Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра электронных вычислительных машин

Б. В. Никульшин, Т. В. Тиханович, В. Г. Русин

ОСНОВЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики
и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия
для специальности 1-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети»*

Минск БГУИР 2025

УДК 519.876:004(076)
ББК 22.18+32.97я73
Н65

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра программного обеспечения
информационных систем и технологий
Белорусского национального технического университета
(протокол № 4 от 22.11.2023);

заведующий кафедрой моделирования и проектирования
учреждения образования «Белорусский государственный аграрный
технический университет»
кандидат педагогических наук, доцент Н. Г. Серебрякова

Никульшин, Б. В.
Н65 Основы системного анализа и моделирования систем : учеб.-метод. пособие / Б. В. Никульшин, Т. В. Тиханович, В. Г. Русин. – Минск : БГУИР, 2025. – 78 с.
ISBN 978-985-543-775-9.

Рассмотрена технология системного анализа для решения задач проектной деятельности. В работе приводятся методы и модели реализации компонентов технологической схемы системного анализа. Практическая часть пособия содержит ряд лабораторных работ для ознакомления с инженерными методиками, разработанными на базе приведенных методов и моделей.

УДК 519.876:004(076)
ББК 22.18+32.97я73

ISBN 978-985-543-775-9

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При разработке сложных дорогостоящих технических систем производители сталкиваются с необходимостью кооперации соисполнителей, координации их деятельности, проработки проектных вариантов на ранних стадиях проектирования с целью оптимизации проектных решений. При этом для ранних стадий проектирования характерны неопределенность исходных данных для разработки, стохастичность факторов, влияющих на сам процесс разработки и эксплуатацию системы.

Для решения подобных проблем «РЭНД Корпорейшен», основанная в 1946 г. ВВС США, разработала в качестве методологической базы концепцию «системного анализа», основанную на системном подходе (СП) [1].

Суть системного подхода состоит в соблюдении двух правил [2; 3]:

1. Рассмотрение всех элементов организации или процесса в их взаимной связи, взаимозависимости и взаимном влиянии в интересах наиболее оптимального достижения как целей элементов (частных), так и целей системы (общих).

2. Обязательный анализ процессов проектирования или управления на базе количественных методов с целью выработки и принятия количественно обоснованных решений в условиях неопределенности.

В работе рассматривается технология системного анализа для решения задач проектной деятельности.

Основным ресурсом для реализации этапов технологии системного анализа является моделирование, позволяющее на ранних стадиях проектирования получить и проанализировать проектные решения до их технической реализации.

В работе приводятся методы и модели реализации компонентов технологической схемы системного анализа. Практическая часть пособия содержит ряд лабораторных работ для ознакомления с инженерными методиками, разработанными на базе приведенных методов и моделей.

1. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ КАК ТЕХНОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ ИССЛЕДОВАНИЯ, ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Системный анализ (СА) как дисциплина сформировался для решения проблем исследования и проектирования больших и сложных систем, управления ими в условиях неполноты информации, ограничения ресурсов и времени. Предметами исследования СА являются [1; 17]:

1. Методы диагностики и решения сложных проблем с использованием системного подхода.
2. Способы организации междисциплинарных исследований для решения проблем.
3. Методы и модели комплексного исследования и проектирования больших и сложных систем (далее – систем).

В рамках пособия рассмотрим некоторые методы и модели исследования и проектирования систем.

При исследовании и проектировании систем возникают проблемы генерации и сравнительного анализа альтернатив с учетом совокупности их характеристик различной природы в условиях неполноты, неопределенности требований к системе и условий реализации среды. Для решения этих проблем в рамках СА разработаны процедуры и методы формирования альтернатив, их сравнительного анализа, учета неопределенности среды в процессе выработки рационального решения. При этом важнейшей особенностью СА является единство используемых формализованных и неформализованных средств и методов исследования.

СА опирается на ряд прикладных математических дисциплин и методов:

- общая теория систем и СП;
- исследование операций и оптимизация, теория игр;
- имитационное моделирование;
- теория принятия решений;
- методы экспертных оценок и т. д.

Пропорции использования приведенных прикладных дисциплин и методов при решении проблем определяются степенью их структуризации.

Герберт Саймон и Алан Ньюэлл предложили следующую классификацию проблем и основные методы их решения (табл. 1.1) [2]:

- хорошо структурированные, или количественно выраженные, проблемы, в которых существенные зависимости выражены в числах или символах, получающих в конечном итоге числовые оценки;
- неструктурированные, или качественно выраженные, проблемы, содержащие лишь описание важнейших ресурсов, признаков и характеристик, количественные зависимости между которыми неизвестны;
- слабоструктурированные, или смешанные, проблемы, которые содержат как качественные элементы, так и количественные, причем качественные, малоизвестные и неопределенные стороны проблемы имеют тенденцию доминировать.

Таблица 1.1

Типы проблем

Класс проблем	Характеристики проблем	Методы решения проблем и задач
1. Хорошо структурированные проблемы	Зависимости между элементами и характеристиками могут быть выражены количественными оценками	Методы математического моделирования, сетевое моделирование, теория массового обслуживания, методы математического программирования
2. Неструктурированные проблемы	Существенные зависимости, характеристики и ресурсы описаны качественно, количественные зависимости между ними или неизвестны, или выявить их очень сложно	Интуитивные методы решения задач (экспертиза, «мозговой штурм», методы жюри, комиссии и т. д.), метод построения сценариев, эвристические методы
3. Слабоструктурированные проблемы (смешанные проблемы)	Содержат в себе качественные элементы и количественные показатели, причем категории качественного содержания имеют тенденцию доминировать	Системный анализ, теория игр, анализ теории полезности, эвристическое моделирование

Схема решения проблемы с позиций СА представлена на рис. 1.1.

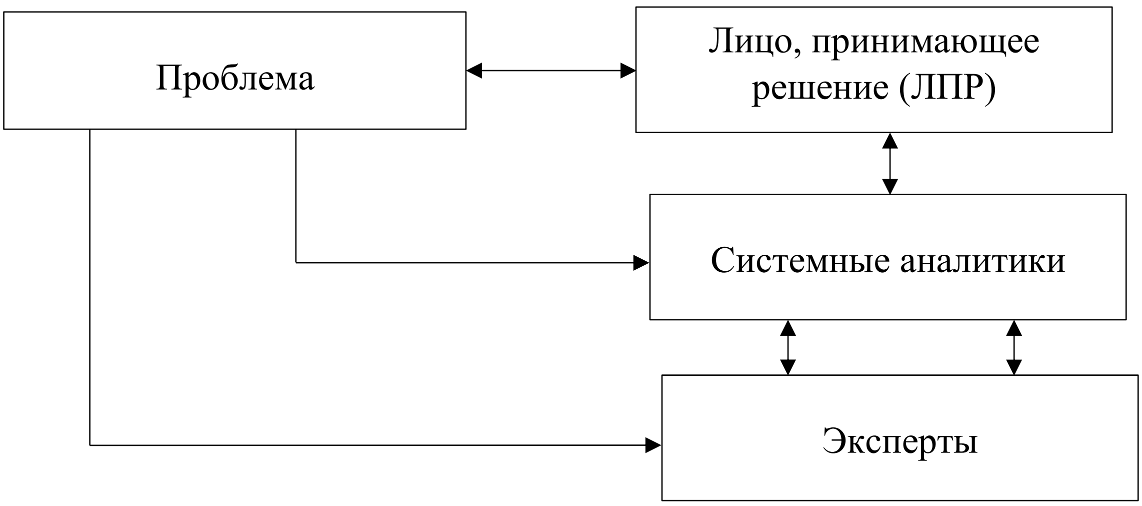

Рис. 1.1. Схема решения проблемы

Участники схемы решения проблемы [1; 16; 17]:

- ЛПР – это некий реально существующий индивидуум (или группа), которого не устраивает существующее состояние дел или перспектива их будущего состояния и который имеет желание и полномочия отменить это состояние;

- системные аналитики, исследующие проблему. Они учитывают целевые положения ЛПР, вырабатывают альтернативы решения проблемы, сравнивают их и предлагают ЛПР варианты, проранжированные в порядке их предпочтения, по отдельным вопросам обращаются к экспертам и агрегируют их решения.

Технологию решения проблемы с использованием СА можно представить как многошаговый итерационный процесс, состоящий из 12 этапов (рис. 1.2) [1; 5; 17].

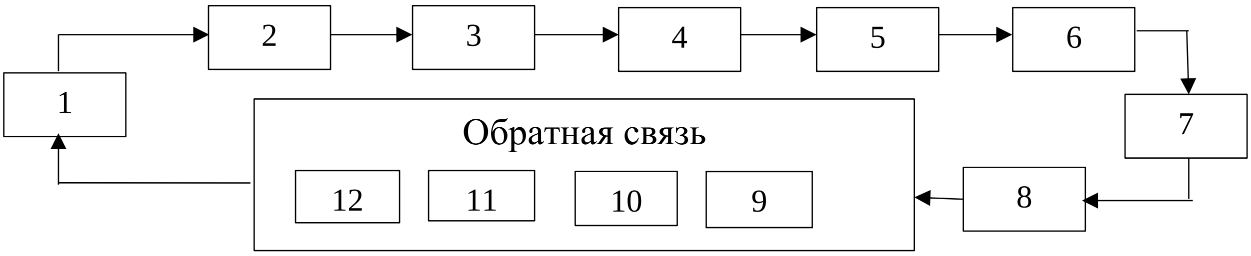

Рис. 1.2. Технология системного анализа

Здесь:

- этап 1 – формализация проблемы;
- этап 2 – обоснование цели;
- этап 3 – формирование альтернативных проектных вариантов реализации цели;
- этап 4 – формирование показателей для оценки альтернатив;
- этап 5 – построение моделей для оценки показателей;
- этап 6 – оценка альтернатив;
- этап 7 – сравнительный анализ альтернатив и выбор рациональной;
- этап 8 – анализ чувствительности;
- этап 9 – проверка исходных данных;
- этап 10 – уточнение конечной цели;
- этап 11 – рассмотрение новых альтернатив;
- этап 12 – анализ новых ресурсов и показателей.

Этап 1. Формализация проблемы

Включает процедуры: осознание проблемы; выявление причин (внутренних, внешних) появления (существования) проблемы; анализ причин и их фильтрация (отбрасываются факторы, не относящиеся к проблеме); установление имеющихся возможностей (ресурсов) решения проблем. Для этого создается группа, в состав которой входят:

- заказчик;
- лицо, принимающее решение;
- участники проблемы: активные (заинтересованные в решении проблемы) и пассивные (на ком скажется решение проблемы);
- системный аналитик. Его задача определить, в чем заинтересованы участники проблемы, какие изменения и почему они хотят внести.

Завершается этап построением формальной модели решения проблемы, учитывающей все факторы и взаимосвязи объекта и среды. Модель должна отражать результаты применения альтернативных вариантов решения проблемы с учетом среды.

Этап 2. Обоснование цели

Различают конечную и частные цели. Конечная цель есть заранее мыслимый и желаемый результат. Любая конечная цель рассматривается как «клубок»» частных целей. Частные цели ранжируют по важности, строят дерево целей, оптимизируют его. Следует учитывать опасность подмены искомой цели трактовкой заказчика. После построения и оптимизации дерева целей оценивают их реализуемость.

Этап 3. Формирование альтернативных проектных вариантов (альтернатив) реализации цели

Необходимо предусмотреть все многообразие проектных альтернатив, чтобы не пропустить среди них искомой рациональной альтернативы. На данном этапе, как правило, сталкиваются с трудностями генерации оригинальных, нетрадиционных решений. С другой стороны, возникают проблемы «проклятия» размерности при переборе всех возможных вариантов.

Этап 4. Формирование показателей для сравнительной оценки альтернатив

Для рассматриваемых систем характерна многокритериальность альтернатив, т. е. возникает необходимость учета совокупности показателей различной природы и шкал измерения. На этом этапе устанавливаются ограничения для показателей. При формировании показателей следует учитывать: требования заказчика; сложившиеся традиционные показатели для рассматриваемых систем; возможность оценки показателей; возможность учета ими динамики условий функционирования системы.

Этап 5. Построение моделей для оценки показателей альтернатив

Выбор прикладных математических методов формализации задачи выбора альтернатив определяет формальный аппарат для оценки показателей. Сравнительный анализ альтернатив для выбора наиболее рациональной обуславливает определенные допуски в построении моделей показателей. Нет необходимости получения абсолютных оценок показателей, достаточно ограничиться требованиями учета отличительных особенностей альтернатив и их чувствительности к динамике условий функционирования.

Этап 6. Оценка альтернатив по совокупности показателей в диапазоне условий функционирования

Совокупность факторов среды определяет достоверность результатов выбора и определяет условия выбора. Различают выбор в условиях определенности, в условиях риска, в условиях неопределенности.

1. Выбор в условиях определенности: факторы среды имеют детерминированный характер. Условия функционирования системы можно представить заранее известным набором факторов среды.

2. При выборе в условиях риска факторы среды задаются случайными величинами статистической природы с известными законами распределения.

3. При выборе в условиях неопределенности факторы среды либо имеют статистическую природу с неизвестными законами распределения, либо они нестатистической природы и законы распределения принципиально не существуют.

Этап 7. Сравнительный анализ альтернатив и выбор рациональной

Задача выбора рациональной альтернативы из возможных альтернатив по совокупности показателей, имеющих противоречивый характер, относится к классической задаче теории принятия решений. С позиций СП для выбора рационального варианта необходимо провести сравнительный анализ всего возможного множества альтернатив. С учетом размерности задачи целесообразно сравнительный анализ провести в два этапа: на первом этапе отсеять заведомо неперспективные альтернативы и сформировать множество компромиссных Парето-оптимальных решений; на втором этапе сузить множество Парето с учетом совокупности показателей и их важности, свести к задаче сравнительного анализа ограниченного множества конкурирующих по своей эффективности альтернатив. Сравнительный анализ по совокупности частных показателей предполагает переход к скалярной оценке в виде обобщенного показателя.

Процедуры сравнительного анализа альтернатив необходимо провести для всего диапазона условий выбора. При этом необходимо сформировать критерий (правило) выбора рационального варианта при противоречивом характере поведения обобщенных показателей альтернатив в диапазоне условий выбора.

Этап 8. Анализ чувствительности

Исследуются конкурирующие альтернативы во всем диапазоне условий функционирования в целях оценки их устойчивости. При положительном результате процесс выбора рациональной альтернативы завершается, в противном случае включаются процедуры «обратной связи»: проверка и возможные изменения исходных данных (этап 9); уточнение конечной цели (этап 10); рассмотрение новых альтернатив (этап 11); анализ новых ресурсов и показателей (этап 12).

В большей степени ожидаемый эффект исследуемых и проектируемых систем определяется корректностью решения этапов 5–7. Для реализации задач этих этапов можно использовать ресурсы моделирования или методы экспертного анализа. Процедура моделирования заключается в формализации исследуемой системы, построении ее модели, изучении свойств модели с оценкой соответствия получаемых характеристик альтернатив требованиям к системе, анализе реакции на внешние воздействия. Если формализация альтернатив затруднена, привлекают методы экспертных оценок (МЭО).

2. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛЬТЕРНАТИВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭКСПЕРТНЫХ ПРОЦЕДУР

2.1. Метод Саати

Приводится на основе материалов источника [8].

Относится к индивидуальным экспертным методам. Для каждой пары альтернатив эксперт указывает степень предпочтительности одной из них над другой.

Пример 2.1. Предприятие выбирает вид рекламы для продукции. Предлагаются четыре вида: реклама на телевидении (обозначим ее как A_1), на радио (A_2), в газете (A_3), на стендах (A_4).

Алгоритм метода:

1. Экспертом заполняется матрица парных сравнений размером $N \times N$, где N – количество альтернатив. Матрица заполняется по правилам, приведенным в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Правила заполнения матрицы парных сравнений

X_{ik}	Значение
1	i-я и k-я альтернативы примерно равноценны
3	i-я альтернатива немного предпочтительнее k-й
5	i-я альтернатива предпочтительнее k-й
7	i-я альтернатива значительно предпочтительнее k-й
9	i-я альтернатива явно предпочтительнее k-й

Если i-я альтернатива менее предпочтительна, чем k-я, то указываются обратные оценки (1/3, 1/5, 1/7, 1/9). Могут использоваться промежуточные оценки (2, 4, 6, 8). На диагонали ставятся единицы, как это показано в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Матрица парных сравнений

A_i \ A_k	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	7	3	9
A_2	1/7	1	1/5	3
A_3	1/3	5	1	5
A_4	1/9	1/3	1/5	1

2. Находятся цены альтернатив – средние геометрические строк матрицы:

$$\mathrm{C}_i = \sqrt[N]{\prod_{k=i}^{N} X_{ik}}, \qquad i = 1, \dots, N,$$

где X_{ik} – степень предпочтительности i-го элемента матрицы над k-м.

Для данного примера

$C_1 = \sqrt[4]{1 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9} = 3{,}71$, $C_2 = \sqrt[4]{1/7 \cdot 1 \cdot 1/5 \cdot 3} = 0{,}54$, $C_3 = 1{,}7$,

$C_4 = 0{,}29$.

3. Находится сумма цен альтернатив:

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i.$$

В примере C = 3,71 + 0,54 + 1,7 + 0,29 = 6,24.

4. Находятся веса альтернатив:

$$V_i = \frac{C_i}{C}, \qquad i = 1, \dots, N,$$

V_1 = 3,71 / 6,24 = 0,595, V_2 = 0,4 / 6,24 = 0,087, V_3 = 1,7 / 6,24 = 0,272,
V_4 = 0,29 / 6,24 = 0,047.

Предпочтительной является альтернатива с максимальным весом: наиболее эффективной является реклама на телевидении; следующая за ней – реклама в газетах и т. д.

Проверка экспертных оценок на непротиворечивость

Проверка позволяет выявить ошибки эксперта при заполнении матрицы парных сравнений. Например, эксперт указывает, что альтернатива A_1 хуже, чем A_2, а альтернатива A_2 хуже, чем A_3. Но при этом эксперт указывает также, что A_1 лучше, чем A_3.

Для задачи о выборе вида рекламы (см. пример 2.1):

1. Находятся суммы столбцов матрицы парных сравнений:

$$R_k = \sum_{i=1}^{N} X_{ik}, \qquad k = 1, \dots, N,$$

R_1 = (1 + 1/7 + 1/3 + 1/9) = 1,588, R_2 = 13,333, R_3 = 4,4, R_4 = 18.

2. Рассчитывается вспомогательная величина λ путем суммирования произведений сумм столбцов матрицы на веса альтернатив:

$$\lambda = \sum_{k=1}^{N} R_k \cdot V_k,$$

λ = 1,588 · 0,594 + 13,333 · 0,087 + 4,4 · 0,272 + 18 · 0,047 = 4,07.

3. Находится величина, называемая индексом согласованности (ИС):

$$\text{ИС} = (\lambda - N) / (N - 1).$$

Для примера ИС = (4,07 – 4) / (4 – 1) = 0,023.

4. В зависимости от размерности матрицы парных сравнений находится величина случайной согласованности (СлС). Значения СлС приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Величины случайной согласованности

Размерность матрицы	3	4	5	6	7	8	9	10
СлС	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

В примере (для N = 4) СлС = 0,90.

5. Находится отношение согласованности:

$$\text{ОС} = \text{ИС} / \text{СлС}.$$

Если отношение согласованности превышает 0,2, то требуется уточнение матрицы парных сравнений. В примере ОС = 0,023 / 0,9 = 0,024, т. е. уточнение экспертных оценок в данном случае не требуется.

2.2. Метод предпочтений

Приводится на основе материалов источников [18; 19].

Относится к коллективным методам экспертных оценок. Каждый из экспертов независимо от других выполняет ранжирование альтернатив.

