РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОБОРУДОВАНИЯ СТАНДАРТНЫМ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

А. В Моторный, В. С. Муха
Кафедра информационных технологий автоматизированных систем, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: mukha@bsuir.by, motorlesha@mail.ru

Разрабатывается алгоритм решения задачи об использовании оборудования стандартным симплекс-методом. Теоретической основой алгоритма является формулировка задачи в многомерно-матричной форме (в терминах операций с многомерными матрицами) и переход к формулировке в терминах матриц, ассоциированных с многомерными.

Введение

Задача об использовании оборудования является нестандартной задачей линейного программирования, подобно транспортной задаче или задаче о назначениях. Нестандартные задачи вполне могут быть решены симплекс-методом, хотя для некоторых из них разработаны специальные методы решения. Например, для транспортной задачи разработан метод потенциалов. Считается, что специальные методы имеют меньшую вычислительную сложность по сравнению с симплекс-методом. Другая причина для разработки специального метода – это трудности, возникающие при использовании симплекс-метода. Для этого необходимо нестандартную задачу привести к стандартному виду, а после ее решения выполнить обратный переход для интерпретации полученного решения. Обычно это делается вручную (ручное сопровождение решения), что при больших размерах задачи практически невыполнимо. Широкое распространение тщательно отлаженных программ, реализующих симплекс-метод, делает их привлекательными для решения в том числе и нестандартных задач. Большие вычислительные мощности современной компьютерной техники и удобства использования симплекс-метода компенсируют возможный проигрыш в вычислительной сложности в случае отказа от использования или разработки специальных методов. Рассматриваемая в данной работе задача об использовании оборудования не имеет специального метода решения. В связи с этим в работе разрабатывается алгоритм, автоматизирующий решение задачи об использовании оборудования стандартным симплекс-методом.

I. Постановка задачи

Задача об использовании оборудования имеет следующую формулировку [1]. Некоторое производство имеет n типов оборудования (станков) и выпускает продукцию (изделия) m видов. Пусть $u_{i,j}$ – количество станко-часов j-го типа, затрачиваемых на изготовление продукции i-го вида, $\alpha_{i,j}$ – производительность оборудования j-го типа при изготовлении единицы продукции i-го вида (единиц/станко-часы), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Тогда $\alpha_{i,j}u_{i,j}$ представляет собой объем продукции i-го вида, выпущенной на оборудовании j-го типа. Ставится задача определить управляющие воздействия $u_{i,j}$, при которых суммарный выпуск продукции в течение планового периода будет максимальным:

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}u_{i,j}\to\max_{u_{i,j}}. \qquad (1)$$

Управляющие воздействия должны удовлетворять следующим балансовым и ограничивающим условиям. Условие полного использования всех работающих станков:

$$\sum_{i=1}^{m}u_{i,j}=k_{b,j}b_j, \quad j=\overline{1,n}, \qquad (2)$$

где b_j – располагаемое в плановом периоде количество j-х станко-часов, $k_{b,j}$ – коэффициент работающего оборудования. Условие выполнения и перевыполнения планового задания в ассортименте выпускаемых изделий:

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}u_{i,j}\geq M_i, \quad i=\overline{1,m}, \qquad (3)$$

где M_i– плановое задание по выпуску i-го изделия. Условие не превышения располагаемых трудовых ресурсов в целом по производству:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}t_{i,j}\alpha_{i,j}u_{i,j}\leq T, \qquad (4)$$

где $t_{i,j}$ – трудоемкость выработки i-го изделия на j-м оборудовании, T – явочное число человеко-часов в производстве.

II. Решение задачи

Предлагаемый в работе подход к решению задачи состоит в ее многомерно-матричной формулировке. Интерпретация многомерно-матричной формулирповки в терминах ассоциированных матриц представляет собой стандартную формулировку задачи [2], которая решается стандартным симплекс-методом с помощью одной из известных для этих целей программ.

Многомерно-матричная формулировка задачи (1)–(4) имеет следующий вид.

$$ {}^{0,2}(\alpha\, u) \to \max_u, \tag{5}$$

$$ {}^{0,2}(c\, u) = z, \tag{6}$$

$$ {}^{0,2}(d\, u) \geq M, \tag{7}$$

$$ {}^{0,2}(\tau\, u) \leq T, \tag{8}$$

где введены и рассматриваются следующие матрицы:

$$\alpha = (\alpha_{i,j}), \quad u = (u_{i,j}), \quad i = \overline{1,m},\, j = \overline{1,n},$$

$$c = (c_{k,i,j}), \quad k = \overline{1,n},\, i = \overline{1,m},\, j = \overline{1,n},$$

$$c_{k,i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j \end{array} \right\},$$

$$z = (z_j) = (k_{b,j} b_j), \quad j = \overline{1,n},$$

$$d = (d_{k,i,j}), \quad k = \overline{1,m},\, i = \overline{1,m},\, j = \overline{1,n},$$

$$d_{k,i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{i,j}, & k = i, \\ 0, & k \neq j \end{array} \right\},$$

$$M = (M_i), \quad i = \overline{1,m},$$

$$\tau = (\tau_{i,j}) = (t_{i,j}\alpha_{i,j}), \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Запись вида ${}^{0,2}(\alpha\, u)$ означает $(0,2)$-свернутое произведение матриц α и u [3].

