http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2025-23-2-84-91

УДК 519.17

ПОСТРОЕНИЕ ПОРОЖДАЮЩИХ ДОПУСТИМЫХ ПОДМНОЖЕСТВ В ЗАДАЧЕ О РАНЦЕ

С. В. ЧЕБАКОВ[1], Л. В. СЕРЕБРЯНАЯ[2,3]

[1]Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Республика Беларусь)
[2]Белорусский государственный экономический университет (Минск, Республика Беларусь)
[3]Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (Минск, Республика Беларусь)

Аннотация. Разработан метод построения группы порождающих допустимых подмножеств в задаче о ранце при условии, что величина глубины недоминирования заданного паретовского слоя больше нуля. Метод основывается на многокритериальной математической модели решения задачи о ранце при двух критериях качества и разбиении множества начальных данных задачи о ранце на отдельные паретовские слои. Предложены различные способы построения порождающих допустимых подмножеств в зависимости от соотношения между координатами элементов заданных паретовских слоев и объемом ранца. Определена структура паретовских слоев, представляющих собой группу недоминирования заданного отдельного паретовского слоя. Показано, что существует паретовский слой, начиная с которого не требуется при построении допустимых подмножеств рассматривать элементы этого слоя и всех последующих. Это следует из упорядоченности элементов множества начальных данных задачи о ранце по приоритету их вхождения в формируемые допустимые подмножества.

Ключевые слова: задача о ранце, многокритериальная математическая модель, множество Парето, паретовский слой, допустимые подмножества, глубина недоминирования.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования. Чебаков, С. В. Построение порождающих допустимых подмножеств в задаче о ранце / С. В. Чебаков, Л. В. Серебряная // Доклады БГУИР. 2025. Т. 23, № 2. С. 84–91. http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2025-23-2-84-91.

CONSTRUCTION OF GENERATING FEASIBLE SUBSETS IN THE KNAPSACK PROBLEM

SERGEY V. CHEBAKOV[1], LIYA V. SEREBRYANAYA[2,3]

[1]United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Republic of Belarus)
[2]Belarus State Economic University (Minsk, Republic of Belarus)
[3]Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. A method for constructing a group of generating feasible subsets in the knapsack problem under the condition that the non-dominance depth of a given Pareto layer is greater than zero is developed. The method is based on a multicriterial mathematical model for solving the knapsack problem with two quality criteria and partitioning the initial data set of the knapsack problem into separate Pareto layers. Various methods for constructing generating feasible subsets are proposed depending on the relationship between the coordinates of the elements of the given Pareto layers and the knapsack volume. The structure of the Pareto layers, which are a non-dominance group of a given individual Pareto layer, is determined. It is shown that there is a Pareto layer, starting from which it is not necessary to consider the elements of this layer and all subsequent ones when constructing feasible subsets. This follows from the ordering of the elements of the initial data set of the knapsack problem according to the priority of their inclusion in the feasible subsets.

Keywords: knapsack problem, multicriterial mathematical model, Pareto set, Pareto layer, feasible subsets, non-dominance depth.

Conflict of interests. The authors declare no conflict of interests.

For citation. Chebakov S. V., Serebryanaya L. V. (2025) Construction of Generating Feasible Subsets in the Knapsack Problem. *Doklady BGUIR*. 23 (2), 84–91. http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2025-23-2-84-91 (in Russian).

Введение

В статье рассмотрено построение порождающих допустимых подмножеств в задаче о ранце с множеством объектов N и объемом ранца T. Любому элементу n_i из множества начальных данных соответствуют две характеристики: величина используемого ресурса t_i и вес w_i. Допустимым будет такое подмножество элементов из N, чья суммарная величина ресурса не превосходит объем ранца T. Кроме того, при добавлении в подмножество любого элемента из N суммарная величина ресурса станет больше T. Методы решения указанной оптимизационной задачи представлены в [1, 2].