Пример 2.2. В ходе разработки плана мероприятий по повышению эффективности производства возникает задача определения степени влияния различных факторов на производительность труда. Требуется оценить влияние на рост производительности труда следующих факторов:

- уровень профессиональной подготовки рабочих (A_1);
- соблюдение технологической дисциплины (A_2);
- эффективность материальных стимулов (A_3);
- эффективность организации соревнования (A_4);
- технологическое перевооружение (A_5).

Оценка влияния факторов на производительность труда выполняется четырьмя экспертами.

Степень влияния факторов оценивается по методу предпочтений в следующем порядке:

1. Каждым экспертом ранжируются альтернативы по предпочтению. Эксперт присваивает номер 1 фактору, оказывающему наибольшее влияние, номер 2 – следующему по важности фактору и т. д. Оценки (табл. 2.4) сводятся в матрицу размером $M \times N$, где M – количество экспертов; N – количество альтернатив (в данном примере – количество факторов). Обозначим эти оценки как X_{ij}, $i = 1,\ldots,M$; $j = 1,\ldots,N$.

Таблица 2.4

Матрица экспертных оценок

Эксперт	Альтернатива (фактор)				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	2	1	3	5	4
2	2	3	1	5	4
3	1	3	2	5	4
4	2	1	4	5	3

Здесь первый эксперт считает, что наибольшее влияние на рост производительности труда может оказать соблюдение технологической дисциплины, следующий по важности фактор – уровень профессиональной подготовки рабочих и т. д.

2. Производится преобразование матрицы оценок по формуле

$$B_{ij} = N - X_{ij}, \qquad i = 1,\ldots,M, \qquad j = 1,\ldots,N.$$

Преобразованная матрица представлена в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Преобразованная матрица экспертных оценок

Эксперт	Альтернатива (фактор)				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	3	4	2	0	1
2	3	2	4	0	1
3	4	2	3	0	1
4	3	4	1	0	2

Например, $B_{12} = 5 - X_{12} = 5 - 1 = 4$.

3. Находятся суммы преобразованных оценок по каждой из альтернатив:

$$C_j = \sum_{i=1}^{M} B_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

В данном примере $C_1 = 3 + 3 + 4 + 3 = 13$, $C_2 = 4 + 2 + 2 + 4 = 12$, $C_3 = $ $= 10$, $C_4 = 0$, $C_5 = 5$.

4. Находится сумма всех оценок:

$$C = \sum_{j=1}^{N} C_j.$$

В примере C = 13 + 12 + 10 + 0 + 5 = 40.

5. Находятся веса альтернатив:

$$V_j = C_j \,/\, C, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

В примере: V_1 = 13 / 40 = 0,325, V_2 = 12 / 40 = 0,3, V_3 = 10 / 40 = 0,25, V_4 = 0 / 40 = 0, V_5 = 5 / 40 = 0,125.

Чем больше вес, тем более предпочтительной является альтернатива.

2.3. Метод ранга

Приводится на основе материала источника [19].

Метод основан на балльных оценках альтернатив, указываемых несколькими экспертами. Каждый из экспертов независимо от других оценивает альтернативы по некоторой шкале (обычно 10-балльной). Более предпочтительной альтернативе ставится больший балл.

Вариант решения примера 2.2:

1. Каждый эксперт указывает оценки альтернатив. Оценки сводятся в матрицу размером $M \times N$, где M – число экспертов; N – число альтернатив. Обозначим эти оценки как $X_{ij}, \quad i = 1, \ldots, M, \quad j = 1, \ldots, N$ (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Матрица экспертных оценок для метода ранга

Эксперт	Альтернатива (фактор)				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	10	10	7	2	6
2	10	9	10	4	6
3	10	8	10	3	7
4	9	10	6	2	9

Здесь первый эксперт считает, что наибольшее влияние на производительность труда оказывает уровень профессиональной подготовки рабочих и соблюдение технологической дисциплины, менее важный фактор – эффективность материальных стимулов и т. д.

2. Находятся суммарные оценки альтернатив всеми экспертами:

$$C_j = \sum_{i=1}^{M} X_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

В примере: C_1 = 10 + 10 + 10 + 9 = 39, C_2 = 10 + 9 + 8 + 10 = 37, C_3 = 33, C_4 = 11, C_5 = 28.

3. Находится сумма всех оценок:

$$C = \sum_{j=1}^{N} C_j.$$

В примере C = 39 + 37 + 33 + 11 + 28 = 148.

4. Находятся веса альтернатив:

$$V_j = C_j \,/\, C, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Наиболее предпочтительной является альтернатива, имеющая максимальный вес.

В примере: V_1 = 39 / 148 = 0,26, V_2 = 37 / 148 = 0,25, V_3 = 33 / 148 = 0,22, V_4 =11 / 148 = 0,07, V_5 = 28 / 148 = 0,19.

Итог: наиболее важным фактором, влияющим на производительность труда, признается уровень профессиональной подготовки рабочих, следующий по важности фактор (очень близкий к первому) – соблюдение технологической дисциплины и т. д.

2.4. Метод Кондорсе

Приводится на основе материала источников [11; 19].

Пять экспертов проранжировали пять альтернатив $a_1, \ldots, a_5$:

$$Э_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}, Э_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_5 \end{pmatrix}, Э_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_5 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, Э_4 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}, Э_5 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_5 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм метода:

1. Находятся оценки предпочтения альтернатив в парных сравнениях (табл 2.7).

Таблица 2.7

Результаты парных сравнений альтернатив для метода Кондорсе

m_{ik} / m_{ki}	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	–	3	3	4	4
a_2	2	–	4	5	5
a_3	2	1	–	3	4
a_4	1	0	2	–	2
a_5	1	0	1	3	–

2. Согласно принципу Кондорсе наилучшей является альтернатива a_i, если для всех $k \neq i, m_{ik} > m_{ki}$. Следовательно, лучшая альтернатива a_1.

2.5. Метод Кемени – Снелла

Приводится на основе материала источников [11; 19].

Пример 2.3. Десять экспертов ранжируют альтернативы $k_1, \ldots, k_4$ по важности: 1 – самая важная, 2 – менее важная и т. д. (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Результаты ранжирования альтернатив

Эксперт	Альтернатива			
	k_1	k_2	k_3	k_4
1	2	3	4	5
$Э_1$	3	2	1	4
$Э_2$	1	2	3	4
$Э_3$	3	1	2	4
$Э_4$	1	2	3	4

Окончание табл. 2.8

1	2	3	4	5
$Э_5$	3	1	2	4
$Э_6$	3	1	2	4
$Э_7$	3	2	4	1
$Э_8$	3	4	1	2
$Э_9$	2	4	1	3
$Э_{10}$	2	1	3	4

Алгоритм метода:

1. Исходя из частных ранжирований определяются матрицы бинарных предпочтений (табл. 2.9–2.11) с оценками:

$$\rho_{jk} = \begin{cases} 1, \text{если } k_i > k_k, & \\ -1, \text{если } k_k > k_i, & \\ 0, \text{если } k_i \infty k_k & (\textit{сопоставимы или нет информации}), \end{cases} \qquad \begin{array}{l} k = 1, \ldots, 4; \\ i = 1, \ldots, 4; \\ j = 1, \ldots, 10, \end{array}$$

где *j* – индекс эксперта; *k*, *i* – индексы альтернатив; > – знак предпочтения.

Таблица 2.9

Результаты бинарных предпочтений первого эксперта

$Э_1$	k_1	k_2	k_3	k_4
k_1	–	–1	–1	1
k_2	1	–	–1	1
k_3	1	1	–	1
k_4	–1	–1	–1	–

Таблица 2.10

Результаты бинарных предпочтений второго эксперта

$Э_2$	k_1	k_2	k_3	k_4
k_1	–	1	1	1
k_2	–1	–	1	1
k_3	–1	–1	–	1
k_4	–1	–1	–1	–

Таблица 2.11

Результаты бинарных предпочтений десятого эксперта

$Э_{10}$	k_1	k_2	k_3	k_4
k_1	–	–1	1	1
k_2	1	–	1	1
k_3	–1	–1	–	1
k_4	–1	–1	–1	–

2. Рассчитывается матрица потерь (табл. 2.12) с оценками:

$$r_{ik} = \sum_{j=1}^{10} \left| \rho_{ik}^{j} - 1 \right|, \ i = 1, \ldots, 4, \ k = 1, \ldots, 4.$$

Таблица 2.12

Матрица потерь для метода Кемени – Снелла

r_{ik}	k_1	k_2	k_3	k_4
k_1	–	12	12	4
k_2	8	–	6	6
k_3	8	14	–	2
k_4	16	14	18	–

Каждый элемент матрицы дает групповую оценку потерь i-й альтернативы относительно k-й. Например,

$r_{12} = |-1 - 1| + |1 - 1| + \ldots + |-1 - 1| = 12$.

3. Выполняется обработка матрицы потерь в несколько циклов. В каждом цикле для каждой альтернативы определяется сумма по строке. Альтернатива с меньшей суммой ставится на первое место, относящиеся к ней строка и столбец вычеркиваются.

Первый цикл:

$r_1 = 12 + 12 + 4 = 28$,

$r_2 = 8 + 6 + 6 = 20$,

$r_3 = 8 + 14 + 2 = 24$,

$r_4 = 16 + 14 + 18 = 48$.

В результате k_2 ставится на первое место, соответствующие ей вторые строка и столбец вычеркиваются.

Второй цикл:

$r_1 = 12 + 4 = 16$,

$r_3 = 8 + 2 = 10$,

$r_4 = 16 + 18 = 34$.

В результате k_3 ставится на второе место и т. д.

2.6. Метод парных сравнений

Приведено на основе материала источников [18; 19].

Относится к индивидуальным методам экспертных оценок.

Есть совокупность объектов $\{Z\}$.

Алгоритм метода:

1. Формируется матрица $\boldsymbol{a}$:

$$a_{ik}=\begin{cases} 1, & \text{если } Z_i > Z_k \text{ (предпочтение)}, \\ 0{,}5, & \text{если } Z_i \infty Z_k \text{ (соизмеримы)}, \\ 0, & \text{если } Z_i < Z_k, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где i, k – индексы объектов; > и < – знаки предпочтения.

2. Определяются цены объектов суммированием элементов строк:

$$V_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} .$$

3. Рассчитываются веса объектов w_i:

$$w_i = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пример 2.4. Рассмотрим варианты решения транспортной проблемы: Z_1 – метро, Z_2 – двухэтажный автобус, Z_3 – расширение сети дорог, Z_4 – скоростной трамвай.

Эксперт формирует матрицу парных сравнений (табл. 2.13).

Таблица 2.13

Результаты парных сравнений альтернатив

i / k	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	V_i
Z_1	–	1	1	1	3
Z_2	0	–	0	0	0
Z_3	0	1	–	1	2
Z_4	0	1	0	–	1

Так как w_1 = 3 / 6 = 0,5, w_2 = 0, w_3 = 2 / 6 = 0,33, w_4 = 1 / 6 = 0,17, располагаем объекты в порядке предпочтения: Z_1, Z_3, Z_4, Z_2.

3. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛЬТЕРНАТИВ С УЧЕТОМ СОВОКУПНОСТИ ЧАСТНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

3.1. Постановка задачи

Приводится на основе материала источника [17].

В качестве исходных данных:

- множество альтернатив системы

$$\boldsymbol{S} = \{S_1, \dots, S_i, \dots, S_n\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где S_i – i-я альтернатива;

- каждая альтернатива оценивается $\boldsymbol{K}$ совокупностью частных показателей различной природы (числовые, вербальные, балльные и т. д.):

$$\boldsymbol{K}_i = \left\{K_{1i}, \dots, K_{ji}, \dots, K_{mi}\right\}, \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n,$$

где K_{ji} – j-й частный показатель i-й альтернативы;

- возможные сочетания факторов формируют вектор $\boldsymbol{Y}$ вариантов среды реализации альтернатив:

$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_\alpha, \dots, Y_A),$$

где Y_α – α-вариант реализации среды;

- для оценки альтернатив в диапазоне условий необходимо проанализировать матрицы $\boldsymbol{K(Y_1)}, \dots, \boldsymbol{K(Y_\alpha)}, \dots, \boldsymbol{K(Y_A)}$:

$$\boldsymbol{K(Y_\alpha)} = \left| \begin{matrix} k_{11}(Y_\alpha), \dots, k_{1i}(Y_\alpha), \dots, k_{1n}(Y_\alpha) \\ \dots \quad\quad \dots \quad\quad \dots \\ k_{j1}(Y_\alpha), \dots, k_{ji}(Y_\alpha), \dots, k_{jn}(Y_\alpha) \\ \dots \quad\quad \dots \quad\quad \dots \\ k_{m1}(Y_\alpha), \dots, k_{mi}(Y_\alpha), \dots, k_{mn}(Y_\alpha) \end{matrix} \right|, \quad \alpha = 1, \dots, A, \tag{3.1}$$

где $k_{ji}(Y_\alpha)$ – оценка j-го показателя i-й альтернативы в условиях Y_α реализации среды.

Анализ матриц (3.1) включает два этапа. На первом этапе для каждого конкретного варианта условий среды определяется рациональная альтернатива (столбец матрицы (3.1)) $S\,(\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, A$. На втором этапе выбирается рациональная альтернатива S_{rat} с учетом диапазона условий среды.

$$S_{rat} = f(S(1), \dots, S(\alpha), \dots, S(A)),$$

где f – функция выбора ЛПР.

Выбор $S\ (\alpha)$, где $\alpha = 1, \dots, A$, можно реализовать двумя подходами.

Первый подход. Комплексный сравнительный анализ содержимых столбцов матрицы (3.1). Возможные методы такого решения рассматриваются в подразд. 3.2.

Второй подход. Ввиду того что комплексная оценка с использованием совокупности показателей на практике довольно затруднительна, для сравнительного анализа альтернатив целесообразно использовать обобщенные показатели E, которые позволяют оценить преимущества тех или иных альтернатив без претензии на абсолютные оценки их эффективности [6; 7; 17]:

$$E = f(K_1, \dots, K_j, \dots, K_m),$$

где f – модель формирования обобщенного показателя на базе частных показателей.

В этом случае для выбора рациональной альтернативы в диапазоне условий реализации необходимо проанализировать матрицу

$$\boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} E_1(Y_1), \dots, E_1(Y_\alpha), \dots, E_1(Y_A) \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ E_i(Y_1), \dots, E_i(Y_\alpha), \dots, E_i(Y_A) \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ E_n(Y_1), \dots, E_n(Y_\alpha), \dots, E_n(Y_A) \end{vmatrix}, \tag{3.2}$$

где $E_i(Y_\alpha)$ – оценка обобщенного показателя i-й альтернативы в условиях Y_α реализации среды.

При известном наборе условий среды $Y(\alpha)$ матрица $\boldsymbol{E}$ даст достаточную информацию для выбора рациональной альтернативы с помощью моделей математического программирования, критериев теории игр и т. д.

В условиях риска возможные сочетания факторов среды рассматриваются в качестве случайной величины с известным законом распределения ее исходов:

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} Y_1, & \dots, & Y_\alpha, & \dots, & Y_A \\ P(Y_1), & \dots, & P(Y_\alpha), & \dots, & P(Y_A) \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где $P(Y_\alpha)$ – вероятности Y_α исхода случайной величины $\boldsymbol{Y}$, $\alpha = 1, \dots, A$.

В этом случае исходной информацией для выбора рациональной альтернативы являются матрица $\boldsymbol{E}$ и закон распределения параметра $\boldsymbol{Y}$. Для решения задачи можно использовать два приема.

Первый прием – замена случайной величины $\boldsymbol{Y}$ ее математическим ожиданием $\boldsymbol{Y} \to M[\boldsymbol{Y}]$ и анализ элементов столбца матрицы $\boldsymbol{E}$ со значением индекса α, численно равным или ближайшим к значению $M[\boldsymbol{Y}]$.

Критерий выбора рациональной альтернативы в этом случае

$$S_{rat} = \max_i(\overline{E_1}, \dots, \overline{E_i}, \dots, \overline{E_n}), \tag{3.4}$$

где $\overline{E_i}$ – элементы столбца матрицы $\boldsymbol{E}$ с индексом $\alpha \approx M[\boldsymbol{Y}]$; $E_i = E_i\ (M[\boldsymbol{Y}])$; $i = 1, \dots, n$.

Второй прием (критерий Байеса) – «взвешивание» элементов строк матрицы $\boldsymbol{E}$ на соответствующие вероятности $P(Y_\alpha)$, α = 1, …, A:

$$E_i{}^* = \sum_{\alpha=1}^{A} E_i(Y_\alpha) \cdot P(Y_\alpha), \qquad i = 1, \dots, n,$$

где $E_i{}^*$– математическое ожидание обобщенного показателя i-й альтернативы.

В соответствии с критерием Байеса выбор рационального варианта осуществляется по правилу

$$S_{rat} = \max_i(E_1{}^*, \dots, E_i{}^*, \dots, E_n{}^*). \tag{3.5}$$

При выборе в условиях неопределенности случайная величина $\boldsymbol{Y}$ может быть представлена возможным диапазоном значений исходов. В этом случае следует рассматривать матрицу $\boldsymbol{E}$ вида (3.2) в качестве игровой матрицы выигрышей для выбора рациональной альтернативы с помощью критериев из теории игр: Лапласа, Гурвица, Вальда и т. д.

Рассмотрим методы реализации этих подходов.

3.2. Методы комплексного сравнительного анализа альтернатив

Матрицу (3.1) для α-варианта условий среды представим в виде

$$K(\alpha) = \begin{vmatrix} k_{11}, \dots, & k_{1i}, \dots, & k_{1n} \\ k_{j1}, \dots, & k_{ji}, \dots, & k_{jn} \\ k_{m1}, \dots, & k_{mi}, \dots, & k_{mn} \end{vmatrix}, \tag{3.6}$$

где k_{ji} – оценка j-го частного показателя i-й альтернативы различной природы с разными шкалами измерения и направления экстремума.

Оценки бывают:

- числовые, в том числе статистической природы;
- нечисловые вербальные (качественные);
- балльные;
- ранговые оценки предпочтительности альтернатив с позиций экспертов.

Исключим из рассмотрения случаи полного превосходства одной из альтернатив, т. е. располагаем множеством компромиссных вариантов.

Необходимо найти рациональную альтернативу (столбец матрицы (3.6)) с учетом оценок частных показателей ограничений, накладываемых на эти оценки системы предпочтений ЛПР относительно совокупности частных показателей.

Прежде всего конвертируем оценки частных показателей различной природы (вербальные, балльные, ранговые) в числовые. Рассмотрим некоторые методы конвертации этих оценок в числовые безразмерные оценки с единой шкалой измерения.

Метод 1. Позволяет конвертировать матрицу ***K*** числовых оценок альтернатив различной размерности и с разными шкалами измерения в матрицу безразмерных оценок, пронормированных в интервале [0, 1]:

$$\varphi_{ji} = \left| \begin{matrix} \varphi_{11}, \dots, \varphi_{1i}, \dots, \varphi_{1n} \\ \dots \quad\quad \dots \quad\quad \dots \\ \varphi_{m1}, \dots, \varphi_{mi}, \dots, \varphi_{mn} \end{matrix} \right|, \tag{3.7}$$

где $\varphi_{ji},\ j = 1, \dots, m,\ i = 1, \dots, n$ рассчитывается по формуле

$$\varphi_{ji} = \begin{cases} \dfrac{K_{ji}}{\max\limits_{i} K_{ji}}, & \text{для } K_j \to \max, \\ \dfrac{\min\limits_{i} K_{ji}}{K_{ji}}, & \text{для } K_j \to \min, \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \tag{3.8}$$

Для j-го показателя, подлежащего максимизации, все элементы j-й строки матрицы ***K*** делятся на максимальный элемент этой строки. Для j-го показателя, подлежащего минимизации, выбирается минимальный элемент j-й строки матрицы ***K***, и он делится на элементы j-й строки.

