_k(t_0)+\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{\ell=0}^{i}h(f_k(t_{i-\ell},\widetilde{Y}_{i-\ell})-f_k(t_{i-\ell},Y_{i-\ell}))}{\widetilde{y}_k(t_0)-y_k(t_0)}\right|\le\widetilde{c}_1,\ \widetilde{c}_1=\text{const},\ \forall t\in\left[t_0,\ \infty\right),\qquad(7)$$

$$k=1,2,\dots,n.$$

Для асимптотической устойчивости решения задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало $\Delta_1\le\Delta$, такое, что неравенство $0<\left\|\widetilde{Y}_0-Y_0\right\|\le\Delta_1$ влечет выполнение соотношения

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\widetilde{y}_k(t_0)-y_k(t_0)+\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{\ell=0}^{i}h(f_k(t_{i-\ell},\widetilde{Y}_{i-\ell})-f_k(t_{i-\ell},Y_{i-\ell}))}{\widetilde{y}_k(t_0)-y_k(t_0)}\right|=0,\ k=1,2,\dots,n.\qquad(8)$$

Критерии (7), (8) выполняются в условиях существования и единственности решения задачи (1), дифференцируемости правой части (1) на полуоси.

Конструкция критериев допускает возможность программной реализации. По характеру численных значений модуля выражения из левой части критериев теоремы 1 делается вывод об устойчивости исследуемой системы. Ограниченное изменение соответствует устойчивости, стремление к нулю свидетельствует об асимптотической устойчивости, неограниченный рост является признаком неустойчивости решения системы ОДУ [10, 11].

Выводы

Представлены критерии устойчивости по Ляпунову нелинейных систем ОДУ в виде необходимых и достаточных условий. Критерии конструируются на основе аддитивных преобразований разностных схем численного интегрирования. В результате преобразований величина возмущения определяется как произведение возмущения начальных данных на некоторый множитель, который и определяет характер устойчивости исследуемой системы. Аддитивная конструкция критериев позволила снять ряд ограничений, накладываемых ранее на мультипликативные критерии. Критерии допускают программную реализацию, что влечет возможность выполнять анализ устойчивости на их основе в режиме реального времени.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Александров А.Ю., Жабко А.П., Косов А.А.* Анализ устойчивости и стабилизация нелинейных систем на основе декомпозиции // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1215-1233.

2. *Миронов В.В., Митрохин Ю.С.* Технологический подход к исследованию устойчивости динамических систем: прикладные вопросы // Вестник РГРТУ – 2017. – № 59. – С. 127-135.

3. *Zhaolu T., Chuanqing G.* A numerical algorithm for Lyapunov equations // J. Appl. Math. Comput. – 2008. – Vol. 202, Issue 1. – P. 44-53.

4. *Дружинина О.В., Масина О.Н.* Системный подход к исследованию устойчивости моделей, описываемых дифференциальными уравнениями различных типов // Вестник Российской академии естественных наук. – 2015. – № 3. – С. 24-30.

5. *Hafstein S.* A constructive converse Lyapunov theorem on asymptotic stability for nonlinear autonomous ordinary differential equations // Dynamical Systems. – 2005. – Vol. 20. – P. 281-299.

6. *Ромм Я.Е.* Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 107-124.

7. *Ромм Я.Е., Буланов С.Г.* Численное моделирование устойчивости по Ляпунову // Современные наукоемкие технологии. – 2021. – № 7. – С. 42-60.

8. *Bulanov S.G.* Differential systems stability analysis based on matrix multiplicative criteria // Journal of Physics: Conf. Series. – 2020. – P. 012103.

9. *Bulanov S.G.* Computer analysis of differential systems stability based on linearization and matrix multiplicative criteria // Journal of Physics: Conf. Series. – 2021. – P. 012101.

10. *Буланов С.Г.* Необходимые и достаточные критерии устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2023. – Т. 224. – С. 10-18.

11. *Буланов С.Г.* Критерии устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2023. – Т. 225. – С. 28-37.

Буланов Сергей Георгиевич, кандидат технических наук, доцент, Ростовский государственный экономический университет, Россия, город Таганрог, улица Инициативная 48, 347924, телефон: 89094369543, email: bulanovtgpi@mail.ru.

Bulanov Sergei Georgievich, Candidate of Technical Sciences, associate professor, Rostov State University of Economics, 347924, Russia, Taganrog, 48 Initsiativnaya street, phone: 89094369543, email: bulanovtgpi@mail.ru.