В [3–5] рассмотрены различные аспекты создания двухкритериальной модели решения задачи о ранце, в [5] дано определение глубины недоминирования отдельного паретовского слоя, а в [6] представлен алгоритм построения допустимых подмножеств при глубине недоминирования паретовского слоя, равной нулю. В данной статье предложен алгоритм решения задачи о ранце на основе двухкритериальной математической модели при глубине недоминирования больше нуля. Рассмотрено формирование порождающих допустимых подмножеств, которые являются основой для нахождения всего набора таких подмножеств.

Определение структуры заданной группы паретовских слоев

В [3] на множестве начальных данных N введено двухкритериальное пространство предпочтений, где координатами каждого элемента n_i из N являются его ресурс t_i и вес w_i. Между любыми двумя элементами $n_1 = (t_1, w_1)$ и $n_2 = (t_2, w_2)$ из N введены следующие транзитивные отношения доминирования.

Определение 1. Элемент n_1 доминирует элемент n_2 тогда и только тогда, когда $t_1 \leq t_2$, $w_1 \geq w_2$, $(t_1, w_1) \neq (t_2, w_2)$. Все недоминируемые элементы из N представляют собой множество Парето на множестве начальных данных N во введенном двухкритериальном пространстве.

Определение 2. Паретовский слой с номером j, обозначим его P_j, представляет собой совокупность недоминируемых элементов на множестве $N^{j-1} = N \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} P_i$, где $P_i = (t_1, w_1)$ – паретовский слой с номером i. Множество Парето, определенное в N, является первым паретовским слоем. Из Определения 2 следует, что для каждого элемента, входящего во второй и в последующие паретовские слои, существует хотя бы один элемент из предыдущего слоя, который его доминирует. В [5] представлена структура оптимального подмножества в задаче о ранце, имеющая следующий вид:

$$Q = \cup_{j=1}^{i} P_j \cup Q_{i+1}. \tag{1}$$

Для нахождения оптимального подмножества требуется определить решение Q_{i+1} задачи о ранце Z_{i+1} с объемом ранца $T_{ост}$ и множеством начальных данных N_s, включающее в себя элементы всех паретовских слоев, начиная со слоя S с номером $i + 1$. Слой S представляет собой множество Парето на множестве N_s. Объем ранца $T_{ост}$ в задаче Z_{i+1} равен разности между величиной всего ресурса T и суммой ресурса всех элементов первых паретовских слоев.

Далее будем использовать введенное в [5] понятие глубины недоминирования паретовского слоя S, показывающей число f последующих слоев $S+1, \ldots, S+f$, которые содержат элементы, находящиеся в паретовском отношении хотя бы с одним элементом слоя S. Паретовские слои $S+1, \ldots, S+f$ назовем группой недоминирования слоя S. В постановке задачи о ранце Z_{i+1} предполагается, что $U \geq T_{ост}$ при любом значении глубины недоминирования слоя S [5]. Величина U

равна сумме координаты t_i всех элементов паретовских слоев $S+1, \ldots, S+f$. Пусть значение f слоя S больше нуля. При выполнении условия $U \geq T_{ост}$ величина $T_{ост}$ может быть меньше либо равна сумме координат t_i произвольного числа элементов слоев из этой группы. Следовательно, может существовать такое число $f > m \geq 0$, что выполняется следующее соотношение:

$$Y_j = \sum_{i=0}^{j} O_i \geq T_{ост}, \tag{2}$$

где $j = f - 1, \ldots, m$; O_i – сумма ресурса t_i элементов слоя с номером $S + i$; O_0 – сумма ресурса элементов слоя S.

Пусть S_m – слой с наименьшим номером m в группе слоев недоминирования $S+1, \ldots, S+f$, для которого выполняется условие (2). Это означает, что величина Y_j для слоя с номером $j = m - 1$, если слой принадлежит рассматриваемой группе, меньше $T_{ост}$. Если $m = 0$, то сумма ресурса t элементов слоя $S \geq T_{ост}$. Обозначим Y_m для слоя S_m через F. Если число m не существует, то величина F по заданному первоначальному условию равна Y_j при $j = f$.