Метод 2. По аналогии с предыдущим методом элементы матрицы φ нормируются относительно эталонных (идеальных) оценок $K_{jo},\ j = 1, \dots, m$.

Метод 3. Шкала Харрингтона [9].

Относится к психофизическим шкалам для установления соответствия между числовыми и вербальными, балльными оценками. Вербально-балльная числовая шкала Харрингтона представлена в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Шкала Харрингтона

Вербальная оценка	Балльная оценка	Шкала Харрингтона (*Y*)
Очень высокая	5	0,8–1,0
Высокая	4	0,63–0,8
Средняя	3	0,37–0,63
Низкая	2	0,2–0,37
Очень низкая	1	0–0,2

Численные значения градаций шкалы Харрингтона получены на основе анализа и обработки большого массива статистических экспертных данных. Она переводит вербальные и балльные оценки в количественные в интервале от 0 до 1 на основе статистической обработки психологических особенностей человека (психометрическая шкала). Шкала Харрингтона универсальна и может использоваться для оценки различных качественных показателей [9].

Исходная психометрическая шкала для построения шкалы Харрингтона – это шкала Ликерта. Обычно в ней выделяют пять градаций, например:

- полностью не согласен;
- не согласен;
- что-то среднее;
- согласен;
- полностью согласен.

Шкала Ликерта порядковая, а Харрингтон перевел ее в количественную, задающую ширину интервалов (интервальную шкалу).

$$Y = \exp(-\exp(-x)), \qquad x \in [-6{,}6], y \in (0{,}1).$$

В табл. 3.1 представлены числа, соответствующие точкам кривой желательности (полезности) Харрингтона (рис. 3.1).

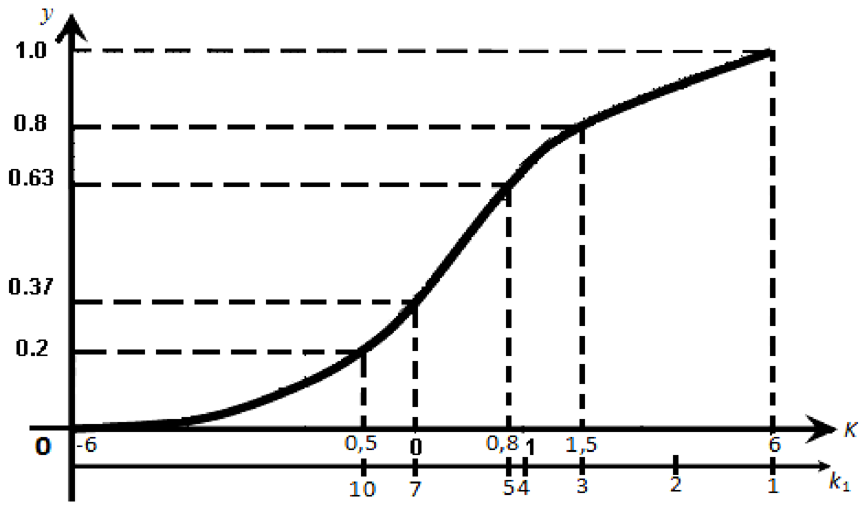

Рис. 3.1. Шкала Харрингтона

На оси ординат нанесены значения желательности, изменяющиеся от 0 до 1. По оси абсцисс указаны значения параметра, записанные в условном масштабе. За начало отсчета (обозначено 0) на оси ординат по этой оси выбрано значение, соответствующее желательности 0,37.

Выбор отметок 0,63 и 0,37 на оси желательности Y объясняется удобством вычислений: 0,63 = 1 – (1 / e); 0,37 = 1 / e. Значение Y = 0,37 обычно соответствует нижней допустимой границе желательности. Выбор именно этой точки связан с тем, что она является точкой перегиба кривой. То же самое верно и для желательности, соответствующей 0,63.

Шкала Харрингтона позволяет:

- перевести вербальную и балльную оценку показателя в числовую;
- числовые показатели разной размерности и различными шкалами измерения перевести в безразмерные оценки, пронормированные в интервале [0, 1].

В первом случае вербально-балльную оценку показателя можно конвертировать в среднюю оценку соответствующего диапазона на оси желательности Y. Например, если показатель K_j имеет вербальную оценку «очень высоко», или балльную «5», то K_j = 0,9 (средняя оценка диапазона 0,8–1), если K_j равняется «средней» оценке, то K_j = 0,5 и т. д.

Во втором случае задача решается в несколько этапов.

Этап 1. Рассматриваемые оценки показателей калибруем согласно шкале Харрингтона (см. табл. 3.1) путем опроса экспертов или анализа альтернатив.

Например, показатель K_1 (время реакции системы) для систем данного класса калиброван следующим образом:

- очень высокой оценке соответствует диапазон K_1 = 1–3 с;
- высокой оценке – K_1= 3–5 с;
- хорошей оценке – K_1 = 5–7 с и т. д.

Этап 2. Строим шкалу показателя K_1 под осью X (см. рис. 3.1). На шкале показателя размещаем интервал K_1 = 1–3 с в качестве проекции интервала оси X = 1,5–6 с, соответствующего очень высокой оценке желательности, интервал на оси K_1 = 3–5 с – под интервалом оси X = 0,8–1,5, соответствующем высокой оценке желательности, и т. д.

На третьем этапе размещаем конкретные оценки показателей K_1, считываем соответствующие им ординаты графика на оси желательности Y в качестве безразмерных пронормированных оценок. Если $K_1 = 2$ с, то в качестве безразмерной пронормированной оценки показателя получается ордината Y = 0,9, т. е. K_1 = 0,9.

3.2.1. Метод сравнительного анализа альтернатив по главному частному показателю

Приводится на основе материала источника [17].

Этап 1. Определяется главный частный показатель с учетом предпочтений ЛПР $k_J,\ J \in m$.

Этап 2. Вводятся ограничения на частные показатели:

$$\underline{k}_{ji} \le k_{ji} \le \overline{k}_{ji},\ j = 1,\ \dots, m,\ i = 1, \dots, n,$$

где $\underline{k}_{ji}, \overline{k}_{ji}$ – минимальная и максимальная допустимые оценки частных показателей соответственно.

Этап 3. Не рассматриваются альтернативы, у которых хотя бы один частный показатель не удовлетворяет ограничениям.

Этап 4. Из оставшихся альтернатив выбирается рациональная с экстремальной оценкой $k_{Ji},\ i = 1, \dots, n$.

$$S_{rat} = extr\left(k_{J1}, \dots, k_{Ji}, \dots, k_{Jn}\right),$$

$$\underline{k}_{ji} \le k_{ji} \le \overline{k}_{ji},\ j = 1, \dots, m,\ i = 1, \dots, n, j \ne J.$$

В ряде случаев для сравнительного анализа рассматривают функциональные зависимости нескольких «главных» показателей $f\left(k_{Ji}, \dots, k_{Li}\right)$, где $k_{Ji}, \dots, k_{Li}$ – «главные» показатели. С учетом функциональных зависимостей критерий выбора:

$$S_{rat} = extr\left(f(k_{J1}, \dots, k_{L1}), \dots, f(k_{Ji}, \dots, k_{Li}), \dots, f(k_{Jn}, \dots, k_{Ln})\right)$$

при

$$\underline{B}_\gamma \le B_\gamma\left(k_{ji}, \dots, k_{\beta i}\right) \le \overline{B}_\gamma,\ i = 1, \dots, n,\ j, \beta \in m.$$

Здесь j, β – индексы частных показателей ограничений; $B_\gamma, \gamma = 1, \dots, \Gamma$ – варианты функциональных зависимостей, накладываемых на частные показатели ограничений; $\underline{B}_\gamma, \overline{B}_\gamma$ – нижние и верхние допустимые значения для функции $B_\gamma, \gamma = 1, \dots, \Gamma$, соответственно.

Для решения задачи в такой постановке применяется аппарат математического программирования. С учетом характера функций f, $B_\gamma, \gamma =$ $= 1, \dots, \Gamma$, используется аппарат линейного, нелинейного и т. д. программирования.

3.2.2. Методы сравнительного анализа альтернатив с последовательным учетом ранжированных по важности частных показателей. Метод уступок

Приводится на основе материала источника [6].

Рассмотрим вариант реализации подхода метода уступок для анализа матрицы вида (3.6).

Этап 1. Частные показатели ранжируются по важности с учетом предпочтений ЛПР:

$$\beta_1, \dots, \beta_j, \dots, \beta_m,$$

$$\sum_j \beta_j = 1,$$

где β_j, j = 1, ..., m – коэффициенты важности частных показателей, формируемые с помощью МЭО (метод парных сравнений, метод Саати и т. д.).

Этапы 2–3. По аналогии с этапами 2 и 3 предыдущего метода формируем усеченную матрицу ***K*** допустимых альтернатив.

Этап 4. С помощью процедур конвертации (см. подразд. 3.2) от матрицы ***K*** переходим к матрице $|\varphi_{ji}|$ вида (3.7) числовых безразмерных оценок частных показателей, пронормированных в интервале [0, 1]:

$$\boldsymbol{K} \rightarrow |\varphi_{ji}|,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

Этап 5. Для каждого частного показателя находим максимальный элемент в строке $\max\limits_i \varphi_j$, i = 1, ..., m, i = 1, ..., n.

Этап 6. Представим элементы матрицы $|\varphi_{ji}|$ модулями отклонений текущих элементов строк от максимальных значений каждой строки:

$$|\varphi_{ji}| = \left\| \begin{matrix} \left|\varphi_{11} - \max\limits_i \varphi_1\right|, \ldots, \left|\varphi_{1i} - \max\limits_i \varphi_1\right|, \ldots, \left|\varphi_{1n} - \max\limits_i \varphi_1\right| \\ \cdots \\ \left|\varphi_{j1} - \max\limits_i \varphi_j\right|, \ldots, \left|\varphi_{j1} - \max\limits_i \varphi_j\right|, \ldots, \left|\varphi_{jn} - \max\limits_i \varphi_j\right| \\ \cdots \\ \left|\varphi_{m1} - \max\limits_i \varphi_m\right|, \ldots, \left|\varphi_{mi} - \max\limits_i \varphi_m\right|, \ldots, \left|\varphi_{mn} - \max\limits_i \varphi_m\right| \end{matrix} \right\|. \quad (3.9)$$

Компоненты матрицы (3.9) представляют собой модули уступок альтернатив по j-му частному показателю лучшей альтернативе с этим показателем.

Этап 7. Определяется S_{rat}, обеспечивающая минимум суммы уступок по всем частным показателям с учетом их важности:

$$S_{rat} = \min_i \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_{ji} - \max_i \varphi_j\right| \cdot \beta_j.$$

3.2.3. Модифицированный алгоритм Кемени – Снелла

Приводится пример на основе материала источника [19].

Этап 1. С помощью МЭО определяются коэффициенты важности частных показателей $\boldsymbol{V}_j, j = 1, \ldots, m,$

$$\sum_j V_j = 1.$$

Этапы 2–4. По аналогии с предыдущим методом вводим ограничение на частные показатели, конвертируем усеченную матрицу ***K*** в матрицу $|\varphi_{jn}|$, $i =$ $= 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Отличительной особенностью рассматриваемого алгоритма является возможность работать как с числовой матрицей $|\varphi_{jn}|$, так и с матрицей рангов альтернатив по частным показателям:

$$|r_{ji}| = \begin{vmatrix} r_{11}, \ldots\ r_{1i}, \ldots, r_{1n} \\ r_{j1}, \ldots\ r_{ji}, \ldots, r_{jn} \\ r_{m1}, \ldots\ r_{mi}, \ldots, r_{mn} \end{vmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, m, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.10}$$

где r_{ji} – ранг i-й альтернативы среди всех альтернатив по j-му частному показателю, т. е. ее место в порядке предпочтения по рассматриваемому частному показателю.

Этап 5. На основании матрицы $|\varphi_{ji}|$ или матрицы рангов (3.10) составляются матрицы парных сравнений R_i^j, $d, j = 1, \ldots, m$ (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Правила заполнения матриц парных сравнений для алгоритма Кемени – Снелла

R_i^j, d	Значение
1	По j-му показателю $\varphi_{ji} > \varphi_{jd}$ или $r_{ji} > r_{jd}$
–1	По j-му показателю $\varphi_{jd} > \varphi_{ji}$ или $r_{jd} > r_{ji}$
0	По j-му показателю $\varphi_{ji} = \varphi_{jd}$ или $r_{ji} = r_{jd}$

Здесь знаки > и = означают предпочтение и равнозначность соответственно.

Всего должно быть m матриц парных сравнений.

Этап 6. На основании m матриц парных сравнений формируется матрица потерь размерностью $n \times n$. Элементы матрицы потерь рассчитываются по формуле

$$R_{id} = \sum_{j=1}^{m} V_j\ |R_{id}^j - 1|, \qquad i, d = 1, \ldots, n, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Смысл элементов матрицы потерь следующий: чем больше элемент R_{id}, тем больше отставание i-й альтернативы от d-й (тем хуже i-я альтернатива по сравнению с d-й).

Этап 7. Выполняется предварительное ранжирование альтернатив. Для этого находятся суммы строк матрицы потерь. Смысл этих сумм следующий: сумма i-й строки представляет собой оценку отставания i-й альтернативы от всех остальных альтернатив.

Альтернатива, которой соответствует минимальная сумма, предварительно считается лучшей. Строка и столбец этой альтернативы исключаются из матрицы потерь.

Суммирование строк матрицы потерь и исключение альтернатив выполняются до тех пор, пока не будет исключена вся матрица. Чем раньше исключена альтернатива, тем она лучше.

Этап 8. Выполняется окончательное ранжирование альтернатив. Для этого альтернативы сравниваются попарно, начиная с конца предварительного ранжирования. Если сравниваются i-я и d-я альтернативы (при этом i-я альтернатива в предварительном ранжировании находится выше d-й) и выполняется условие $R_{id} \leq R_{di}$, где R_{id} и R_{di} – элементы матрицы потерь, то альтернативы остаются в ранжировании на прежних местах (i-я альтернатива лучше d-й). Если $R_{id} > R_{di}$, то альтернативы меняются местами (i-я альтернатива хуже d-й).

Рассмотрим пример сравнительного анализа альтернатив C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 по показателям $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ с весами (этап 1):

$V_1 = 0{,}25$, $V_2 = 0{,}10$, $V_3 = 0{,}28$, $V_4 = 0{,}10$.

При этом работаем с матрицей рангов альтернатив, составленной ЛПР по частным показателям (переходим к этапу 4).

Этап 4. Выполняется ранжирование альтернатив по каждому из показателей. При этом лучшая альтернатива по данному показателю получает оценку (ранг) 1, следующая за ней – оценку 2 и т. д. Если альтернативы по данному показателю одинаковы, то они получают одинаковые оценки (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Матрица ранжирований

П \ С	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$П_1$	3	1	2	1	3
$П_2$	2	1	2	2	1
$П_3$	3	2	4	1	2
$П_4$	1	5	3	4	2

Этап 5. Матрицы парных сравнений по показателям $П_1$–$П_4$ приведены в табл. 3.4–3.7.

Например, в табл. 3.4 элемент $R_{12}^1 = -1$ означает, что по показателю C_1 хуже, чем C_2. Элемент $R_{23}^1 = 1$ означает, что C_2 лучше, чем C_3, $R_{24}^1 = 0$ означает, что по этому показателю C_2 и C_4 одинаковы.

Таблица 3.4

Парные сравнения по показателю $П_1$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	–	–1	–1	–1	0
C_2	1	–	1	0	1
C_3	1	–1	–	–1	1
C_4	1	0	1	–	1
C_5	0	–1	–1	–1	–

Таблица 3.5

Парные сравнения по показателю $П_2$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	–	–1	0	0	–1
C_2	1	–	1	1	0
C_3	0	–1	–	0	–1
C_4	0	–1	0	–	–1
C_5	1	0	1	1	–

Таблица 3.6

Парные сравнения по показателю $П_3$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	–	–1	1	–1	–1
C_2	1	–	1	–1	0
C_3	–1	–1	–	–1	–1
C_4	1	1	1	–	1
C_5	1	0	1	–1	–

Таблица 3.7

Парные сравнения по показателю $П_4$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	–	1	1	1	1
C_2	–1	–	–1	–1	–1
C_3	–1	1	–	1	–1
C_4	–1	1	–1	–	–1
C_5	–1	1	1	1	–

Этап 6. Составляется матрица потерь. Размерность матрицы – $N \times N$, где N – количество альтернатив. Элементы матрицы потерь рассчитываются по следующей формуле:

$$R_{id} = \sum_{j=1}^{m} V_j \cdot \left| R_{id}^{i} - 1 \right|, \qquad j = 1, \ldots, m, \qquad kd \in N.$$

Матрица потерь для рассматриваемого примера приведена в табл. 3.8.

Таблица 3.8

Матрица потерь

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	–	1,80	1,14	1,70	1,28
C_2	0,20	–	0,20	1,28	0,58
C_3	0,86	1,80	–	1,70	0,96
C_4	0,30	0,72	0,30	–	0,40
C_5	0,72	1,42	1,04	1,60	–

Приведем примеры расчета некоторых элементов матрицы потерь:

$$R_{12} = V_1 \cdot |R_{12}^1 - 1| + V_2 \cdot |R_{12}^2 - 1| + V_3 \cdot |R_{12}^3 - 1| + V_4 \cdot |R_{12}^4 - 1| =$$
$$= 0{,}52 \cdot |-1 - 1| + 0{,}10 \cdot |-1 - 1| + 0{,}28 \cdot |-1 - 1| + 0{,}10 \cdot |1 - 1| = 1{,}80,$$
$$R_{25} = V_1 \cdot |R_{25}^1 - 1| + V_2 \cdot \left|R_{25}^2 - 1\right| + V_3 \cdot \left|R_{25}^3 - 1\right| + V_4 \cdot |R_{25}^4 - 1| =$$
$$= 0{,}52 \cdot |1 - 1| + 0{,}10 \cdot |0 - 1| + 0{,}28 \cdot |0 - 1| + 0{,}10 \cdot |-1 - 1| = 0{,}58.$$

Этап 7. Выполним предварительное ранжирование для рассматриваемого примера. Найдем суммы строк матрицы потерь:

P_1 = 1,80 + 1,14 + 1,70 + 1,28 = 5,92,
P_2 = 0,20 + 0,20 + 1,28 + 0,58 = 2,26,
P_3 = 0,86 + 1,80 + 1,70 + 0,96 = 5,33,
P_4 = 0,30 + 0,72 + 0,30 + 0,40 = 1,71,
P_5 = 0,72 + 1,42 + 1,04 + 1,60 = 4,78.

Предварительно лучшей считается альтернатива C_4. Она исключается из матрицы потерь.

Сокращенная матрица потерь приведена в табл. 3.9.

Таблица 3.9

Первая сокращенная матрица потерь

	C_1	C_2	C_3	C_5
C_1	–	1,80	1,14	1,28
C_2	0,20	–	0,20	0,58
C_3	0,86	1,80	–	0,96
C_5	0,72	1,42	1,04	–

Суммы строк этой матрицы: P_1 = 4,22, P_2 = 0,98, P_3 = 3,63, P_5 = 3,17. Исключается альтернатива C_2.

Вторая сокращенная матрица потерь приведена в табл. 3.10.

Таблица 3.10

Вторая сокращенная матрица потерь

	C_1	C_3	C_5
C_1	–	1,14	1,28
C_3	0,86	–	0,96
C_5	0,72	1,04	–

Суммы строк этой матрицы: P_1 = 2,42, P_3 = 1,83, P_5 = 1,76. Исключается альтернатива C_5.

Третья сокращенная матрица потерь приведена в табл. 3.11.