Далее, многомерно-матричная постановка задачи (5)–(8) может быть записана в терминах матриц, ассоциированных с матрицами выражений (5)–(8) [3]:

$$ {}^{0,1}(\tilde{\alpha}_{(0,0,2)}\tilde{u}_{(2,0,0)}) \to \max_{\tilde{u}_{(2,0,0)}}, \tag{9}$$

$$ {}^{0,1}(\tilde{c}_{(1,0,2)}\tilde{u}_{(2,0,0)}) = z, \tag{10}$$

$$ {}^{0,1}(\tilde{d}_{(1,0,2)}\tilde{u}_{(2,0,0)}) \geq M, \tag{11}$$

$$ {}^{0,1}(\tilde{\tau}_{(1,0,2)}\tilde{u}_{(2,0,0)}) \leq T, \tag{12}$$

где запись вида ${}^{0,1}(\tilde{\alpha}_{(0,0,2)}\tilde{u}_{(2,0,0)})$ означает $(0,1)$-свернутое произведение матриц $\tilde{\alpha}_{(0,0,2)}$ и $\tilde{u}_{(2,0,0)}$ [3].

Задача (9)–(12) является стандартной задачей линейного программирования, записанной в терминах обычных (двухмерных) матриц и векторов. Здесь $\tilde{\alpha}_{(0,0,2)}$, z, M, T – векторы, а $\tilde{c}_{(1,0,2)}$, $\tilde{d}_{(1,0,2)}$, $\tilde{\tau}_{(1,0,2)}$ – двухмерные матрицы. Они могут быть получены программно путем формирования ассоциированных матриц по исходным одноименным многомерным матрицам задачи (5)–(8). Задача (9)–(12) решается относительно неизвестного вектора $\tilde{u}_{(2,0,0)}$. Она может быть решена программой линейного программирования Matlab linprog.m [4]. После получения векторного оптимального решения $\tilde{u}_{(2,0,0)}$ следует вернуться к оптимальному решению в исходном матричном виде $u = (u_{i,j})$ и исходным переменным задачи (1)–(4). Это также можно сделать программно путем формирования многомерных матриц по их ассоциированным.

III. Программная реализация и испытание алгоритма

Данный алгоритм был реализован программно в виде стандартной функции Matlab с ориентацией на использование программы линейного программирования Matlab linprog.m [4] и проверен на следующих исходных данных: $m = 5$, $n = 3$, $b = (1760, 1760, 1760)$, $k_b = (0.75, 0.8125, 0.875)$, $M = (3080, 3060, 3300, 2970, 2640)$, $t_{i,j} = 0.75\ \forall i,j$, $T = 90000$,

$$\alpha = (\alpha_{i,j}) = \left(\begin{array}{ccc} 24 & 21 & 22 \\ 30 & 23 & 11 \\ 20 & 27 & 19 \\ 16 & 20 & 23 \\ 19 & 23 & 28 \end{array} \right).$$

В результате решения этой задачи получена следующая матрица оптимального распределения выпускаемой продукции по типам оборудования:

$$u^* = (u^*_{i,j}) = \left(\begin{array}{ccc} 128.3 & 0.0 & 0.0 \\ 1191.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1430.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 129.1 \\ 0.0 & 0.0 & 1410.9 \end{array} \right).$$

При этом получено максимальное значение целевой функции $f^* = 119910$. Легко убедиться, что ограничения задачи (1)–(4) выполнены.

Выполнялось также успешное компьютерное моделирование и оптимизация задачи большого размера, например, с $m = 100$, $n = 100$ при реалистичном, но случайном выборе численных значений параметров задачи. Трудно предположить, что кто-либо решится на ручное сопровождение решения задачи столь большого размера.

1. Бездудный, Ф. Ф. Математические методы в организации текстильного производства / Ф. Ф. Бездудный. – М.: Легкая индустрия, 1970. – 324 с.
2. Муртаф, Б. Современное линейное программирование / Б. Муртаф. – М.: Мир, 1984. – 224 с.
3. Муха, В. С. Анализ многомерных данных / В. С. Муха. – Минск: Технопринт, 2004. – 368 с.
4. Кетков, Ю. Л. MATLAB 6x: программирование численных методов / Ю. Л. Кетков, А. Ю. Кетков, М. М. Шульц. – СПб: БХВ–Петербург, 2004. – 672 с.