В [4] показано, что существует группа допустимых подмножеств, обозначим ее W, которая включает в себя оптимальное подмножество задач Z_{i+1}. При построении любого подмножества H_j из W, $j = 1, 2, \ldots, h$ (где h – число допустимых подмножеств в W), выполняется следующее условие. На каждом очередном k-м шаге построения H_j выбор очередного его элемента должен осуществляться из паретовского множества $X_{j,k}$, которое представляет собой множество Парето на наборе начальных данных $N'_s = N_s \setminus D$, где D – набор уже включенных в H_j элементов из N_s. Первый элемент каждого из допустимых подмножеств H_j принадлежит слою S. Получаем, что:

$$W = \sum_{i=1}^{s} R_i, \tag{3}$$

где s – число элементов в слое S; R_i – множество допустимых подмножеств, у каждого из которых первым членом является i-й элемент слоя S.

Определение порождающего допустимого подмножества

Формирование любого допустимого подмножества задачи Z_{i+1} с некоторого элемента r_i слоя S возможно только в том случае, когда значение его координаты $t_i \leq T_{ост}$. Пусть $S_m = S$. Покажем справедливость следующего соотношения. Если слой S состоит из единственного элемента, то глубина недоминирования этого слоя равна нулю.

По определению паретовского слоя, каждый элемент следующего за S слоя доминируется хотя бы одним его элементом. Если S содержит только один элемент r_1, то он доминирует все элементы последующих паретовских слоев. Тогда на множестве начальных данных N_s не существует элементов, находящихся с r_1 в отношении Парето и, следовательно, глубина недоминирования слоя S равна нулю.

Рассмотрим случай, когда глубина недоминирования слоя S больше нуля. Следовательно, слой не может состоять из единственного элемента, и число элементов в этом слое должно быть больше единицы. Сформируем последовательность G, упорядочивая элементы r_i слоя S по неубыванию ресурса t. Рассмотрим первый элемент r_1 последовательности G. Пусть r_1 включается в формируемое начальное порождающее допустимое подмножество $H_{1,1}$, и определяется величина $T_1 = T_{ост} - t_1$. Первый индекс в обозначении допустимого подмножества указывает, что оно относится к группе подмножеств, у которых первым является элемент r_1. Второй индекс показывает порядковый номер формируемых подмножеств внутри данной группы. Выбор второго элемента подмножества $H_{1,1}$ осуществляется из упорядоченного множества $X^1_{1,2}$, представляющего собой паретовские элементы на множестве начальных данных $N_s \setminus \{r_1\}$. Второй нижний индекс указывает номер шага, который требуется совершить при формировании конкретного подмножества. Верхний индекс совпадает с первым индексом формируемых подмножеств.

По условию, глубина недоминирования слоя S больше нуля. В соответствии с ее определением в $X^1_{1,2}$ могут быть включены элементы последующих слоев $S + 1, \ldots, S + f$. Элемент h из слоя

$S + 1$ включается в соответствующее $X^1_{1,2}$ в случае, если он доминируется только элементом r_1 слоя S, а с остальными элементами слоя S находится в отношении Парето. Назовем такие элементы дополнительными членами множества $X^1_{1,2}$.

Утверждение 1. Пусть глубина недоминирования слоя S равна f, и в слое $S+f$ элемент g_f находится в отношении Парето с некоторым элементом A_1 из слоя S. Тогда все доминирующие его элементы из слоев $S+1,\ \ldots, S+f-1$ находятся в отношении Парето с A_1.

Доказательство. Согласно условию, по одному из двух критериев элемент g_f доминирует A_1 слоя S. По определению паретовских слоев, для g_f в предыдущих слоях $S+i,\ S<i<f$ существует хотя бы один элемент $g`$, который его доминирует. Тогда по транзитивности введенного отношения предпочтения элемент $g`$ доминирует по одному из двух критериев элемент A_1. Следовательно, $g`$, как и элемент g_f, находится в отношении Парето с A_1 из слоя S.