Таблица 3.11

Третья сокращенная матрица потерь

	C_1	C_3
C_1	–	1,14
C_3	0,86	–

Суммы строк этой матрицы: P_1 = 1,14, P_3 = 0,86. Лучшая альтернатива (из двух оставшихся) – C_3.

Предварительное ранжирование альтернатив: C_4, C_2, C_5, C_3, C_1.

Этап 8. Выполним окончательное ранжирование для данной задачи.

Сравниваем C_3 и C_1: R_{31} = 0,86, R_{13} = 1,14. Так как $R_{31} < R_{13}$, альтернативы остаются на своих местах (C_3 выше, чем C_1).

Сравниваем C_5 и C_3: R_{53} = 1,04, R_{35} = 0,96. Так как $R_{53} > R_{35}$, альтернативы меняются местами: альтернатива C_3 признается лучшей, чем C_5. Ранжирование теперь имеет следующий вид: C_4, C_2, C_3, C_5, C_1.

Сравниваем C_2 и C_3: R_{23} = 0,20, R_{32} = 1,80. Так как $R_{23} < R_{32}$, альтернативы остаются на прежних местах (C_2 выше, чем C_3).

Сравниваем C_4 и C_2: R_{42} = 0,72, R_{24} = 1,28. Так как $R_{42} < R_{24}$, альтернативы остаются на прежних местах (C_4 выше, чем C_2).

Таким образом, окончательное ранжирование альтернатив следующее: C_4, C_2, C_3, C_5, C_1. Лучший вариант действий для фирмы – создание совместного предприятия в стране, обозначенной как C_4.

3.2.4. Метод ELECTRE

Приведено на основе материала источников [12; 13].

Основан на попарном сравнении многокритериальных альтернатив. При этом оперируют не с количественными оценками показателей качества альтернатив, а с оценками превосходства между ними по этим показателям.

В качестве исходных данных:

- множество альтернатив системы:

$$\boldsymbol{S} = \{S_1, \dots, S_i, \dots, S_n\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где S_i – i-я альтернатива;

- каждая альтернатива оценивается $\boldsymbol{K}$ совокупностью частных показателей различной природы (числовые, вербальные, балльные и т. д.):

$$\boldsymbol{K}_i = \left\{K_{1i}, \dots, K_{ji}, \dots, K_{mi}\right\}, \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n,$$

где K_{ji} – j-й частный показатель i-й альтернативы;

- формируется матрица оценок альтернатив по частным показателям:

$$\boldsymbol{K} = \begin{vmatrix} k_{11}, \dots, k_{1i}, \dots, k_{1n} \\ k_{j1}, \dots, k_{ji}, \dots, k_{jn} \\ k_{m1}, \dots, k_{mi}, \dots, k_{mn} \end{vmatrix},$$

где k_{ji} – оценка j-го частного показателя i-й альтернативы различной природы с разными шкалами измерения и направления экстремума;

- определяются веса частных показателей:

$$\beta_1, \dots, \beta_j, \dots, \beta_m,$$
$$\sum_j \beta_j = 1,$$

где β_j; $j = 1, \dots, m$ – коэффициенты важности частных показателей, формируемые с помощью МЭО (метод парных сравнений, метод Саати и т. д.);

- с помощью процедур конвертации (см. подразд. 3.2) от матрицы $\boldsymbol{K}$ переходим к матрице $|\varphi_{ji}|$ вида (3.7) числовых безразмерных оценок частных показателей, пронормированных в интервале [0, 1]:

$$\boldsymbol{K} \rightarrow |\varphi_{ji}|, \; i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m.$$

Необходимо упорядочить альтернативы по их предпочтению и определить S_{rat}.

Этапы метода

Этап 1. На основании матрицы $|\varphi_{ji}|$ для каждой пары альтернатив определяются индексы согласия:

$$C_{id} = \sum_{j \in K^+} \beta_j, \quad i, d \in n, \quad C_{id} \in [0; 1],$$

и несогласия:

$$D_{id} = \max_{j \in K^-} \{|\varphi_{ji} - \varphi_{jd}|\}, \quad i, d \in n, \quad D_{id} \in [0; 1],$$

где K^+ – множество частных показателей $K^+ \epsilon\, m$, по которым альтернатива S_i превосходит альтернативу S_d или не уступает ей; K^- – подмножество частных показателей, по которым альтернатива S_i не превосходит S_d.

Эти индексы определяют степень согласия и несогласия экспертов с гипотезой, что альтернатива S_i превосходит альтернативу S_d. При этом чем ближе индекс C_{id} к единице, а индекс D_{id} – к нулю, тем достовернее гипотеза о превосходстве альтернативы S_i над S_d.

Этап 2. Задаются уровни согласия и несогласия, с которыми сравниваются подсчитанные индексы для каждой пары альтернатив (пороговые значения). Если индекс согласия выше заданного уровня, а индекс несогласия – ниже, то одна из альтернатив превосходит другую. В противном случае альтернативы несравнимы.

Из множества альтернатив удаляются доминируемые. Оставшиеся образуют первое ядро. Альтернативы, входящие в ядро, могут быть либо эквивалентными, либо несравнимыми.

Этап 3. Вводятся более «слабые» значения уровней согласия и несогласия (меньший по значению уровень согласия и больший уровень несогласия), при которых выделяются ядра с меньшим количеством альтернатив.

Этап 4. В последнее ядро входят наилучшие альтернативы. Последовательность ядер определяет упорядоченность альтернатив по качеству.

В различных методах семейства ELECTRE индексы согласия и несогласия строятся по-разному. Основные идеи построения этих индексов показаны на примере.

Пример. В качестве исходных данных задана матрица безразмерных, пронормированных оценок (табл. 3.12).

Таблица 3.12

Матрица оценок

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
K_1	0,9	0,72	0,5	0,29	0,25
K_2	0,9	0,72	0,29	0,5	0,29
K_3	0,1	0,29	0,1	0,72	0,72
K_4	0,5	0,9	0,1	0,72	0,9

Веса частных показателей:

$$\beta_1 = 0{,}1,\ \beta_2 = 0{,}35,\ \beta_3 = 0{,}35,\ \beta_4 = 0{,}2.$$

Этап 1. На основании табл. 3.12 рассчитаем индексы $C_{id},\ D_{id},\ i, d \in n$ (табл. 3.13, 3.14).

Таблица 3.13

Таблица индексов согласия

C_{id}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	–	0,45	1	0,45	0,45
S_2	0,55	–	1	0,65	0,65
S_3	0,35	0	–	0,1	0,45
S_4	0,55	0,35	0,9	–	0,8
S_5	0,55	0,55	0,9	0,55	–

Здесь $C_{12} = \beta_1 + \beta_2 = 0{,}45$, $C_{13} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1, C_{21} = \beta_3 + + \beta_4 = 0{,}55$ и т. д.

Таблица 3.14

Таблица индексов несогласия

D_{id}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	–	0,4	0	0,62	0,62
S_2	0,18	–	0	0,43	0,43
S_3	0,61	0,8	–	0,62	0,8
S_4	0,61	0,43	0,61	–	0,18
S_5	0,65	0,47	0,25	0,21	–

Здесь $D_{12} = \max\{|0{,}1 - 0{,}29|, |0{,}5 - 0{,}9|\} = 0{,}4$, $D_{13} = \max\{|0{,}1 - 0{,}1|\} = = 0$, $D_{21} = \max\{|0{,}72 - 0{,}9|, |0{,}72 - 0{,}9|\} = 0{,}18$ и т. д.

Этап 2. Задаются пороговые значения $C_0 = 0{,}4$, $D_0 = 0{,}7$. Сформируем первое ядро с условиями $C_{id} > C_0$ и $D_{id} < D_0$, $i, d \in n$:

$C_0 = 0{,}4$: S_1, S_2, S_5,

$D_0 = 0{,}7$: S_1, S_2, S_4, S_5.

Первое ядро: S_1, S_2, S_5. Альтернативы S_4, S_3 являются либо доминируемыми, либо несравнимыми.

Этап 3. Скорректируем пороговые значения $C_0 = 0{,}5$, $D_0 = 0{,}7$:

$C_0 = 0{,}5$: S_2, S_5,

$D_0 = 0{,}7$: S_1, S_5.

Последнее ядро состоит из одной альтернативы $S_{rat} = S_5$.

3.3. Сравнительный анализ альтернатив с использованием обобщенных показателей

Приведено на основе материала источника [7].

Рассмотрим некоторые модели формирования f обобщенного показателя на основе частных показателей $K_1, \ldots, K_j, \ldots, K_m$:

$$E = f\left(K_1, \ldots, K_j, \ldots, K_m\right).$$

Модель 1. Обобщенный показатель строят на основе использования аддитивных и мультипликативных преобразований над совокупностью частных показателей.

В случае использования аддитивных преобразований

$$E = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot K_j, \qquad \sum_{j} \beta_j = 1,$$

где β_j – коэффициент, учитывающий важность j-го показателя для ЛПР.

В случае использования мультипликативного преобразования

$$E = \prod_{j=1}^{m} K_j^{\beta_j}, \qquad \sum_{j} \beta_j = 1.$$

Модель 2. Обобщенный показатель рассматривается в качестве интегральной оценки отклонения альтернатив от идеальной альтернативы $S_\text{о}$ с идеальными оценками показателей $K_{1\text{о}}, \ldots, K_{j\text{о}}, \ldots, K_{m\text{о}}$:

$$E = \sum_{j=1}^{m} \left| K_{j\text{о}} - K_j \right|. \tag{3.11}$$

Для моделей первого вида предварительными необходимыми процедурами являются следующие:

1. Конвертация оценок показателей любой природы и с различными шкалами измерения (числовые, вербальные, балльные и т. д.) в числовые безразмерные оценки, пронормированные по одной шкале.

2. Определение коэффициентов важности показателей β_j, $j = 1, \ldots, m$ для ЛПР. При этом желательно соблюсти баланс личных предпочтений проектировщика к тому или иному показателю и объективного вклада показателя в специфику альтернативы и степень ее отличия от других альтернатив.

Процедуры конвертации частных показателей рассмотрены в подразд. 3.2. Рассмотрим некоторые методы определения коэффициентов важности показателей (весов).

Для определения весов частных показателей могут быть использованы экспертные оценки, основанные на ранжировании показателей с учетом СП ЛПР (методы парных сравнений, ранга, Саати и т. д.) и на анализе альтернатив (объективный подход), т. е. разброса оценок частных показателей.

Оценка весов частных показателей исходя из их разброса по этим альтернативам

В качестве исходных данных рассматривается матрица $\left|\varphi_{ji}\right|$ вида (3.7) безразмерных числовых оценок альтернатив, пронормированных в интервале [0, 1].

Вес β_j, учитывающий разброс j-го показателя на множестве сравниваемых альтернатив,

$$\beta_j = R_j \Big/ \sum_{j=1}^{m} R_j\,, j = 1, \dots, m;$$

$$R_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\varphi_{ji} - \overline{\varphi_J}\right| \big/ \overline{\varphi_J}\,, \qquad j = 1, \dots, m;$$

$$\overline{\varphi_J} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji} \,/\, n\,, \qquad j = 1, \dots, m,$$

где φ_{ji} – безразмерная оценка j-го показателя i-й альтернативы.

Как видно из приведенных выражений, показатель с большим разбросом по альтернативам имеет большой вес и наоборот. Таким образом, эта весовая компонента отражает вклад показателей в степень различия альтернатив.

Для модели второго вида также необходима процедура конвертации оценок частных показателей в безразмерные оценки, пронормированные в шкалах оценок частных показателей идеальной альтернативы. Критерием выбора рациональной альтернативы является минимум обобщенного показателя вида (3.11).

3.4. Сравнительный анализ альтернатив в диапазоне условий реализации

В соответствии с постановкой задачи выбора рациональной альтернативы по совокупности частных показателей (см. подразд. 3.1) анализ матрицы (3.1) включает два этапа. На первом этапе с помощью приведенных в подразд. 3.1–3.3 методов осуществляется выбор рациональных альтернатив для конкретных вариантов условий среды $S(\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, A$. Рассмотрим второй этап выбора рациональной альтернативы S_{rat} с учетом всего диапазона условий реализации среды.

3.4.1. Сравнительный анализ альтернатив при известных вероятностях условий реализации. Критерий Байеса

Приведено на основе материала источника [18].

При известных вероятностях внешних условий $P\ (Y_\alpha), \alpha = 1, \dots, A,$ где α – вариант реализации среды, для оценки и выбора решений применяется критерий Байеса (см. подразд. 3.1). Он используется как критерий максимума среднего выигрыша или как критерий минимума среднего риска.

При выборе рациональной альтернативы по среднему выигрышу оценки обобщенных показателей рассматриваются в качестве выигрышей соответствующих альтернатив. Выбор рациональной альтернативы осуществляется по правилу (3.5), компоненты которого рассчитываются как математические ожидания обобщенных показателей (выигрышей).

При выборе рациональной альтернативы по среднему риску $R_i,\ i = 1, \dots, n,$ необходимо перейти от матрицы выигрышей $\boldsymbol{E}$ (обобщенных показателей) к матрице рисков $\boldsymbol{R}$ по правилу

$$R_i\,(Y_\alpha) = \max_I E_i(Y_\alpha) - E_i(Y_\alpha), \qquad i = 1, \dots, n, \qquad \alpha = 1, \dots, A.$$

В соответствии с критерием Байеса выбор рациональной альтернативы осуществляется по правилу

$$S_{rat} = \min_I (R_1^*, \dots,\ R_i^*, \dots,\ R_n^*\ ), \tag{3.12}$$

где $R_i^* = \sum_{\alpha=1}^{A} R_i(Y_\alpha) \cdot P(Y_\alpha)\,, \qquad i = 1, \dots, n.$

Пример. Рассмотрим выбор рациональной альтернативы исходя из матрицы обобщенных оценок (выигрышей) альтернатив (табл. 3.15).

Таблица 3.15

Матрица выигрышей для критерия Байеса

Альтернатива	Условие реализации			
	$P\ (Y_1) = 0{,}1$	$P\ (Y_2) = 0{,}3$	$P\ (Y_3) = 0{,}3$	$P\ (Y_4) = 0{,}3$
D	1	4	5	9
B	3	8	4	3
C	4	6	6	2

Математические ожидания выигрышей:
$E_D^* = 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}3 = 5{,}5,$
$E_B^* = 3 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}3 = 4{,}8,$
$E_C^* = 4 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}3 = 4{,}6.$
Критерий Байеса для выигрышей (см. (3.5)):

$$S_{rat} = \max_{D,B,C} (5{,}5;\ 4{,}8;\ 4{,}6) \rightarrow S_D.$$

Перейдем от матрицы выигрышей к матрице рисков (табл. 3.16).

Таблица 3.16

Матрица рисков для критерия Байеса

Альтернатива	Условие реализации			
	$P\ (Y_1) = 0{,}1$	$P\ (Y_2) = 0{,}3$	$P\ (Y_3) = 0{,}3$	$P\ (Y_4) = 0{,}3$
D	3	4	1	0
B	1	0	2	6
C	0	2	0	7

$R_D^* = 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}3 = 1{,}8,$
$R_B^* = 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}3 = 2{,}5,$
$R_C^* = 0 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}3 + 7 \cdot 0{,}3 = 2{,}7.$

Критерий Байеса для указанных рисков (3.12)

$$S_{rat} = \min_{D,B,C} (1{,}8;\ 2{,}5;\ 2{,}7) \rightarrow S_D.$$

3.4.2. Сравнительный анализ альтернатив в условиях неопределенности условий реализации

Приведено на основе материала источника [18].

Условия реализации представлены набором возможных исходов случайной величины:

$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_\alpha, \dots, Y_A).$$

Критерий Лапласа (предполагается, что вероятности исходов $Y_1, \dots, Y_\alpha, \dots, Y_A$ равновероятны):

$$L = \max_{I}\ 1/A \sum_{\alpha=1}^{A} E_i\ (Y_\alpha), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Пример. Рассмотрим матрицу выигрышей (табл. 3.17).

Таблица 3.17

Матрица выигрышей для критерия Лапласа

Альтернатива	Условие реализации		
	Y_1	Y_2	Y_3
D	0,5	0,6	0,9
B	0,9	0,7	0,8
C	0,6	0,8	0,7

$$L = \max_{D,\, B,\, C} (1/3(0{,}5 + 0{,}6 + 0{,}9);\ 1/3(0{,}9 + 0{,}7 + 0{,}8);\ 1/3(0{,}6 + 0{,}8 + 0{,}7)) \rightarrow S_B.$$

Критерий Вальда (критерий осторожного наблюдателя): решение выбирается в расчете на наихудшие внешние условия, т. е. выбирается вариант с максимальным выигрышем в наихудших условиях среды:

$$W = \max_{i} \min_{\alpha} E_i(Y_\alpha), \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \alpha = 1, \ldots, A.$$

Для примера из табл. 3.17:

$$W = \max_{D,\, B,\, C} (0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}6) \rightarrow S_B.$$

Критерий Сэвиджа: решение принимается в расчете на наихудшие внешние условия с использованием матрицы рисков:

$$W = \min_{i} \max_{\alpha} R_i(Y_\alpha), \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \alpha = 1, \ldots, A.$$

Согласно табл. 3.18

$$S = \min_{D,\, B,\, C} (0{,}4;\ 0{,}1;\ 0{,}3) \rightarrow S_B.$$

Таблица 3.18

Матрица рисков для критерия Лапласа

Альтернатива	Условие реализации		
	Y_1	Y_2	Y_3
D	0,4	0,2	0
B	0	0,1	0,1
C	0,3	0	0,2

Критерий Гурвица: решение принимается с учетом того, что возможны как благоприятные, так и неблагоприятные внешние условия. При использовании этого критерия требуется указать «коэффициент пессимизма» μ – число в диапазоне от 0 до 1, представляющее собой субъективную оценку возможности неблагоприятных внешних условий. Если есть основания предполагать, что внешние условия будут неблагоприятными, то «коэффициент пессимизма» назначается близким к единице. Если неблагоприятные внешние условия маловероятны, то используется «коэффициент пессимизма», близкий к нулю. Для оценки решений используются как выигрыши, так и риски.

Критерий Гурвица для выигрышей:

$$\Gamma = \max_i \left[\mu \cdot \min_\alpha E_i(Y_\alpha) + (1 - \mu) \cdot \max_\alpha E_i(Y_\alpha)\right],\ i = 1, \ldots, n,$$

$$\alpha = 1, \ldots, A,\ \mu \in [0,1].$$

Критерий Гурвица для рисков:

$$\Gamma = \min_i \left[\mu \cdot \max_\alpha R_i(Y_\alpha) + (1 - \mu) \cdot \min_\alpha R_i(Y_\alpha)\right],\ i = 1, \ldots, n,$$

$$\alpha = 1, \ldots, A, \mu \in [0,1].$$

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ

4.1. Основные положения

Приводится на основе материала источника [20].

Процесс решения задачи средствами моделирования отображает схема, показанная на рис. 4.1. Под реальным объектом подразумевается исследуемый объект (система, явление, процесс). *Модель* – это материальный или воображаемый объект, который в процессе познания замещает реальный объект, сохраняя при этом его существенные свойства. *Моделирование* – это процесс исследования реального объекта с помощью модели. Исходный объект называется при этом *прототипом* или *оригиналом*.

Рис. 4.1. Схема решения задачи посредством моделирования

Модель – это *упрощенное* подобие реального объекта, которое отражает *исследуемые особенности* изучаемого объекта.

Классификация моделей

Классификация по области использования модели:

- *учебные модели* – наглядные пособия, тренажеры, обучающие программы;
- *игровые модели* – это экономические, военные, деловые игры;
- *исследовательские модели* создаются для исследования процессов или явлений, например, стенды для проверки электронный аппаратуры;
- *опытные модели* – это масштабируемые копии объектов;
- *имитационные модели* имитируют реальность.