Из Утверждения 1 следует, что дополнительные элементы из слоев $S+1,\ \ldots, S+f$ последовательно включаются в допустимое подмножество $H_{1,1}$. В каждом из слоев $S+1,\ \ldots, S+f$ существует хотя бы один элемент, который находится в отношении Парето хотя бы с одним элементом из слоя S. При построении $H_{1,1}$ элемент g_{f-1} и доминируемый им g_f не могут находиться в одном паретовском множестве $X^1_{1,j}$. Тогда сначала из слоя с меньшим номером при выполнении заданных условий включается элемент в $X^1_{1,j}$. Затем на последующих шагах построения допустимого подмножества в очередной элемент $X^1_{1,j}$ может включаться g_f. Условием его занесения в $X^1_{1,j}$ является включение всех доминирующих его элементов в формируемое допустимое подмножество.

После включения в $H_{1,1}$ первого элемента r_1 определяется величина $T_1 = T_{ост} - t_1$. Если ресурс второго элемента r_2 последовательности G имеет значение, меньшее либо равное T_1, то он включается в $H_{1,1}$, после чего определяется новое значение $T_2 = T_1 - t_2$. Множество $X^1_{1,3}$ на данном шаге содержит все элементы последовательности G, начиная с третьего элемента r_3, и возможные дополнительные элементы. Выбирается следующий элемент r_3 и, если его ресурс меньше либо равен T_2, то элемент включается в формируемое подмножество. Построение допустимого подмножества $H_{1,1}$ продолжается до тех пор, пока не исчерпается величина $T_{ост}$. По условию, величина $F \geq T_{ост}$. На каждом шаге требуется проверять наличие дополнительных элементов в слоях $S+1,\ \ldots,\ S+f$, которые могут включаться в очередное множество $X^1_{1,j}$. При этом все дополнительные элементы из группы слоев недоминирования $S+1,\ \ldots,\ S+f$ имеют значение ресурса t меньше, чем ресурс последнего элемента последовательности r_n.

Утверждение 2. При последовательном включении элементов G в $H_{1,1}$ на некотором шаге формирование допустимого подмножества будет закончено. Последним его элементом является либо некоторый элемент слоя S, отличный от последнего элемента r_n, последовательности G, либо некоторый дополнительный элемент.

Доказательство

1. Пусть в $H_{1,1}$ не вошел ни один дополнительный элемент. По предположению, сумма ресурса элементов $G \geq T_{ост}$. Если $G = T_{ост}$, то после включения в $H_{1,1}$ последнего элемента r_n его построение закончено. При $G > T_{ост}$ объем ранца $T_{ост}$ на некотором шаге будет исчерпан, поскольку следующий элемент, обозначим его g_c, окажется больше величины очередного T_i. Все остальные элементы слоя S и возможные дополнительные элементы не войдут в $H_{1,1}$, так как имеют большее либо равное элементу g_c значение ресурса. Рассмотрим элемент g_{oc} из группы слоев недоминирования $S + 1,\ \ldots,\ S + f$. По определению паретовских слоев, он доминируется каким-либо элементом слоя S. Следовательно, g_{oc} доминируется либо элементом из $H_{1,1}$, либо элементами последовательности G, расположенными после элемента g_{c-1}. Значит, g_{oc} не может войти в $H_{1,1}$. Элементы всех слоев, находящихся после слоя $S + f$, также являются доминируемыми и не могут войти в $H_{1,1}$.

2. Пусть в $H_{1,1}$ вошли дополнительные элементы. Все они имеют номера в паретовских множествах $X^1_{1,j}$ меньшие, чем последний элемент r_n последовательности G. Следовательно, они могут войти в $H_{1,1}$ ранее, чем r_n. По условию, величина $F \geq T_{ост}$. Тогда сумма ресурса элементов последовательности G вместе с дополнительными элементами больше $T_{ост}$. Величина объема ранца $T_{ост}$ на некотором шаге будет исчерпана, поскольку следующий элемент g_c множества $X^1_{1,j}$ окажется

больше величины очередного T_i. Последний элемент слоя S не может войти в $H_{1,1}$ вследствие наличия дополнительных элементов. Все остальные элементы слоя S и дополнительные элементы с номерами, больше g_c, в упорядоченном множестве $X_{1,j}^1$ имеют значение ресурса большее либо равное g_c, и не войдут в $H_{1,1}$. Рассмотрим какой-либо элемент g_{oc} из слоев $S+1, \ldots, S+f$. По определению паретовских слоев, он доминируется каким-либо элементом слоя S, не вошедшим в число дополнительных элементов. Тогда среди элементов слоя S из $X_{1,j}^1$, начинающихся с g_c, есть элемент, доминирующий g_{oc}. Таким образом, значение ресурса элемента $g_{oc} \geq g_c$, и g_{oc} не войдет в $H_{1,1}$. Значение ресурса любого элемента слоев с номерами, большими, чем у $S+f$, равно или превосходит значение ресурса элемента g_c. Тогда никакой из оставшихся элементов множества начальных данных N_s не может войти в подмножество $H_{1,1}$, и его построение закончено. Утверждение 2 доказано.

Варианты порождающих допустимых подмножеств

Пусть сформировано допустимое подмножество $H_{1,1}$, у которого первым элементом является r_1. При этом предполагается, что слой S_m совпадает со слоем S. Предположим, существует группа элементов M_1 последовательности G, начиная с r_3, каждый из которых не превосходит величину $T_1 = T_{ост} - t_1$. Осуществляется построение всех допустимых порождающих подмножеств $H_{1,j}$, $j = \overline{1, u_1}$, где u_1 – число элементов в группе M_1, у которых начальным членом является первый элемент последовательности G. Любой представитель группы M_1 может быть выбран в качестве второго элемента нового допустимого подмножества. Пусть элементы из группы M_1 рассматриваются в формируемых допустимых подмножествах $H_{1,g}$ в порядке их следования в G. Предположим, что при построении допустимого подмножества $H_{1,k}$ сформировано паретовское множество $X_{k,i}^1$. Его элементы имеют номера как большие, так и меньшие, чем последний включенный в подмножество $H_{1,j}$ элемент. Определенной цепочкой рассуждений можно показать, что на каждом i-м шаге построения допустимых подмножеств $H_{1,j}$ требуется рассматривать только элементы с номерами, большими, чем последний включенный элемент в $H_{1,j}$.

По условию, сумма элементов слоя $S \geq T_{ост}$. Пусть в некоторое подмножество $H_{1,j}$ на очередном шаге включен последний элемент из G, и при этом $T_i > 0$. Тогда при последовательном включении элементов в $H_{1,j}$ добавление последнего элемента из G возможно в случае, когда существуют элементы слоя S, которые не вошли в $H_{1,j}$. Множество всех элементов слоя S, не вошедших в формируемое подмножество, обозначим через H_1. После включения последнего элемента G в подмножество $H_{1,j}$ выбор следующего элемента должен осуществляться из множества $X_{j,i}^1$, которое формируется следующим образом. В него включаются элементы из H_1, а также элементы из слоя $S+1$, которые находятся с ними в отношении Парето, если такие элементы существуют. Обозначим их через H_2. Упорядочим элементы множества $X_{j,i}^1$ по неубыванию ресурса. В множество H_1 входят элементы последовательности G, начиная с r_1 до r_s, где r_s – элемент в G, предшествующий элементу из группы M_1, выбранному при построении допустимого подмножества $H_{1,j}$. По предположению, все допустимые подмножества, содержащие элементы из H_1, уже сформированы. Следовательно, для продолжения построения $H_{1,j}$ будем рассматривать первый элемент из H_2. Если значение его ресурса больше T_i, то построение $H_{1,j}$ закончено. Сформированное подмножество является допустимым, поскольку вследствие упорядоченности элементов множества $X_{j,i}^1$ все его элементы, а также элементы всех остальных паретовских слоев, больше величины T_i. Если значение его ресурса меньше либо равно T_i, данный элемент включается в формируемое подмножество и определяется новое значение величины T_i. Если $T_i > 0$, то определяется следующее паретовское множество $X_{j,i}^1$, при необходимости корректируется группа H_2 и рассматривается очередной элемент из этой группы.