Классификация по способу представления модели:

- *натуральная модель* копирует признаки объекта;
- *вербальная модель* – информационная модель в мысленной или разговорной форме;
- *знаковая модель* – информационная модель, выраженная знаками, т. е. средствами любого формального языка;
- *математическая модель* – модель, представленная с помощью математических формул;
- *логическая модель* – это модель, в которой представлены различные варианты выбора действий на основе умозаключений и анализа условий;
- *специальные модели* – химические формулы, ноты и т. д.;
- *геометрическая модель* – модель, представленная с помощью графических форм (граф, блок-схема алгоритма решения задачи, диаграмма);
- *табличная модель* – это информация о моделируемом объекте, структурированная в виде таблицы.

Классификация по характеру отображаемых свойств объекта моделирования:

- *структурные* – отображают структуру (устройство) моделируемого объекта, существенные для целей исследования свойства и взаимосвязи компонентов этого объекта;
- *функциональные* – отображают внешне воспринимаемое поведение (функционирование) объекта.

Функциональные модели часто строятся как *модели черного ящика.*

Классификация с учетом фактора времени:

- *статические модели* – это одномоментный срез информации по объекту;
- *динамические модели* позволяют увидеть изменение объекта во времени.

Классификация по характеру изменения модели по времени:

- *непрерывные* – изменяют свое состояние во времени за сколь угодно малое приращение времени;
- *дискретные* – изменяют свое состояние во времени дискретно, через определенный временной интервал.

Классификация по признаку причинной обусловленности выполняется в зависимости от возможности или невозможности учета в рассматриваемой модели одного или нескольких случайных факторов:

- *детерминированные* – модели, в которых все воздействия и факторы определены и известны заранее;
- *стохастические (вероятностные)* – модели, в которых хотя бы один из факторов носит случайный характер.

В практике моделирование объектов в области системотехники и системного анализа на первоначальных этапах исследования рациональнее использовать математическое моделирование. Для перехода от словесного описания системы к формальному представлению процессов ее описания применяют так называемую математическую схему (МС). МС можно представить как способ формализации объекта и процессов его функционирования в виде исходных данных, позволяющих привлечь для целей моделирования тот или иной известный математический аппарат: дифференциальные уравнения, конечные и вероятностные автоматы, системы массового обслуживания, сети Петри и т. д.

Для представления процесса функционирования информационно-вычислительных систем коллективного пользования используется сеть схем массового обслуживания [3]. Системы массового обслуживания представляют собой класс математических схем, разработанных в теории массового обслуживания (ТМО) для формализации процессов функционирования систем, которые по своей сути являются процессами обслуживания [4].

Довольно эффективны подходы ТМО для описания процессов в ЭВМ, компьютерных системах и сетях.

ТМО – область прикладной математики, занимающаяся анализом процессов в системах производства, обслуживания, управления, в которых однородные события повторяются многократно. Предметом ТМО – являются системы массового обслуживания (СМО). Под СМО понимается объект, деятельность которого связана с многократной реализацией исполнения каких-то однотипных задач и операций. Цель ТМО – выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения высокой эффективности функционирования. Задачи ТМО носят оптимизационный характер и в конечном счете включают экономический аспект по определению такого варианта системы, при котором будет обеспечен минимум суммарных затрат от ожидания обслуживания, потерь времени и ресурсов на обслуживание и простоев каналов обслуживания.

СМО включает элементы, показанные на рис. 4.2.

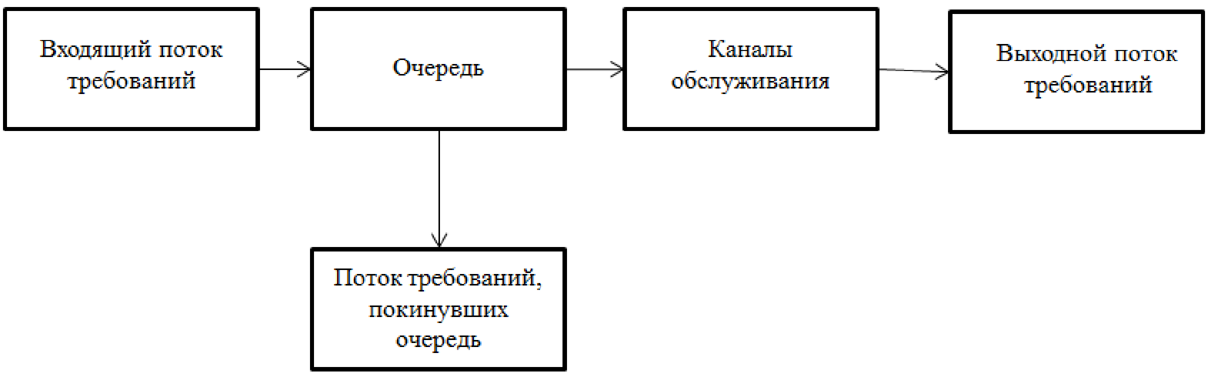

Рис. 4.2. Элементы системы массового обслуживания

Требование (заявка) – каждый отдельный запрос на выполнение какой-либо работы.

Входящий поток требований – требования, поступающие в обслуживающую систему.

Очередь – совокупность требований, ожидающих обслуживания.

Канал обслуживания – обслуживание, состоящее из последовательности фаз обслуживания.

Фаза обслуживания – последовательность операций, выполняемых на отдельном обслуживающем аппарате.

Выходящий поток требований – поток требований, покидающих систему после обслуживания.

Входной поток требований. Для описания входного потока требований требуется задать вероятностный закон, определяющий последовательность моментов поступления требований на обслуживание, и указать их количество в каждом очередном поступлении. При этом оперируют понятием «вероятностное распределение моментов поступления требований».

Дисциплина очереди. Определяет принцип подключения требований из очереди к процедуре обслуживания. Чаще всего используются дисциплины по правилам:

- первым пришел – первым обслуживаешься;
- пришел последним – первым обслуживаешься;
- случайный отбор заявок;
- отбор заявок по критерию приоритетности;
- ограничение времени ожидания момента наступления обслуживания.

Канал обслуживания. Определяется характеристиками самой процедуры обслуживания и структурой обсуживающей системы. К характеристикам процедуры обслуживания относятся продолжительность процедуры обслуживания и количество требований, удовлетворяемых в результате выполнения каждой такой процедуры. Для аналитического описания характеристик процедуры обслуживания оперируют понятием «вероятностное распределение времени обслуживания требований».

Время обслуживания заявки зависит от характера самой заявки и от состояния и возможностей обслуживающей системы.

Структура обслуживающей системы определяется количеством каналов обслуживания.

Исходя из компонентов системы обслуживания функциональные возможности любой СМО определяются следующими основными факторами:

- вероятностным распределением моментов поступления заявок на обслуживание;
- вероятностным распределением времени продолжительности обслуживания;
- конфигурацией обслуживающей системы (параллельное, последовательное или параллельно-последовательное обслуживание);

- количеством и производительностью обслуживающих каналов;
- дисциплиной очереди;
- мощностью источника требований.

Показатели эффективности функционирования СМО:

- абсолютная пропускная способность системы (A), т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
- относительная пропускная способность (Q), т. е. средняя доля поступивших заявок, обслуживаемых системой;
- вероятность отказа ($P_{от}$), т. е. вероятность того, что заявка покинет СМО не обслуженной;
- среднее число занятых каналов (k);
- среднее число заявок в СМО ($L_{с}$);
- среднее время пребывания заявки в системе ($T_{с}$);
- среднее число заявок в очереди ($L_{о}$) – длина очереди;
- среднее число заявок в системе ($L_{сист}$);
- среднее время пребывания заявки в очереди ($T_{о}$);
- среднее время пребывания заявки в системе ($T_{сист}$);
- степень загруженности канала ($P_{зан}$), т. е. вероятность того, что канал занят;
- среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
- среднее время ожидания обслуживания;
- вероятность того, что число заявок в очереди превысит определенное значение, и т. п.

Математический анализ работы СМО существенно упрощается, если процесс этой работы – марковский. Случайный процесс называется марковским или случайным процессом без последействия, если для любого момента времени t вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент времени t и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Многие процессы можно приближенно считать марковскими.

Для математического описания марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем, протекающих в СМО, анализируется понятие потока событий.

Поток событий называется стационарным, если вероятность поступления заданного числа событий в течение интервала времени t зависит только от длительности интервала времени t и не зависит от его расположения на временной оси.

Поток событий называется ординарным, если вероятность появления двух и более событий в течение элементарного отрезка времени dt пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Поток событий называется потоком без последействия, если для любых непересекающихся участков времени t_1 и t_2 – число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.

Поток событий называется простейшим (стационарным пуассоновским), если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последействия. Название «простейший» объясняется тем, что СМО с простейшими потоками имеет наиболее простое математическое описание.

Для простейшего потока справедливы следующие зависимости, являющиеся базовыми для расчета приведенных ранее показателей эффективности СМО.

Число событий m, попадающих на любой участок времени t, распределено по закону Пуассона:

$$P_m(t) = (\lambda t)^m / m!\, e^{-\lambda t},$$

где $P_m\ (t)$ – вероятность попадания m событий на участок времени t; λ – интенсивность входящего потока заявок.

Математическое ожидание случайной величины α равно ее дисперсии:

$$a = \delta^2 = \lambda t.$$

Вероятность того, что за время t не произойдет ни одного события ($m = 0$),

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Вероятность того, что за время t произойдет хотя бы одно событие,

$$P_{\geq 1}(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Случайный характер потока заявок и длительности их обслуживания приводит к тому, что в СМО протекает случайный процесс. Для марковского процесса возможно описать работу СМО с помощью аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений и выразить характеристики обслуживания через параметры СМО и потока заявок.

Исчерпывающей количественной характеристикой марковского процесса является совокупность вероятностей состояний, т. е. вероятностей $p_i(t)$ того, что в момент t процесс будет находиться в состоянии S_i $(i = 1, \dots, n)$.

Рассмотрим, как определяются вероятности состояний по приведенному на рис. 4.3 графу состояний, считая все потоки простейшими.

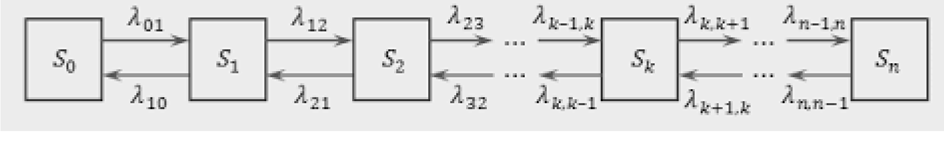

Рис. 4.3. Граф состояний модели размножения и гибели

В случайный момент времени t система может находиться в одном из состояний S_i с вероятностью $p_i(t)$. Придадим времени t малое приращение Δt и найдем, например, $p_2(t+\Delta t)$ – вероятность того, что в момент $t + \Delta t$ система будет в состоянии S_2. Это может произойти, во-первых, если система в момент времени t была в состоянии S_2 и за время t не вышла из него; во-вторых, если в момент t система была в состоянии S_1 или S_5 и за время Δt перешла в состояние S_2.

В первом случае надо вероятность $p_2(t)$ умножить на вероятность того, что за время Δt система не перейдет в состояние S_1, S_3 или S_4. Суммарный поток событий, выводящий систему из состояния S_2, имеет интенсивность $\lambda_{21}+\lambda_{23}+\lambda_{24}$. Значит, вероятность того, что за время Δt система выйдет из состояния S_2, равна $(\lambda_{21}+\lambda_{23}+\lambda_{24})\Delta t$. Отсюда вероятность первого варианта $p_{2.1}(t + \Delta t)= p_2(t)[1 - (\lambda_{21}+ + \lambda_{23}+\lambda_{24})\Delta t]$.

Найдем вероятность перехода в состояние S_2. Если в момент t система находилась в состоянии S_1 с вероятностью $p_i(t)$, то вероятность перехода в состояние S_1 за время Δt равна $p_{2.2}(t + \Delta t)= p_1(t)\lambda_{12}\Delta t$.

Аналогично для состояния S_5: $p_{2.3}(t + \Delta t)= p_1(t)\lambda_{52}\Delta t$.

Складывая вероятности $p_{2.1}(t + \Delta t) + p_{2.2}(t+\Delta t) + p_{2.2}(t+\Delta t)$, получим

$p_2 (t + \Delta t) = p_2(t)[1 - (\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24}) \Delta t] + p_1(t) \lambda_{12}\Delta t + p_5(t)\lambda_{52}\Delta t$.

Раскроем квадратные скобки, перенесем $p_2(t)$ в левую часть и разделим обе части на Δt:

$$p_2\ (t\ +\ \Delta t) - p_2(\mathrm{t})/\Delta\mathrm{t} = p_1(t)\lambda_{12} + p_5(t)\lambda_{52} - p_2(t)(\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24}).$$

Если устремить Δt к нулю, то слева получим производную функции $p_2(t)$:

$$dp_2(t)/dt\ = p_1(t)\lambda_{12} + p_5(t)\lambda_{52} - p_2(t)(\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24}).$$

Аналогичные уравнения можно вывести для всех остальных состояний. Получается система дифференциальных уравнений:

$$dp_1(t)/d\mathrm{t} = p_2(t)\lambda_{21} - p_1(t)\lambda_{12};$$

$$dp_2(t)/dt = p_1(t)\lambda_{12} + p_5(t)\lambda_{52} - p_2(t)(\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24});$$

$$dp_3(t)/dt\ = p_2(t)\lambda_{23} - p_3(t)\lambda_{35};$$

$$dp_4(t)/dt\ = p_2(t)\lambda_{24} - p_4(t)\lambda_{45};$$

$$dp_5(t)/dt\ = p_3(t)\lambda_{35}\ +\ p_4(t)\lambda_{45} - p_5(t)\lambda_{52}.$$

Эта система линейных дифференциальных уравнений дает возможность найти вероятности состояний, если задать начальные условия. В левой части каждого уравнения стоит производная вероятности i-го состояния, а в правой –

сумма произведений вероятностей всех состояний, стрелки из которых ведут в данное состояние, умноженных на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность i-го состояния.

Представим уравнения Колмогорова в общем виде:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_j(t)\,\lambda_{ji} - \mathrm{p}_i(t) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_{ij}\,, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь учтено, что для состояний, не имеющих непосредственных переходов, можно считать

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = 0.$$

Если процесс, протекающий в системе, длится достаточно долго, то имеет смысл говорить о предельном поведении вероятностей $P_i(t)$ при $t \to$ infinity. В некоторых случаях существуют **финальные (предельные) вероятности состояний**:

$$P_i = \lim_{t \to \infty} P_i(t)\,, i = 1, \ldots, n,$$

не зависящие от того, в каком состоянии система находилась в начальный момент. Говорят, что в системе устанавливается предельный стационарный режим, при котором она переходит из состояния в состояние, но вероятности состояний P_i уже не меняются во времени. Система, для которой существуют финальные состояния, называется эргодической, а соответствующий случайный процесс – эргодическим.

Финальные вероятности системы могут быть получены путем решения системы линейных алгебраических уравнений, которые получаются из дифференциальных уравнений Колмогорова, если приравнять производные к нулю, а вероятностные функции состояний $P_0(t)$, $P_1(t)$, ..., $P_n(t)$ в правых частях уравнений Колмогорова заменить на неизвестные финальные вероятности P_0, P_1, P_2, ..., P_n.

Таким образом, для системы с n + 1 состояниями получается система n + + 1 линейных однородных алгебраических уравнений с n +1 неизвестными P_0, P_1, P_2, ..., P_n, которые можно найти с точностью до постоянного множителя. Для нахождения их точных значений к уравнениям добавляют нормировочное условие $P_0 + P_1 + \ldots + P_n = 1$, пользуясь которым можно выразить любую из вероятностей через другие и отбросить одно из уравнений.

Предельные вероятности состояний

Рассмотрим математическое описание марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Система S, представляющая собой компьютер. В каждый момент времени компьютер может находиться в одном из состояний:

S_1 – компьютер исправен, решает задачу;

S_2 – компьютер исправен, не решает задачу;

S_3 – компьютер неисправен, факт неисправности;

S_4 – факт неисправности установлен, ведется поиск неисправности;

S_5 – ремонтируется.

Граф состояний работы компьютера представлен на рис. 4.4.

На графе (рис. 4.4) показаны восемь стрелок: $S_1 \to S_2$, $S_1 \to S_3$, $S_2 \to S_1$, $S_1 \to S_3$, $S_3 \to S_4$, $S_4 \to S_5$, $S_5 \to S_1$, $S_5 \to S_2$. В какой-то момент вследствие окончания выполнения задания компьютер переходит из состояния S_1 в состояние S_2. Затем компьютер может перейти обратно из состояния S_2 в состояние S_1 в случае, когда ему необходимо будет решить новую задачу. В случае неисправности компьютер переходит из состояния S_1 или S_2 в состояние S_3. При этом сразу начинается поиск неисправности, и система переходит в состояние S_4. После определения неисправности начинается ремонт компьютера, и система переходит в состояние S_5. После окончания ремонта система переходит в одно из состояний S_1 или S_2.

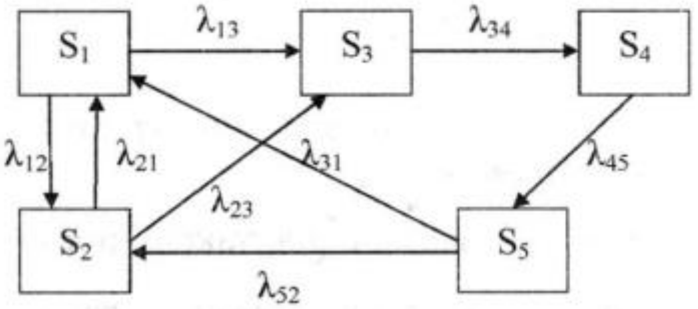

Рис. 4.4. Граф состояний работы с интенсивностями переходов из состояния в состояние

Будем полагать, что все переходы системы из состояния S_i в состояние S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λ_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4, 5).

Вероятностью i-го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента времени t сумма всех вероятностей $p_i(t)$ равна единице:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i(t) = 1.$$

В теории случайных процессов доказывается, что если число состояний системы конечно и из каждого из них можно за конечное число шагов перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют.

Для определения предельных вероятностей необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} p_1 + \; p_2 + \ldots + p_m = 1, \\ p_j = \; \lambda_{1j} p_1 + \ldots + \lambda_{mj} p_m, \end{cases}$$

где $j = 1, 2, \ldots, m$.

Данную систему уравнений для определения предельных вероятностей можно привести к другому виду, для чего можно воспользоваться следующим правилом: слева в уравнениях стоит предельная вероятность i-го состояния p_i, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного i-го состояния, а справа – сумма произведений интенсивностей потоков, входящих в i-е состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.

Для нашего примера система уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1, \\ p_1(\lambda_{12} + \lambda_{13}) = p_2\lambda_{21} + p_5\lambda_{51}, \\ p_2(\lambda_{21} + \lambda_{23}) = p_1\lambda_{12} + p_5\lambda_{52}, \\ p_3\lambda_{34} = p_1\lambda_{13} + p_2\lambda_{23}, \\ p_4\lambda_{45} = p_3\lambda_{34}, \\ p_5(\lambda_{52} + \lambda_{51}) = p_4\lambda_{45}. \end{cases}$$

Предельная вероятность состояния S_i имеет четкий смысл: она показывает среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии.

4.2. Одноканальная СМО с отказами

Приведено на основе материала источника [21].

Пример. Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Предполагается, что все потоки событий, переводящие СМО из состояния в состояние, будут простейшими. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

В качестве показателей эффективности одноканальной СМО с отказами будем рассматривать A, Q, $P_{\text{отк}}$ (см. подразд. 4.1).

Размеченный граф состояний представлен на рис. 4.5, где S_0 – канал обслуживания свободен; S_1 – канал обслуживания занят; λ – интенсивность потока заявок; μ – интенсивность потока обслуживания.