Пусть все элементы из группы слоев недоминирования слоя S, которые находятся в отношении Парето с элементами группы H_1, включены в $H_{1,j}$. Тогда все остальные элементы из данной группы слоев доминируются любым элементом из H_1. Это означает, что они не могут входить в одно паретовское множество $X_{j,i}^1$ с элементами из H_1. Следовательно, очередное паретовское множество $X_{j,i}^1$ состоит только из элементов H_1. Однако включение их в $H_{1,j}$ не позволяет построить новые допустимые подмножества. Тогда продолжение построения $H_{1,j}$ проводится при помощи элементов, которые доминируются элементами из H_1. Однако при подобном включении, вследствие определения отношения предпочтения, доминируемый элемент после включения может быть заменен доминирующим элементом. Вновь полученное допустимое подмножество будет иметь большее или равное суммарное значение веса, чем то, которое было до замены. Это означает, что включение в подмножества элементов, которые доминируются членами из H_1, не влияет на нахождение решения задачи о ранце. Определим паретовский слой, все элементы которого доминируются элементами из H_1. Это слой с номером $S + f + 1$, поскольку все его элементы доминируются элементами из S.

Таким образом, для случая, когда сумма элементов слоя $S \geq T_{ост}$, сформирована группа порождающих допустимых подмножеств $H_{1,j}$ в задаче Z_{i+1}, представляющей собой подмножество из W. Первым элементом данных подмножеств является r_1 из последовательности G, вторым – элемент из группы M_1. Оставшиеся части подмножеств $H_{1,j}$ формируются включением элементов из паретовских множеств $X^1_{j,i}$. При этом элементы слоя $S + f + 1$ не требуется использовать при построении допустимых подмножеств $X^1_{j,i}$.

Пусть слой S_m не совпадает со слоем S. Предположим, что при последовательном включении элементов из G в $H_{1,1}$ после вхождения ее последнего элемента значение очередного $T_i > 0$. При этом в $H_{1,1}$ могут включаться дополнительные элементы из слоев $S + 1, \ldots, S + f$. Находим паретовское множество $X^1_{j,i}$ на множестве $N_s \backslash C$, где C – набор всех элементов, вошедших в $H_{1,1}$. Оно содержит элементы слоя $S + 1$, которые доминируются последним элементом G. К ним могут добавиться члены из слоев, составляющих группу недоминирования $S + 1$, которые находятся с указанными элементами в отношении Парето. В результате упорядочивания элементов $X^1_{j,i}$ по неубыванию ресурса t получаем последовательность G_1.

Утверждение 3. Если ресурс первого элемента из G_1 превосходит значение T_i, полученное после включения в $H_{1,1}$ последнего элемента из G, то никакой элемент из G_1 не может быть включен в это подмножество, и его построение закончено. Справедливость Утверждения 3 следует из упорядоченности последовательности G_1 и того факта, что все остальные элементы множества N_s доминируются хотя бы одним элементом из последовательности G_1.

Пусть условие Утверждения 3 не выполняется, и существуют элементы в последующих слоях, которые могут войти в $H_{1,1}$. Выполняем формирование подмножества $H_{1,1}$ последовательным включением элементов G_1 до тех пор, пока значение T_i не станет меньше либо равно нулю. В этом случае построение подмножества $H_{1,1}$ закончено. Предположим, что в $H_{1,1}$ включен последний элемент из G_1, и $T_i > 0$. Формируется новое паретовское множество $X^1_{1,i}$, состоящее из элементов слоя $S + 2$ и элементов последующих слоев, которые находятся с ними в отношении Парето. Упорядочивая элементы этого паретовского множества, получаем последовательность G_2.

При невыполнении условия Утверждения 3 для первого элемента последовательности G_2 ее элементы включаются в подмножество $H_{1,1}$ до тех пор, пока величина T_i не станет меньше либо равной нулю. Если $T_i > 0$, продолжается процесс построения новых паретовских множеств $X^1_{1,i}$ и упорядоченных последовательностей G_i. По определению слоя S_m, сумма ресурса всех элементов слоев $S, \ldots, S_m > T_{ост}$. Тогда существует последовательность G_k, включающая в себя элементы слоя S_m, сумма ресурса элементов которой будет больше значения последней величины T_i. Проверяется выполнение условий Утверждения 3 для первого элемента последовательности G_k. При их выполнении построение допустимого подмножества закончено, а элементы слоя S_m не используются при формировании допустимого подмножества $H_{1,1}$. При невыполнении условий Утверждения 3 включаем элементы G_k в $H_{1,1}$. На некотором шаге элемент из G_k будет больше нового значения T_i, и формирование $H_{1,1}$ закончено.

Выполним построение всех допустимых подмножеств $H_{1,j}$, у которых начальным элементом является первый элемент последовательности G. Создаем некоторое подмножество $H_{1,j}$, вторым элементом которого является j-й член последовательности G. Тогда на каждом i-м шаге построения подмножеств $H_{1,j}$ требуется выбирать элементы из множеств $X^1_{j,i}$ с номерами, большими, чем последний включенный в $H_{1,j}$ элемент из G. На каждом i-м шаге вычисляется величина $T_i = T_{i-1} - t_i$, где t_i – ресурс последнего включенного элемента.

Пусть последний элемент слоя S включен в некоторое подмножество $H_{1,j}$. Множество всех элементов S, не включенных в формируемое подмножество, обозначим через H_1. Допустим, в группе недоминирования слоя S существуют элементы, которые находятся в отношении Парето со всеми элементами из множества H_1. Обозначим эту группу H_2. Ее элементы составят последовательность G_1. При выполнении условий Утверждения 3 построение $H_{1,j}$ закончено. Предположим, что условия Утверждения 3 не выполняются. Тогда элементы группы H_2 последовательно включаются в формируемое подмножество. Если на некотором шаге $T_i \leq 0$, то построение допустимого подмножества закончено.

Пусть в $H_{1,j}$ включены все элементы из G_1, и значение последней величины T_i больше нуля. Очередное паретовское множество $X^1_{j,i}$ содержит только элементы группы H_1. Ее элементы упорядочиваются по неубыванию ресурса, и получается последовательность G_2. Элементы G_2 включаются в $H_{1,j}$ до тех пор, пока величина очередного T_i не станет меньше либо равной нулю. Предположим, что при включении последнего элемента из H_1 в $H_{1,j}$ величина $T_i > 0$. Тогда при необходимости формируются новые $X^1_{j,i}$ и соответствующие им последовательности G_k, где k – номер последовательности. Элементы G_k включаются в $H_{1,j}$ до тех пор, пока величина T_i не станет меньше либо равной нулю.

Обозначим через S_{md} слой с номером $S_m + n + 1$. Можно провести цепочку рассуждений, в результате которых будет показано, что элементы S_{md} не требуются при построении порождающих допустимых подмножеств. Для нахождения всех порождающих допустимых подмножеств в задаче о ранце Z_{i+1} требуется построить подмножества $H_{n,j}$ (где $n = 2, ..., s$; s – количество элементов в последовательности G). Первыми элементами подмножеств $H_{n,j}$ являются элементы $r_2, \ldots, r_s$. Нахождение всего набора допустимых подмножеств требует разработки алгоритмов формирования подзадач о ранце, которые будут рассматриваться в следующих статьях.

Заключение

1. На основе многокритериальной математической модели при двух критериях качества разработан метод построения набора порождающих допустимых подмножеств в задаче о ранце при значении величины глубины недоминирования заданного паретовского слоя больше нуля.
2. Определена структура паретовских слоев, представляющих собой группу слоев недоминирования.
3. Существует паретовский слой, элементы которого, как и элементы всех последующих слоев, на которые разбивается множество начальных данных, не требуется рассматривать при построении данного набора порождающих допустимых подмножеств.