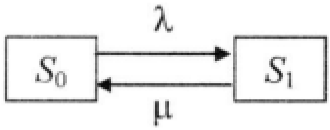

Рис. 4.5. Одноканальная СМО с отказами

В предельном стационарном режиме система алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1, \\ \mu p_1 = \lambda p_0, \end{cases}$$

т. е. система вырождается в одно уравнение.

Учитывая, что $p_0 + p_1 = 1$, найдем предельные вероятности состояний

$$p_0 = \mu \, / \, \lambda + \mu \, , p_1 = \mu \, / \, \lambda + \mu,$$

которые выражают среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_0, когда канал свободен, и S_1, когда канал занят, т. е. определяют соответственно относительную пропускную способность Q системы и вероятность отказа:

$$Q = \mu \, / \, \lambda + \mu \, , \; P_{\text{отк}} = \mu \, / \, \lambda + \mu \, .$$

Абсолютная пропускная способность равна

$$A = \lambda Q.$$

4.3. Многоканальная СМО с отказами

Приведено на основе материала источника [21].

Рассмотрим классическую задачу Эрланга.

Пример. Имеется n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний каждого канала имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

В качестве показателей эффективности многоканальной СМО с отказами будем рассматривать A, Q, $P_{\text{отк}}$, $\bar{k}_{\text{зан}}$ (см. подразд. 4.1).

Размеченный граф состояний представлен на рис. 4.6, где S_0 – все каналы свободны; $k = 0$; S_1 – занят только один канал; $k = 1$, S_2 – заняты только два канала; $k = 2$, S_k – заняты k каналов; S_n – заняты все n каналов.

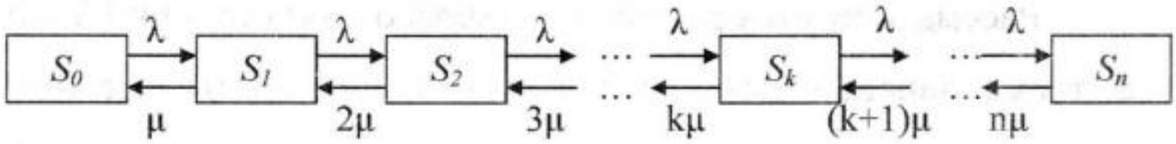

Рис. 4.6. Многоканальная СМО с отказами

Предельные вероятности задаются формулами Эрланга:

$$p_0 = (1\ + \rho + \rho^2/2! + \dots + \rho^n/n!)^{-1},$$

где $\rho =\ \lambda/\mu$ – интенсивность нагрузки канала.

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \rho^2/2!\, p_0, \dots\ ,\ p_n = \rho^n/n!\, p_0,$$
$$P_{\text{отк}} = \rho^n/n!\, p_0,$$
$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \rho^n/n!\, p_0,$$
$$A = \lambda Q = \lambda(1 - \rho^n/n!\, p_0),$$
$$\bar{k}_{\text{зан}} = \sum_{k=0}^{n} k p_k = A/\mu = \rho(1 - \rho^n/n!\, p_0).$$

4.4. Одноканальная СМО с ограниченной длиной очереди

Приведено на основе материала источника [21].

Пример. Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать $\rho = \lambda/\mu$ обслуженных заявок в единицу времени).

Длительность обслуживания – случайная величина, подчиненная показательному закону распределения. Поток обслуживания является простейшим пуассоновским потоком событий.

Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания. Предположим, что количество мест в очереди ограничено числом m, т. е. если заявка пришла в момент, когда в очереди уже стоят m заявок, она покидает систему не обслуженной.

В качестве показателей эффективности одноканальной СМО с ограниченной длиной очереди будем рассматривать A, Q, $P_{\text{отк}}$, $L_{\text{сист}}$, $T_{\text{сист}}$, $L_{\text{оч}}$, $T_{\text{оч}}$ (см. подразд. 4.1).

Размеченный граф состояний представлен на рис. 4.7, где S_0 – канал обслуживания свободен; S_1 – канал обслуживания занят, но очереди нет; S_2 – канал обслуживания занят в очереди стоит одна заявка; S_m – канал обслуживания занят, в очереди все m заявок, любая следующая заявка получает отказ.

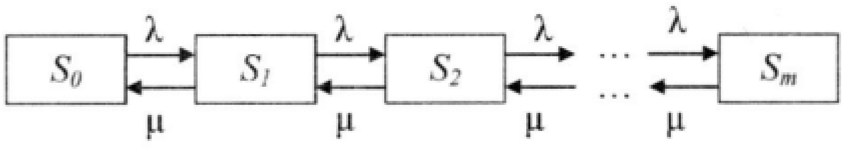

Рис. 4.7. Одноканальная СМО с ограниченной длиной очереди

Вероятности состояний определяются уравнениями

$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{m+1})^{-1}.$$

Отсюда получаем, что если $\rho \neq 1$, то

$$p_0 = 1 - \rho/1 - \rho^{m+2}.$$

Тогда остальные предельные вероятности находятся по формулам

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \rho^2 p_0, \ldots, p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0.$$

Если $\rho = 1$, то

$$\begin{gathered} p_0 = 1/m + 2, \\ P_{\text{отк}} = p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0, \\ Q = 1 - P_{\text{отк}}, \\ A = \lambda Q, \end{gathered}$$

$$L_{\text{сист}} = \sum_{n=0}^{m+1} n \cdot P_n \ ,$$

$$T_{\text{сист}} = L_{\text{сист}}/\lambda,$$

$$L_{\text{оч}} = \begin{cases} \rho^2\big(1 - \rho^m(m - mp + 1)\big)/\ (1-\rho)^2\ p_0, \text{если } \rho\ \neq 1, \\ (m(m+1))/(2(m+2)), \text{если } \rho = 1, \end{cases}$$

$$T_{\text{оч}} = L_{\text{оч}}/\lambda.$$

Среднее число занятых каналов: $\bar{k}_{\text{зан}} = A\ /\ \mu = \rho Q$.
Среднее число заявок, находящихся в очереди,

$$L_{\text{оч}} = \rho^{(n+1)}/\ nn! \cdot (1 - (\rho/n)^m\ (m + 1 - m/n \cdot \rho))/(1-\rho/n)^2\ \rho_0.$$

Среднее время ожидания в очереди: $T_{\text{оч}} = L_{\text{оч}}/\lambda$.
Среднее число заявок в системе: $L_{\text{сист}} = L_{\text{оч}} + \bar{k}_{\text{зан}}$.
Среднее время пребывания заявки в СМО: $T_{\text{сист}} = L_{\text{сист}}/\lambda$.

4.5. Многоканальная СМО с ограниченной длиной очереди

Приведено на основе материала источника [21].

Пример. Рассмотрим n-канальную систему массового обслуживания с ожиданием, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ;

интенсивность обслуживания μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать $\rho = \lambda/\mu$ обслуженных заявок в единицу времени).

Заявка, поступившая в момент, когда все n каналов заняты, становится в очередь и ожидает обслуживания. Предположим, что количество мест в очереди ограничено числом m, т. е. если заявка пришла в момент, когда в очереди уже стоят m заявок, она покидает систему не обслуженной.

В качестве показателей эффективности одноканальной СМО с ограниченной длиной очереди будем рассматривать A, Q, $P_{\text{отк}}$, $P_{\text{оч}}$, $\bar{k}_{\text{зан}}$, $L_{\text{сист}}$, $T_{\text{сист}}$, $L_{\text{оч}}$, $T_{\text{оч}}$ (см. подразд. 4.1).

Размеченный граф состояний представлен на рис. 4.8, где S_0 – все каналы свободны; S_1 – занят только один канал; S_n – заняты все n каналов; S_{n+1} – заняты все n каналов и одна заявка в очереди; S_{n+m} – заняты все n каналов и все m мест в очереди.

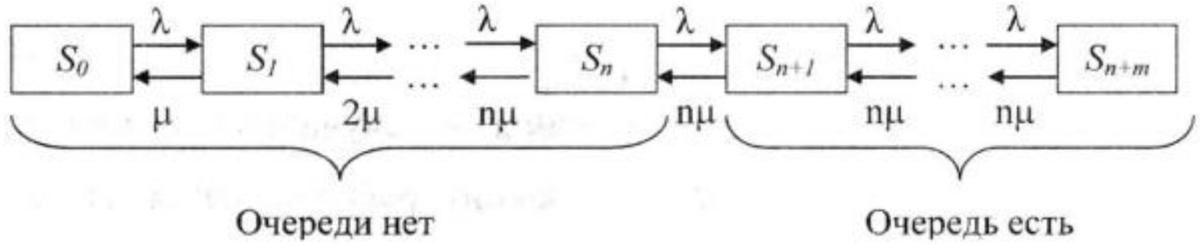

Рис. 4.8. Многоканальная СМО с ограниченной длиной очереди

Предельные вероятности состояний:

$$p_0 = (1 + \rho/1! + \rho^2/2! + \dots + p^n/n! + \rho^n/n! + p^{n+1}/nn! \cdot (1 - (p/n)^{n+1})/(1 - \\ - \rho/n))^{-1},$$
$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \rho^2/2!\, p_0, \dots, p_n = \rho^n/n!\, p_0,$$
$$p_{n+1} = p^{n+1}/nn!\, p_0, p_{n+2} = p^{n+2}/n^2 n!\, p_0, \dots, p_{n+m} = p^{n+m}/n^m n!\, p_0,$$
$$P_{\text{отк}} = p_{n+m} = p^{n+1}/n^m n!\, p_0.$$

Вероятность образования очереди

$$P_{\text{оч}} = \sum_{i=0}^{m-1} p_{n+i} = \rho^n/n! \cdot (1 - (p/n)^m)/(1 - \rho/n) p_0.$$

Относительная пропускная способность: $Q = 1 - P_{\text{отк}}$.

Абсолютная пропускная способность: $A = \lambda Q$.

Среднее число занятых каналов: $\bar{k}_{\text{зан}} = A/\mu = \rho Q$.

Среднее число заявок, находящихся в очереди:

$$L_{\text{оч}} = \rho^{n+1}/nn! \cdot (1 - (\rho/n)^m\ (m + 1 - m/n \cdot \rho))/(1 - \rho/n)^2\ p_0.$$

Среднее время ожидания в очереди: $T_{оч} = L_{оч}/\lambda$.
Среднее число заявок в системе: $L_{сист} = L_{оч} + \bar{k}_{зан}$.
Среднее время пребывания заявки в СМО: $T_{сист} = L_{лист}/\lambda$.

4.6. Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Приведено на основе материала источника [21].

Пример. Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания с неограниченной очередью, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать $\rho = \lambda/\mu$ обслуженных заявок в единицу времени).

Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания. В качестве показателей эффективности одноканальной СМО с неограниченной длиной очереди будем рассматривать A, Q, $P_{отк}$, $L_{сист}$, $T_{сист}$, $L_{оч}$, $T_{оч}$ (см. подразд. 4.1).

Размеченный граф состояний представлен на рис. 4.9, где S_0 – канал обслуживания свободен; S_1 – канал обслуживания занят, но очереди нет; S_2 – канал обслуживания занят, в очереди стоит одна заявка; S_m – канал обслуживания занят, в очереди все m заявок.

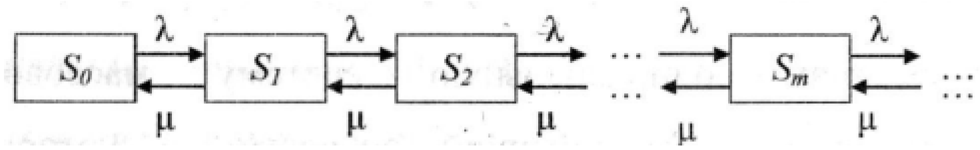

Рис. 4.9. Одноканальная СМО с неограниченной длиной очереди

Поскольку ограничение на длину очереди отсутствует, то любая заявка может быть обслужена, поэтому $P_{обс} = 1$, следовательно, относительная пропускная способность $Q = P_{обс} = 1 \rightarrow P_{отк} = 0$, а абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = \lambda$.

Предельные вероятности:

$$p_m = \rho^m(1-\rho),\ m = 0, 1, 2, \dots .$$

Среднее число заявок в очереди: $L_{оч} = \rho^2/(1-\rho)$.
Среднее число заявок в системе: $L_{сист} = L_{оч} + \rho = \rho/(1-\rho)$.
Среднее время ожидания обслуживания в очереди: $T_{оч} = L_{оч}/\lambda$.
Среднее время пребывания заявки в системе: $T_{сист} = L_{лист}/\lambda$.

Если $\lambda > \mu$, то очередь будет постоянно увеличиваться. Наибольший интерес представляет СМО при $\lambda < \mu$.

4.7. Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Приведено на основе материала источника [21].

Рассмотрим n-канальную систему массового обслуживания неограниченной очередью, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать $\rho = \lambda/\mu$ обслуженных заявок в единицу времени).

Заявка, поступившая в момент, когда все n каналов заняты, становится в очередь и ожидает обслуживания.

В качестве показателей эффективности многоканальной СМО с ограниченной длиной очереди будем рассматривать A, Q, $P_{отк}$, $L_{сист}$, $T_{сист}$, $L_{оч}$, $T_{оч}$ (см. подразд. 4.1).

Перечислим состояния:

- S_0 – все каналы свободны, $k = 0$;
- S_1 – занят один канал, остальные свободны, $k = 1$;
- S_n – заняты все n каналов, очереди нет $k = n$;
- S_{n+1} – заняты все n каналов, одна заявка в очереди, $k = n + 1$;
- S_{n+m} – заняты все n каналов, r заявок в очереди, $k = n + m$.

Поскольку ограничение на длину очереди отсутствует, то любая заявка может быть обслужена, поэтому $P_{обс} = 1$, следовательно, относительная пропускная способность $Q = P_{обс} = 1 \rightarrow P_{отк} = 0$, а абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = \lambda$.

Предельные вероятности:

$$\rho_0 = (1 + \rho/1! + \rho^2/1! + \ldots + \rho^{n-1}/(n-1)! + \rho^n/n! \cdot 1/(n - \rho))^{-1};$$

$$p_0 = \rho p_0, p_2 = \rho^2/2!\, p_0, \ldots, p_n = \rho^n/n!\, p_0;$$

$$p_{n+1} = \rho^{n+1}/nn!\, p_0; p_{n+2} = \rho^{n+2}/n^2 n!\, p_0;\ p_{n+m} = \rho^{n+m}/n^m n!\, p_0.$$

Вероятность образования очереди: $p_{оч} = \rho^{n+1}/n!\,(n-p)p_0$.

Среднее число занятых каналов: $\bar{k}_{зан} = A/\mu$.

Средняя длина очереди: $L_{оч} = \rho^{n+1}/nn!\,(1-\rho/n)^2 p_0$.

Среднее время ожидания в очереди: $T_{оч} = L_{оч}/\lambda$.

Среднее число заявок в системе: $L_{сист} = L_{оч} + \rho$.

Среднее время пребывания заявки в СМО: $T_{сист} = L_{сист}/\lambda$.

Если $\rho < n$, то процесс обслуживания устойчив. Если $\rho \geq n$, то СМО работает неустойчиво.

5. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

5.1. Принятие решений в неструктурированных задачах на основе методов экспертного анализа

5.1.1. Методы парных сравнений. Метод Саати

Метод парных сравнений основан на попарном сравнении альтернатив: для каждой пары альтернатив эксперт указывает, какая из альтернатив предпочтительнее (лучше, важнее и т. д.). Существует ряд алгоритмов, реализующих метод парных сравнений, они различаются по количеству используемых экспертных оценок (индивидуальные и коллективные оценки), по шкалам сравнения альтернатив и т. д. Здесь рассматривается метод парных сравнений – метод Саати.

Метод Саати основан на сравнении альтернатив, выполняемом одним экспертом (см. подразд. 2.1).

Метод предпочтений

Метод основан на ранжировании альтернатив, выполняемом группой экспертов. Каждый из экспертов независимо от других выполняет ранжирование альтернатив (см. подразд. 2.2).

Проверка согласованности экспертных оценок. Проверка согласованности необходима, чтобы выяснить, не было ли резких различий в суждениях экспертов. Если мнения экспертов резко различаются, то следует выявить причины таких различий и, возможно, уточнить некоторые оценки.

Для проверки согласованности мнений экспертов вычисляется величина, называемая коэффициентом конкордации (W). Ее расчет выполняется в следующем порядке.

Этап 1. Находятся суммы оценок, указанных экспертами для каждой из альтернатив:

$$S_j = \sum_{i=1}^{M} X_{ij}, \qquad j = 1, ..., N.$$

В рассматриваемом примере S_1 = 2 + 2+ 1 + 2 = 7; S_2 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8; S_3 = = 10; S_4 = 20; S_5 = 15.

Этап 2. Находится вспомогательная величина A:

$$A = M(N + 1) / 2.$$

Для данного примера A = 4(5 + 1) / 2 = 12.

Этап 3. Находится вспомогательная величина S:

$$S = \sum_{j=1}^{N} (S_j - A)^2.$$

Для рассматриваемого примера

$S = (7 - 12)^2 + (8 - 12)^2 + (10 - 12)^2 + (20 - 12)^2 + (15 - 12)^2 = 118.$

Этап 4. Находится коэффициент конкордации:

$$W = \frac{12 \cdot S}{M^2 \cdot N \cdot (N^2 - 1)}.$$

При $W \geq 0{,}5$ степень согласованности экспертных оценок может считаться достаточной. При $W < 0{,}5$ требуется уточнение и согласование экспертных оценок.

В данном примере $W = 12 \cdot 118 / (16 \cdot 5 \cdot 24) = 0{,}7375$. Таким образом, уточнение экспертных оценок не требуется. Мнения экспертов в отношении влияния рассматриваемых факторов на производительность труда достаточно близки друг к другу.

Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретические сведения по лабораторной работе.
2. Получить задание на лабораторную работу.
3. На основе оценок первого эксперта найти веса вариантов решения, используя алгоритм Саати. Выполнить проверку экспертных оценок на непротиворечивость.
4. Выбрать рациональное решение, используя метод предпочтений. Выполнить проверку экспертных оценок на согласованность. При выявлении несогласованности экспертных оценок указать ее причины, т. е. указать, для каких альтернатив имеются существенные различия в указанных экспертами оценках, или какие эксперты указали оценки, существенно отличающиеся от оценок других экспертов.

Для всех расчетов использовать табличный процессор Excel.

5.1.2. Решение слабоструктурированных задач на основе метода анализа иерархий

Выбор множества Парето

Приводится на основе материала источника [15].

Множество Парето представляет собой множество альтернатив, обладающих следующим свойством: любая из альтернатив, входящих во множество Парето, хотя бы по одному показателю лучше любой другой альтернативы, входящей в это множество. Другими словами, ни одна из альтернатив, входящих во множество Парето, не уступает какой-либо другой альтернативе из этого множества по всем показателям. Поэтому множество Парето называют также множеством недоминируемых альтернатив: в нем отсутствуют альтернативы, явно (по всем показателям) отстающие от какой-либо другой альтернативы.

Применение этого метода рассмотрено в разд. 1.

Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретические сведения по лабораторной работе.
2. Получить задание на лабораторную работу.
3. Выбрать множество Парето.
4. Выбрать лучшую альтернативу на основе метода анализа иерархий, выполнив расчеты в табличном процессоре Excel.

5.2. Принятие решений в условиях риска при многих показателях

Основные этапы решения задачи выбора альтернатив по многим показателям в условиях риска

Как правило, в ходе принятия управленческих решений необходимо принимать во внимание как множественность показателей (т. е. различные показатели, характеризующие принимаемые решения), так и риск (т. е. зависимость результатов принимаемых решений не только от самих решений, но и от неконтролируемых внешних факторов). Обычно из нескольких показателей, учитываемых при принятии решения, некоторые зависят от внешних условий.