Список литературы

1. Martello, S. Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations / S. Martello, P. Toth. NY: John Wiley & Sons, Inc., 1990.
2. Посыпкин, М. А. Комбинированный параллельный алгоритм решения задачи о ранце / М. А. Посыпкин // Параллельные вычисления и задачи управления: тр. 4-й Междунар. конф. М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2008. С. 177–189.
3. Чебаков, С. В. Двухкритериальная модель построения оптимального подмножества альтернатив с максимальной суммарной вероятностью достижения цели / С. В. Чебаков // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук. 2005. № 2. С. 112–118.
4. Чебаков, С. В. Определение структуры оптимального подмножества в задаче о ранце / С. В. Чебаков, Л. В. Серебряная // Доклады БГУИР. 2019. № 6. С. 72–79. http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2019-124-6-72-79.
5. Чебаков, С. В. Алгоритм нахождения структуры оптимального подмножества на основе паретовских слоев в задаче о ранце / С. В. Чебаков, Л. В. Серебряная // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2020. № 2. С. 97–104.
6. Чебаков, С. В. Алгоритм решения задачи о ранце при определенных свойствах паретовских слоев / С. В. Чебаков, Л. В. Серебряная // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022. № 3. С. 54–66.

Поступила 12.12.2024 Принята в печать 17.03.2025

References

1. Martello S., Toth P. (1990) *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*. NY, John Wiley & Sons Inc.

2. Posypkin M. A. (2008) Combined Parallel Algorithm for Solving the Knapsack Problem. *Parallel Computing and Control Problems, Proceedings of the 4th International Conference*. Moscow, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences. 177–189 (in Russian).
3. Chebakov S. V. (2005) Two-Criteria Model for Constructing an Optimal Subset of Alternatives with the Maximum Total Probability of Achieving the Goal. *News of the National Academy of Sciences of Belarus. Series of Physical and Mathematical Sciences*. (2), 112–118 (in Russian).
4. Chebakov S. V., Serebryanaya L. V. (2019) Finding of Optimal Subset Structure in the Knapsack Problem. *Doklady BGUIR*. (6), 72–79. http://dx.doi.org/10.35596/1729-7648-2019-124-6-72-79 (in Russian).
5. Chebakov S. V., Serebryanaya L. V. (2020) Finding Algorithm of Optimal Subset Structure Based on the Pareto Layers in the Knapsack Problem. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. (2), 97–104 (in Russian).
6. Chebakov S. V., Serebryanaya L. V. (2022) Algorithm for Solving the Knapsack Problem with Certain Properties of Pareto Layers. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. (3), 54–66 (in Russian).

Received: 12 December 2024 Accepted: 17 March 2025

Вклад авторов

Чебаков С. В. сформулировал постановку задачи для проведения исследования, предложил многокритериальную модель оптимизации.

Серебряная Л. В. разработала структуру заданной группы паретовских слоев и алгоритм построения допустимых подмножеств.

Authors' contribution

Chebakov S. V. formulated a problem statement for the study, proposed a multicriteria optimizationmodel and a selection procedure.

Serebryanaya L. V. developed a selection procedure and an algorithm for finding the optimal pathon a graph model.

Информация об авторах

Чебаков С. В., канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси

Серебряная Л. В., канд. техн. наук, доц. каф. программного обеспечения информационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, зав. каф. экономической информатики Белорусского государственного экономического университета

Information about the authors

Chebakov S. V., Cand. Sci. (Phys. and Math.), Senior Researcher, United Institute of Informatics Problems National Academy of Sciences of Belarus

Serebryanaya L. V., Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor at the Department of Software for Information Technology, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Head of the Department of Economic Informatics at the Belarus State Economic University

Адрес для корреспонденции

220013, Республика Беларусь,
Минск, ул. П. Бровки, 6
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники
Тел.: +375 29 773-95-09
E-mail: l_silver@mail.ru
Серебряная Лия Валентиновна

Address for correspondence

220013, Republic of Belarus,
Minsk, P. Brovki St., 6
Belarusian State University
of Informatics and Radioelectonics
Tel.: +375 29 773-95-09
E-mail: l_silver@mail.ru
Serebryanaya Liya Valentinovna