Анализ и выбор альтернатив по многим показателям с учетом риска выполняется следующим образом.

1. Для каждого варианта внешних условий определяются обобщенные оценки альтернатив. Для этого могут применяться различные методы оценки многих показателей альтернатив, например, метод анализа иерархий.
2. Полученные обобщенные оценки сводятся в матрицу выигрышей. Окончательный выбор альтернативы выполняется на основе методов игрового программирования, т. е. критерия Байеса (если известны вероятности внешних условий) или критериев Лапласа, Вальда, Гурвица (если вероятности внешних условий неизвестны).

5.2.1. Оценка альтернатив на основе метода анализа иерархий

Решение задачи выбора альтернатив по многим показателям с учетом риска рассмотрим на следующем примере.

Пример 5.1. Рассматриваются три варианта строительства предприятия химической промышленности: проект A, B и C.

Спрос на продукцию, которую будет выпускать предприятие, заранее точно не известен. По мнению экспертов, в ближайшие годы вероятность низкого спроса на продукцию предприятия составляет – 10 %, среднего – 60 %, высокого – 30 %.

При выборе проекта учитываются следующие показатели: прибыль от работы предприятия ($П_1$), количество рабочих мест, создаваемых предприятием ($П_2$), загрязнение окружающей среды ($П_3$), затраты на строительство предприятия ($П_4$).

Оценки проектов по показателям $П_1$–$П_3$ в условиях различных уровней спроса приведены в табл. 5.1.

Затраты на строительство предприятия по проекту *A* составят 60 млн ден. ед., по проекту *B* – 80 млн ден. ед., по проекту *C* – 90 млн ден. ед.

Таблица 5.1

Исходные данные для примера 5.1

Спрос	Низкий			Средний			Высокий		
Проект	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*
Прибыль, млн ден. ед. / г.	40	30	30	45	60	65	45	60	80
Количество рабочих мест, тыс.	8	11	12	8,5	11	12,5	8,5	11	12,5
Загрязнение окружающей среды, т/г.	30	70	60	30	80	70	30	80	80

По мнению руководства компании (владельца предприятия), наиболее важным показателем, который следует учитывать при выборе проекта, является прибыль; очень важным показателем является также загрязнение окружающей среды. Менее важный показатель – затраты на строительство предприятия, еще немного менее важный – количество создаваемых рабочих мест.

В этой задаче требуется учитывать четыре показателя. Три из них (прибыль, количество рабочих мест и загрязнение окружающей среды) зависят не только от принятого решения (т. е. выбранного проекта предприятия), но и от внешних условий (спроса на продукцию). Таким образом, решение принимается в условиях риска и неопределенности. В то же время один из показателей – затраты на строительство предприятия – не зависит от будущего спроса на продукцию.

Для решения задачи воспользуемся методом анализа иерархий.

Найдем обобщенные оценки альтернатив (проектов) для первого варианта внешних условий, т. е. для низкого спроса.

Этап 1. Определяются локальные приоритеты (оценки важности) показателей. Для этого выполняется их попарное сравнение по важности согласно методу Саати (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Матрица парных сравнений показателей по важности

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
$П_1$	1	7	2	5
$П_2$	1/7	1	1/6	1/3
$П_3$	1/2	6	1	4
$П_4$	1/5	3	1/4	1

Локальные приоритеты альтернатив вычисляются как

$$L_{\Pi_1} = C_1/C,\ \ldots,\ L_{Kn} = C_n/C,$$

где C_n – вычисляется как среднее геометрическое строк матрицы.

Для данного примера: $L_{\Pi_1} = 0{,}51$; $L_{\Pi_2} = 0{,}05$; $L_{\Pi_3} = 0{,}33$; $L_{\Pi_4} = 0{,}11$.

Этап 2. Определяются локальные приоритеты альтернатив (проектов) по каждому из показателей. Для этого выполняется их попарное сравнение согласно методу Саати (табл. 5.3, 5.4).

Таблица 5.3

Сравнение по показателю «прибыль»

Проект	*A*	*B*	*C*
A	1	5	5
B	1/5	1	1
C	1/5	1	1

$L_A^{\Pi_1} = 0{,}71$; $L_B^{\Pi_1} = 0{,}14$; $L_C^{\Pi_1} = 0{,}14$.

Таблица 5.4

Сравнение по показателю «количество рабочих мест»

Проект	*A*	*B*	*C*
A	1	1/5	1/6
B	5	1	1/2
C	6	2	1

$L_A^{\Pi_2} = 0{,}08$; $L_B^{\Pi_2} = 0{,}34$; $L_C^{\Pi_2} = 0{,}58$.

Здесь, например, оценка $X_{12} = 5$ (см. табл. 5.3) означает, что в условиях низкого спроса проект *A* лучше, чем проект *B*, по показателю «прибыль»: проект *A* приносит прибыль в размере 40 млн ден. ед., а *B* – 30 млн ден. ед.

Аналогично выполняются расчеты по остальным показателям.

Этап 3. Определяются обобщенные оценки (глобальные приоритеты) альтернатив: $G_A = 0{,}71$; $G_B = 0{,}13$; $G_C = 0{,}16$. Например, глобальный приоритет проекта *A* вычислен следующим образом:

$$G_A = L_A^{\Pi_1} \cdot L_{\Pi_1} + L_A^{\Pi_2} \cdot L_{\Pi_2} + L_A^{\Pi_3} \cdot L_{\Pi_3} + L_A^{\Pi_4} \cdot L_{\Pi_4} = 0{,}71 \cdot 0{,}51 + 0{,}08 \cdot 0{,}06 + \\ + 0{,}79 \cdot 0{,}33 + 0{,}78 \cdot 0{,}1 = 0{,}71.$$

Обобщенные оценки альтернатив для вариантов внешних условий среднего спроса и высокого спроса выполняются аналогичным образом.

5.3. Выбор альтернативы на основе оценок для различных внешних условий

5.3.1. Критерий Байеса

Если известны вероятности внешних условий, то для оценки и выбора решений применяется критерий Байеса (см. п. 3.4.1). Он может использоваться в двух видах: как критерий максимума среднего выигрыша или как критерий минимума среднего риска.

Пусть известны вероятности вариантов внешних условий: $P_1, P_2, \ldots, P_N$.

Если решение выбирается по значениям выигрышей, то для каждого решения находится средняя оценка по всем вариантам внешних условий (средний выигрыш):

$$Z_i = \sum_{j=1}^{N} (E_{ij} P_j), \quad i = 1, ..., M,$$

где P_j – вероятности внешних условий.

Лучшим является решение с максимальной оценкой.

Для примера 5.1 обобщенные оценки альтернатив, полученные для различных вариантов внешних условий, сводятся в матрицу выигрышей (табл. 5.5).

Таблица 5.5

Матрица выигрышей

Проект	Внешние условия (спрос)		
	Низкий	Средний	Высокий
A	0,71	0,39	0,38
B	0,13	0,2	0,16
C	0,16	0,41	0,46

На основе матрицы выигрышей выбирается лучшая альтернатива. Выбор производится в зависимости от постановки задачи, прежде всего – в зависимости от информации о внешних условиях. В данном случае известны вероятности внешних условий, т. е. экспертные оценки вероятностей для различных уровней спроса. Поэтому для выбора альтернативы используется критерий Байеса (критерий максимума среднего выигрыша). Для каждой альтернативы определяется обобщенная оценка с учетом всех вариантов внешних условий:

$E_A = 0{,}71 \cdot 0{,}1 + 0{,}39 \cdot 0{,}6 + 0{,}38 \cdot 0{,}3 = 0{,}42,$

$E_B = 0{,}13 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}16 \cdot 0{,}3 = 0{,}18,$

$E_C = 0{,}16 \cdot 0{,}1 + 0{,}41 \cdot 0{,}6 + 0{,}46 \cdot 0{,}3 = 0{,}4.$

Таким образом, в качестве рационального решения следует выбрать строительство предприятия по проекту *A*.

5.4. Выбор решений при неизвестных вероятностях внешних условий

Если вероятности внешних условий неизвестны, то для оценки и выбора решений могут применяться критерии, рассмотренные в п. 3.4.2.

Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретические сведения по лабораторной работе.
2. Получить задание на лабораторную работу.
3. Свести глобальные приоритеты альтернатив в матрицу выигрышей. Выбрать рациональную альтернативу, используя (в зависимости от имеющейся информации о внешних условиях) критерий Байеса, Лапласа, Вальда или Гурвица.

5.5. Методы и процедуры принятия решений при многих показателях

5.5.1. Метод экспресс-анализа альтернатив. Методика Флейшмана

Приведено на основе материала источника [14].

Метод предназначен для отбора перспективных альтернатив. При этом перспективными считаются альтернативы, не имеющие существенных недостатков ни по одному из показателей.

Метод рассчитан на применение в задачах, в которых большинство показателей являются числовыми. Он может применяться и для решения задач, в которых имеются качественные (выраженные в словесной форме) показатели; в этом случае для перехода к числовым оценкам используется шкала Харрингтона, применение которой рассмотрено в подразд. 3.2.

Для оценок, имеющих вид «да/нет» (т. е. отражающих наличие или отсутствие некоторого показателя), обычно используются следующие числовые оценки: «да» – 0,67, «нет» – 0,33 (здесь предполагается, что оценка «да» более желательна, чем «нет»).

Принцип работы методики экспресс-анализа альтернатив следующий. Для каждой альтернативы находится худшая оценка (из всех оценок данной альтернативы по критериям, используемым в задаче). Выбираются альтернативы, худшая оценка которых не ниже некоторой пороговой величины.

Пример 5.2. Химический комбинат планирует внедрить комплекс средств автоматизации (КСА) для системы управления технологическими процессами. Имеется возможность выбрать один из семи вариантов КСА ($КСА_1$, $КСА_2$, ..., $КСА_7$). При выборе учитываются четыре показателя: затраты, связанные с изготовлением КСА и его вводом в эксплуатацию, срок ввода КСА в эксплуатацию, срок гарантийного обслуживания предприятием-изготовителем, удобство КСА в эксплуатации. Характеристики КСА приведены в табл. 5.6.

Таблица 5.6

Исходные данные для примера 5.2

Показатель	$КСА_1$	$КСА_2$	$КСА_3$	$КСА_4$	$КСА_5$	$КСА_6$	$КСА_7$
Затраты, млн ден. ед.	40	30	40	60	45	25	55
Срок ввода в эксплуатацию, мес.	8	8	6	6	7	8	6
Срок гарантийного обслуживания, лет	4	4	5	7	4	4	5
Удобство в эксплуатации	Хорошо	Отлично	Удовлетворительно	Отлично	Плохо	Очень хорошо	Хорошо

Выберем множество Парето. Для этого выполним попарное сравнение альтернатив по всем показателям. Во множество Парето войдут пять альтернатив: $КСА_2$, $КСА_3$, $КСА_4$, $КСА_6$, $КСА_7$. Для удобства дальнейшего решения задачи приведем их оценки в табл. 5.7.

Таблица 5.7

Множество Парето для примера 5.2

Показатель	$КСА_2$	$КСА_3$	$КСА_4$	$КСА_6$	$КСА_7$
Затраты, млн ден. ед.	30	40	60	25	55
Срок ввода в эксплуатацию, мес.	8	6	6	8	6
Срок гарантийного обслуживания, лет	4	5	7	4	5
Удобство в эксплуатации	Отлично	Удовлетво-рительно	Отлично	Очень хорошо	Хорошо

Обозначим оценки альтернатив по показателям как X_{ij}, $i = 1, ..., M$; $j = 1, ..., N$. Здесь M – количество показателей; N – количество альтернатив (в данной задаче $M = 4$, $N = 5$).

Выбор множества перспективных альтернатив на основе метода экспресс-анализа реализуется в следующем порядке.

Этап 1. Оценки альтернатив по показателям приводятся к безразмерному виду. Безразмерные оценки альтернатив P_{ij}, $i = 1, ..., M$; $j = 1, ..., N$, находятся следующим образом:

- для показателей, подлежащих максимизации, все оценки альтернатив по показателю делятся на максимальную из оценок по данному показателю:

$$P_{ij}=X_{ij} \,/\, \max_j X_{ij};$$

- для показателей, подлежащих минимизации, из оценок по данному показателю выбирается минимальная, и она делится на все оценки альтернатив по данному показателю:

$$\mathrm{P}_{ij}= \min_j X_{ij} \,/\, X_{ij};$$

- для качественных (словесных) показателей выполняется переход к числовым оценкам по шкале Харрингтона.

Для данной задачи безразмерные оценки приведены в табл. 5.8.

Таблица 5.8

Безразмерные оценки альтернатив для примера 5.2

Показатель	$КСА_2$	$КСА_3$	$КСА_4$	$КСА_6$	$КСА_7$
Затраты	0,83	0,63	0,42	1	0,45
Срок ввода в эксплуатацию	0,75	1	1	0,75	1
Срок гарантийного обслуживания	0,67	0,83	1	0,67	0,83
Удобство в эксплуатации	1	0,6	0,9	0,8	0,7

Примечание. По показателю «удобство в эксплуатации» эксперт назначил альтернативе $КСА_2$ оценку 1, а $КСА_4$ – оценку 0,9, хотя обе альтернативы оценивались по данному показателю как отличные. Это означает, что, согласно мнению эксперта, по данному показателю $КСА_2$ немного лучше, чем $КСА_4$.

Безразмерные величины не измеряются в каких-либо единицах, поэтому их можно сравнивать друг с другом, складывать и т. д. Безразмерные оценки не различаются по диапазону значений: все они имеют значения в пределах от 0 до 1. Они не различаются также по направленности: чем больше безразмерная оценка, тем лучше (по любому критерию), и лучшее значение равно 1.

Этап 2. Для каждой альтернативы находится минимальная оценка, т. е. худшая из оценок данной альтернативы по всем критериям:

$$P_j = \min_i P_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Например, для $КСА_2$ эта оценка равна 0,67, она находится как минимальная из 0,83; 0,75; 0,67 и 1.

Минимальные оценки приведены в табл. 5.9.

Таблица 5.9

Минимальные оценки альтернатив

Альтернатива	$КСА_2$	$КСА_3$	$КСА_4$	$КСА_6$	$КСА_7$
P_j	0,67	0,6	0,42	0,67	0,45

Этап 3. Выбирается пороговое значение минимальной оценки P_0. Эта величина назначается ЛПР или экспертом из субъективных соображений, например, в зависимости от количества альтернатив, которые требуется отобрать для дальнейшего анализа.

Пусть в данном примере назначено $P_0 = 0,5$.

Этап 4. Выбирается множество альтернатив, для которых $P_j > P_0$. Таким образом, для дальнейшего анализа отбираются альтернативы, у которых все оценки (в том числе худшая) не ниже предельной величины P_0.

В данном примере отбираются альтернативы $КСА_2$, $КСА_3$, $КСА_6$. Окончательный выбор производится на основе одного из методов, рассматриваемых ниже.

5.5.2. Методика экспресс-анализа с использованием функции штрафа

Приведено на основе материала источника [19]. Метод предназначен для выбора рациональной альтернативы из множества альтернатив, оцениваемых по нескольким показателям.

Как и методика экспресс-анализа альтернатив, данный метод рассчитан на решение задач, в которых решение принимается на основе числовых показателей (или может быть выполнен переход к таким показателям).

Основное преимущество этого метода – минимальный объем информации, которую требуется получить от ЛПР или эксперта для выбора решения, что позволяет практически полностью автоматизировать решение задачи. В то же время недостаточный учет субъективных суждений ЛПР является недостатком этого метода.

Метод основан на вычислении обобщенной оценки каждой альтернативы (с учетом оценок по всем показателям) и сопоставлении этих оценок.

Пример 5.3. Рассмотрим задачу выбора варианта КСА (см. пример 5.2). В табл. 5.10 приведены оценки альтернатив, отобранных на основе выбора множества Парето и метода экспресс-анализа альтернатив.

Таблица 5.10

Исходные данные для примера 5.3

Показатель	$КСА_2$	$КСА_3$	$КСА_6$
Затраты, млн ден. ед.	30	40	25
Срок ввода в эксплуатацию, мес.	8	6	8
Срок гарантийного обслуживания, лет	4	5	4
Удобство в эксплуатации	Отлично	Удовлетво-рительно	Очень хорошо

Этап 1. Оценки альтернатив приводятся к безразмерному виду, как и в методе экспресс-анализа альтернатив. Безразмерные оценки альтернатив для данного примера приведены в табл. 5.11.

Таблица 5.11

Безразмерные оценки альтернатив для примера 5.3

Показатель	$КСА_2$	$КСА_3$	$КСА_6$
Затраты	0,83	0,63	1
Срок ввода в эксплуатацию	0,75	1	0,75
Срок гарантийного обслуживания	0,8	1	0,8
Удобство в эксплуатации	1	0,6	0,8

Этап 2. Определяются веса (оценки важности) показателей. В рассматриваемом методе веса находятся на основе разброса оценок. Веса определяются в следующем порядке:

1. Определяются средние оценки по каждому показателю:

$$\bar{P}_i = 1 / N \sum_{j=1}^{N} P_{ij}, \quad i = 1, ..., M,$$

где M – количество показателей; N – количество альтернатив; P_{ij} – безразмерные оценки.

Для данного примера $\bar{P}_1 = (0{,}83 + 0{,}63 + 1) / 3 = 0{,}82$, $\bar{P}_2 = (0{,}75 + 1 + 0{,}75) / 3 = 0{,}83$, $\bar{P}_3 = 0{,}87$, $\bar{P}_4 = 0{,}8$.

2. Находятся величины разброса по каждому показателю:

$$R_i = 1 / N \cdot \bar{P}_i \sum_{j=1}^{N} \left| P_{ij} - \bar{P}_i \right|, \quad i = 1, ..., M.$$

Для данного примера

$R_1 = (|0{,}83 - 0{,}82| + |0{,}63 - 0{,}82| + |1 - 0{,}82|) / (3 \cdot 0{,}82) = 0{,}16$,
$R_2 = (|0{,}75 - 0{,}83| + |1 - 0{,}83| + |0{,}75 - 0{,}83|) / (3 \cdot 0{,}83) = 0{,}13$,
$R_3 = 0{,}1$, $R_4 = 0{,}17$.

3. Находится сумма величин разброса:

$$R = \sum_{i=1}^{M} R_i .$$

Для данного примера $R = 0{,}16 + 0{,}13 + 0{,}1 + 0{,}17 = 0{,}56$.

4. Находятся веса показателей, отражающие разброс оценок:

$$W_i = R_i / R, \quad i = 1, ..., M.$$

Для данного примера $W_1 = 0{,}16 / 0{,}56 = 0{,}29$, $W_2 = 0{,}13 / 0{,}56 = 0{,}23$, $W_3 = 0{,}18$, $W_4 = 0{,}3$.

Чем больше разброс (различие) в оценках альтернатив по показателю, тем больше вес этого показателя. Таким образом, показатели, по которым оценки альтернатив существенно различаются, считаются более важными. Если оценки альтернатив по какому-либо показателю очень близки, то его вес будет небольшим, т. к. сравнение альтернатив при близких оценках не имеет смысла.

Этап 3. Находятся взвешенные оценки альтернатив (путем деления весов показателей на оценки по соответствующим показателям):

$$E_{ij} = W_i / P_{ij}, \quad i = 1, ..., M, \; j = 1, ..., N.$$

Взвешенные оценки для данного примера приведены в табл. 5.12.

Таблица 5.12

Взвешенные безразмерные оценки альтернатив

Показатель	$КСА_2$	$КСА_3$	$КСА_6$
Затраты	0,35	0,46	0,29
Срок ввода в эксплуатацию	0,31	0,23	0,31
Срок гарантийного обслуживания	0,23	0,18	0,23
Удобство в эксплуатации	0,3	0,5	0,38

Здесь, например, E_{11} = 0,29 / 0,83 = 0,35, E_{12} = 0,29 / 0,63 = 0,46, E_{13} = = 0,29 / 1=0,29, E_{21} = 0,23 / 0,75 = 0,31 и т. д.

Чем большие значения принимают безразмерные оценки P_{ij}, тем меньше значения взвешенных оценок. Таким образом, чем меньше взвешенные оценки, тем лучше альтернатива.

Этап 14. Определяются комплексные оценки альтернатив (суммы взвешенных оценок):

$$E_j = \sum_{i=1}^{M} E_{ij}, \qquad j=1, ..., N.$$

Для данного примера E_1 = 0,35+0,31+0,23+0,3 = 1,19 (комплексная оценка альтернативы $КСА_2$), E_2 = 0,46+0,23+0,18+0,5 = 1,37 ($КСА_3$), E_3 = 0,29+0,31+ +0,23+0,38 = 1,21 ($КСА_6$).

Чем меньше комплексная оценка, тем лучше альтернатива. Таким образом, в данном примере лучшим является вариант комплекса средств автоматизации $КСА_2$, несколько хуже вариант $КСА_6$, еще хуже – $КСА_3$.

5.5.3. Модифицированный алгоритм Кемени – Снелла

Рассматриваемый алгоритм предназначен для ранжирования альтернатив с учетом их оценок по нескольким показателям.

Основное преимущество алгоритма – возможность анализа и выбора альтернатив, оцениваемых по показателям различных видов: числовым, качественным, «да/нет» и т. д. Алгоритм также позволяет учитывать суждения ЛПР о важности показателей.

Алгоритм основан на ранжировании и попарном сравнении альтернатив по каждому показателю, рассмотрен в п. 3.2.3.

Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретические сведения по лабораторной работе.
2. Получить задание по лабораторной работе.

3. Выбрать множество Парето.

4. По указанию преподавателя выполнить анализ альтернатив и выбрать лучшую альтернативу одним из следующих двух способов:

- *первый способ*:

а) используя методику экспресс-анализа альтернатив, выбрать три лучшие альтернативы;

б) выполнить ранжирование выбранных альтернатив, используя методику скаляризации векторных оценок;

в) сравнить две лучшие альтернативы, используя методику сравнительной оценки двух альтернатив по степени доминирования;

- *второй способ*:

а) по виду имеющихся экспертных суждений о важности показателей выбрать метод экспертного анализа, который следует использовать для определения весов показателей: метод предпочтений или метод ранга. Используя выбранный метод экспертного анализа, вычислить веса показателей;

б) выполнить ранжирование альтернатив на основе модифицированного алгоритма Кемени – Снелла. По результатам ранжирования отобрать три лучшие альтернативы.

5.6. Примеры и задания моделирования СМО

5.6.1. Примеры решения задач анализа СМО

Одноканальная СМО с отказами

Пример 5.3. В ремонтной мастерской работает один мастер. Время обслуживания распределено по показательному закону, в среднем 10 мин. Клиент, пришедший в пункт, когда мастер занят, не ожидает обслуживания и уходит. Поток клиентов – простейший с интенсивностью 8 клиентов/ч. Найти показатели эффективности работы данного пункта.

Решение. Имеем $\lambda = 8$ (клиентов/ч), среднее время обслуживания $\bar{t}_{об} =$ $=12$ мин $= 0{,}2$ ч. Следовательно, интенсивность потока обслуживания $\mu = 1/\bar{t}_{об} =$ $= 5$ ед./ч. По формуле $Q = \mu / (\mu + \lambda)$ получаем, что относительная пропускная способность $Q = 0{,}38$, т. е. в среднем 38 % поступающих клиентов будут обслужены. Соответственно, вероятность отказа в обслуживании составит $P_{отк} = 0{,}62$ (т. е. 0,62 %). Абсолютная пропускная способность СМО $A = 8 \cdot 0{,}38 =$ $= 3{,}04$, т. е. в среднем в час будут обслужены 3 клиента.

Многоканальная СМО с отказами

Пример 5.4. Рассматривается работа автозаправочной станции (АЗС) с тремя заправочными колонками. Если заняты все три колонки, то машина не встает в очередь, а покидает АЗС. Среднее время заправки автомобиля 3 мин.

Интенсивность потока автомобилей – 0,25 ед./мин. Найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности работы АЗС.

Решение. В принятых обозначениях условия примера можно записать в виде $\lambda = 0{,}25$ ед./мин, $\bar{t}_{об} = 3$ мин. Тогда интенсивность потока обслуживания $\mu = 1/\bar{t}_{об} = 1/3$ ед./мин.

Интенсивность нагрузки канала $\rho = \lambda / \mu = 0{,}75$, т. е. в среднем за время заправки одного автомобиля, равного 3 мин, поступит 0,75 новых заявок.

Найдем предельные вероятности состояний СМО:

$$\rho_0 = (1 + 0{,}75 + 0{,}75^2 / 2! + 0{,}75^3 / 3!)^{-1} = 0{,}476,$$

$p_1 = 0{,}75 \cdot 0{,}476 = 0{,}357$, $p_2 = 0{,}75^2 / 2! \cdot 0{,}476 = 0{,}134$, $p_3 = 0{,}75^3 / 3! \cdot 0{,}476 = 0{,}033$.

Таким образом, в предельном стационарном режиме 47,6 % времени АЗС не работает из-за отсутствия заявок, 35,7 % времени занята только одна колонка, 13,4 % времени занято две колонки, 3,3 % времени занято три колонки.

Вероятность отказа в ремонте $P_{отк} = p_3 = 0{,}033$, т. е. в среднем 3,3 % поступающих заявок (автомобилей) будут обслужены.

Относительная пропускная способность (вероятность обслуживания): $Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}033 = 0{,}967$, т. е. в среднем 96,7 % поступающих заявок (автомобилей) будут обслужены.

Абсолютная пропускная способность СМО, т. е. среднее число заявок (автомобилей), обслуживаемых в единицу времени: $A = \lambda Q = 0{,}25 \cdot 0{,}967 = 0{,}242$.

Среднее число занятых каналов: $\bar{k}_{зан} = A / \mu = 0{,}242 / 1 / 3 = 0{,}725$, т. е. в трехканальной СМО среднее число занятых каналов меньше одного (эффективно ли это?).

Одноканальная СМО с ограниченной длиной очереди

Пример 5.5. Автозаправочная станция (АЗС) представляет собой СМО с одним каналом обслуживания (одной колонкой). Площадка при станции допускает пребывание в очереди на заправку не более пяти машин одновременно ($m = 5$). Если в очереди уже находятся пять машины, очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится. Поток машин, прибывающих для заправки, имеет интенсивность $\lambda = 2$ маш./мин). Интенсивность потока обслуживания составляет $\mu = 2$. Определите характеристики СМО и сделайте вывод об эффективности ее работы.

Решение

$\rho = \lambda / \mu = 1 \to \rho_0 = 1 / m + 2 = 1 / 7$,

$p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0 \to p_1 = p_2 = \ldots = p_6 = 1 / 7$,

$P_{отк} = p_6 = 1 / 7$,

$Q = 1 - P_{отк} = 6 / 7$,

$A = \lambda Q = 12 / 7 \approx 1{,}7$ маш./мин.

Среднее число находящихся в системе заявок:

$L_{сист} = 0 \cdot \frac{1}{7} + 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{1}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7} + 5 \cdot \frac{1}{7} + 6 \cdot \frac{1}{7} = 3.$

Среднее время пребывания машины в системе:

$T_{сист} = 3 / 2 = 1,5$ мин.

Средняя длина очереди: $L = 5 \cdot 6 / 7 = 2,1$ маш.

Среднее время ожидания в очереди: $T_{оч} = 2,1 / 2 = 1,05$ мин.

Каждому седьмому клиенту отказывают в обслуживании → эффективность СМО низкая.

Пример 5.6. В небольшом магазине самообслуживания установлено, что поток покупателей является простейшим с интенсивностью λ = 1 покупатель в минуту. В этом магазине установлен один кассовый аппарат, позволяющий добиться такой производительности труда, при которой среднее время обслуживания одного клиента составляет примерно 1,25 покуп./мин.

Определите характеристики СМО при условии, что очередь ограничена контролером при входе в зал самообслуживания: $m = 3$ покуп.

Решение. Найдем интенсивность потока обслуживания: $\mu = 1 / t_{n\tilde{n}} = 1 / 0,8 = 1,25$. Найдем приведенную интенсивность потока заявок: $\rho = \lambda / \mu = 1 / 0,8 = 1,25$. Найдем предельные вероятности:

$p_0 = (1 - 1,25) / (1 - 1,25)^{3+2} \approx 0,122$, $p_1 = 1,25 \cdot 0,122 \approx 0,152$

$p_2 = 1,25^2 \cdot 0,122 \approx 0,191$, $p_3 = 1,25^3 \cdot 0,122 \approx 0,238$,

$p_4 = 1,25^4 \cdot 0,122 \approx 0,297$.

Вероятность отказа: $P_{отк} = p_4 \approx 0,297$.

Относительная пропускная способность СМО: $Q = 1 - 0,297 = 0,703$.

Абсолютная пропускная способность СМО: $\rho = 1 \cdot 0,703 = 0,703$ покуп./мин.

Среднее число покупателей у кассы:

$L_{сист} = 0 \cdot 0,122 + 1 \cdot 0,152 + 2 \cdot 0,191 + 3 \cdot 0,238 + 4 \cdot 0,297 = 2,436.$

Среднее время пребывания покупателя у кассы:

$T_{сист} = 2,436 / 1 = 2,436$ мин.

Среднее число покупателей в очереди:

$K_{сист} = 1,25^2\,(1 - 1,25^3\,(3 - 3 \cdot 1,25 + 1)) / (1 - 1,25)^2 \cdot 0,122 \approx 1,56,$

т. е. среднее число покупателей, ожидающих в очереди у кассы, равно 1,56.

Среднее время ожидания покупателя в очереди:

$T_{оч} = 1,56 / 1 = 1,56$ мин.

Вероятность простоя кассира мала, среднее время ожидания покупателя небольшое, вероятность отказа примерно 0,297. Таким образом, можно сказать, что система работает эффективно.

Многоканальная СМО с ограниченной длиной очереди

Пример 5.7. На некоторую базу в среднем через 30 мин прибывают автомобили с продукцией. Среднее время разгрузки одной машины составляет 1,5 ч. Разгрузку производят две бригады грузчиков. На территории базы могут находиться в очереди в ожидании разгрузки не более 4 автомобилей. Определить показатели работы СМО.

Решение. СМО двухканальная, n = 2. Число мест в очереди m = 4. Интенсивность входящего потока λ = 2 авт./ч. Интенсивность обслуживания: $\mu = 1 / t_{об}$ = 2/3 авт./ч. Приведенная интенсивность потока заявок: $\rho = \lambda / \mu = 3$, $\rho / \mu = 1{,}5$.

Вероятность того, что все бригады не загружены:

$$p_0 = (1 + 3 / 1! + 3^2 / 2! + 3^3 / (2 \cdot 2!) + ((1 - (3 / 2)^4) / (1 - (3 / 2)))^{-1} = 0{,}0158.$$

Вероятность отказа:

$$P_{отк} = P_{n+m}, = p^{n+m} / n^m n! \cdot p_0 = 3^6 / 2^4 \cdot 2! \cdot 0{,}0158 = 0{,}36.$$

Относительная пропускная способность:

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}36 = 0{,}64.$$

Абсолютная пропускная способность: $A = 2 \cdot 0{,}64 = 1{,}28$ авт./ч.

Среднее число занятых бригад: $\bar{k}_{зан} = A / \mu = PQ = 3 \cdot 0{,}64 = 1{,}92$.

Среднее число заявок, находящихся в очереди:

$L_{оч} = 3^3 / 2 \cdot 2! \cdot (1 - 1{,}5^4 \cdot 4 + 1 - 4 / 2 \cdot 3) / (1 - 1{,}5)^2 \cdot 0{,}0158 = 2{,}6$ авт.

Среднее время ожидания в очереди: $T_{оч} = 2{,}6 / 2 = 1{,}3$ ч.

Среднее число заявок в системе: $L_{сист} = 2{,}6 + 1{,}92 = 4{,}52$ авт.

Среднее время пребывания заявки в СМО: $T_{сист} = 4{,}52 / 2 = 2{,}26$ ч.

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Пример 5.8. В парикмахерской работает один мастер. Интенсивность потока клиентов составляет 4 клиента/ч. Интенсивность обслуживания – 5 клиентов/ч. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Определить показатели эффективности работы парикмахерской и вероятность того, что ожидают своей очереди не более двух клиентов.

Решение. $\rho = \lambda / \mu = 4 / 5\ 0{,}8 < 1 \rightarrow$ предельные вероятности существуют.

Предельная вероятность того, что парикмахер простаивает, определяется соотношением $p_0 = 0{,}8^0(1 - 0{,}8) = 0{,}2$, а вероятность того, что он занят, $P_{зан} = 1 - P_0 = 0{,}8$.

Вероятность того, что в очереди находятся не более трех клиентов:

$$P(k \leq 3) = p_1 + p_2 + p_3,$$

где

$p_1 = \rho^1(1 - \rho) = 0{,}8\ (1 - 0{,}8) = 0{,}16$; $p_2 = \rho^2\ (l - \rho) = 0{,}8^2(1 - 0{,}8) = 0{,}128$;
$p_з = \rho^3(1 - \rho) = 0{,}8^3(1 - 0{,}8) = 0{,}1024$.

Получаем $P(k \le 3) = 0{,}16 + 0{,}128 + 0{,}1024 = 0{,}3904$.

Среднее число заявок и среднее время пребывания в системе определяется по формулам: $L_{\text{сист}} = \rho / (1 - \rho) = 0{,}8 / (1 - 0{,}8) = 4$, $T_{\text{сист}} = L_{\text{сист}} / \lambda = 4 / 4 = 1$ ч.

Среднее число клиентов, ожидающих в очереди, и среднее время пребывания в очереди: $L_{\text{оч}} = \rho / (1 - \rho) = 0{,}8^2 / (1 - 0{,}8) = 3{,}2$, $T_{\text{оч}} = 3{,}2 / 4 = 0{,}8$ ч.

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Пример 5.9. В магазине работают 3 продавца. Покупатели магазина образуют простейший поток требований с интенсивностью 90 чел./ч. Интенсивность обслуживания одного покупателя составляет 60 чел./ч. Найдите характеристики обслуживания.

Решение. $\rho = \lambda / \mu = 60 / 30 = 2$. По условию $\rho < n$, следовательно, очередь не будет возрастать до бесконечности и в системе наступает предельный стационарный режим работы.

Найдем вероятность того, что у касс отсутствуют покупатели:

$p_0 = (1 + 2 / 1! + 2^2 / 2! + 2^3 / 3! + 2^4 / 3! \cdot (1 / (3 - 2))^{-1} \cdot 0{,}111$.

Вероятность того, что у касс обслуживаются один, два, три покупателя, находим по формулам:

$p_1 = 2 \cdot 0{,}111 = 0{,}222$; $p_2 = 2^2 / 2! \cdot 0{,}111 = 0{,}222$; $p_3 = 2^3 / 3! \cdot 0{,}111 = 0{,}148$.

Вероятность того, что у касс стоят в очередь один, два покупателя, находим по формулам:

$p_4 = 2^4 / (3 \cdot 3!) \cdot 0{,}111 = 0{,}099$; $p_5 = 2^5 / (3^2 \cdot 3!) \cdot 0{,}111 = 0{,}066$.

Вероятность того, что заявка окажется в очереди, определяется по формуле

$P_{\text{оч}} = 2^4 / (3! \cdot (3 - 2)) \cdot 0{,}111 = 0{,}296$.

Среднее число занятых касс: $\bar{k}_{\text{зан}} = 60 / 30 = 2$ кассира.

Среднее число покупателей в очереди: $L_{\text{оч}} = 2^4 / (3 \cdot 3!(1 - 2 / 3)^2)\ 0{,}111 = 0{,}888$.

Среднее число покупателей, обслуживаемых кассирами и стоящих в очереди: $L_{\text{сист}} = 0{,}888 + 2 = 2{,}888$.

Среднее время пребывания заявки в очереди: $T_{\text{оч}} = 0{,}888 / 60 = 0{,}0148$ чел./ч.

Среднее время пребывания заявки в системе: $T_{\text{сист}} = 2{,}888 / 60 = 0{,}0481$ чел./ч.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Harrington, E. C. The desirable function / E. C. Harrington // Industrial Quality Control. – 1965. – V. 21. – № 10 – P. 124–131.

2. Roy, B. The outranking approach and foundation of ELECTRE methods / B. Roy // Theory and Decision. – 1991. – № 31. – p. 49–73.

3. Лекция 1. Понятия модели и моделирования. Классификация моделей [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https//moodle.kstu.ru/mod/resource/view.php?id=61140.

4. Блауберг, И. В. Становление и сущность системного подхода / И. В. Блауберг, Э. Г. Юдин. – М. : Наука, 1973. – 273 с.

5. Денисов, А. А. Теория больших систем управления : учеб. пособие для вузов / А. А. Денисов, Д. Н. Колесников. – Л. : Энергоиздат, 1982. – 288 с.

6. Клиланд, Д. Системный анализ и целевое управление / Д. Клиланд, В. Кинг. – М. : Советское радио, 1974. – 280 с.

7. Колбин, В. В. Методы принятия решений : учеб. пособие для вузов / В. В. Колбин. – 2-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2021 – 644 с.

8. Кошуняева, Н. В. Теория массового обслуживания (практикум по решению задач) / Н. В. Кошуняева, Н. Н. Патронова. – Архангельск : РФ, 2013. – 108 с.

9. Кузьмин, А. М. Диаграмма Парето / А. М. Кузьмин // Методы менеджмента качества. – 2005. – № 3. – С. 32.

10. Ларичев, О. И. Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в Волшебных Странах : учеб. / О. И. Ларичев. – М. : Логос, 2000. – 296 с.

11. Моисеев, Н. Н. Математические задачи системного анализа / Н. Н. Моисеев // Синергетика: от прошлого к будущему. – М. : URSS, 2016. – № 5.

12. Системный анализ и принятие решений в проектной и управленческой деятельности : учеб.-метод. пособие / Б. В. Никульшин [и др.]. – Минск : БГУИР, 2021. – 72 с.

13. Общесистемное проектирование АСУ реального времени / С. В. Володин [и др.] ; под ред. В. А. Шабалина. – М. : Радио и связь, 1984. – 232 с.

14. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 2003. – 320 с.

15. Саати, Т. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1965. – 510 с.

16. Смородинский, С. С. Системный анализ и исследование операций: лабораторный практикум / С. С. Смородинский, Н. В. Батин. – Минск : БГУИР, 2009. – 64 с.

17. Смородинский, С. С. Системный анализ и исследование операций: оптимизация решений на основе методов моделей математического программирования : учеб.-метод. пособие / С. С. Смородинский, Н. В. Батин. – Минск : БГУИР, 2010. – 192 с.

18. Смородинский, С. С. Системный анализ и исследование операций: сб. заданий и методические указания по курсовому проектированию / С. С. Смородинский, Н. В. Батин. – Минск : БГУИР, 2006. – 76 с.

19. Советов, Б. Я. Моделирование систем : учеб. для вузов / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – М. : Высш. шк., 1985. – 271 с.

20. Флейшман, Б. С. Основы системологии / Б. С. Флейшман. – М. : Радио и связь, 1982. – 272 с.

21. Холл, А. Д. Опыт методологии для системотехники / А. Д. Холл. – М. : Советское радио, 1975. – 448 с.

Св. план 2022, поз. 46

Учебное издание

Никульшин Борис Викторович
Тиханович Татьяна Викторовна
Русин Виталий Геннадьевич

ОСНОВЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *А. Ю. Шурко*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *Е. Г. Бабичева*

Подписано в печать 02.04.2025. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,7. Тираж 50 экз. Заказ 14.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск