УДК 004.932.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Адамович К.В., Криващёкая А.Д., Щурко А.А.[1], студенты гр.421702

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники[1]
г. Минск, Республика Беларусь

Чаевский В.В. – канд. физ.-мат. наук доцент, доцент кафедры физики

Аннотация. В статье изучаются численные методы моделирования физических процессов, в основе которых лежат дифференциальные и интегральные уравнения. Рассматриваются также их классификации, различные методы решения и ключевые аспекты: дискретизацию операторов и интегральные преобразования для упрощения анализа и вычислений. Анализируется эффективность применения и использования их при моделировании физических процессов.

Ключевые слова. Математическое моделирование, дифференциальные уравнения, математическая физика, интегральные уравнения, численные методы.

Математическое моделирование сочетает в себе искусство и науку для изучения явлений и объектов реального мира. Модель представляет собой сущность, воспроизводящую явление, объект или свойство реального мира. Математическая модель (ММ) отличается тем, что информация о моделируемом объекте представлена через математические выражения и символы, что делает её незаменимой в инженерии и науке.

Одним из методов моделирования является использование дивергентного вида уравнений — дифференциальных уравнений, преобразованных из законов сохранения массы, энергии и импульса в интегральной форме, применимых к сплошной среде. Эти уравнения широко применяются в гидродинамике и термодинамике.

Ключевой аспект любой ММ — её чувствительность, характеризующая зависимость решений от начальных условий и параметров. Высокая чувствительность может вызывать сомнения в применимости модели из-за её нестабильности. Также важным процессом является дискретизация оператора, при которой функциональные операторы заменяются алгебраическими выражениями, зависящими от значений функции в определённых точках. Это облегчает вычисления и делает их применимыми в симуляциях.

Математическое моделирование служит связующим звеном между абстрактной математикой и реальным миром, позволяя исследовать сложные системы и явления с высокой точностью и эффективностью. В свою очередь, математическая физика изучает математические модели физических явлений, объединяя методы математики и физики. Она анализирует существующие модели для описания процессов, таких как механика, электродинамика и квантовая механика.

Математическая физика охватывает три основных типа задач, каждая из которых имеет свои особенности [2]:

1. Задачи Коши (начальные условия);
2. Краевые задачи (граничные условия);
3. Смешанные задачи (начальные и граничные условия).

Уравнения в математической физике можно классифицировать по различным критериям:

- Линейные (с постоянными или переменными коэффициентами):

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x); \tag{1}$$

- Квазилинейные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} + F_1(x, h, u, u_x, u_h) = 0. \tag{2}$$

Уравнения описывают различные физические явления, в зависимости от происходящего процесса:

- Параболические (теплопроводность, диффузия);
- Гиперболические (волновые движения);
- Эллиптические (стационарные поля).

Каждое уравнение имеет своё физическое применение. Примеры уравнений:

- Уравнение переноса (конвекция):

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \Phi(U,x,t); \quad (3)$$

- Волновое уравнение (звуковые волны):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right); \quad (4)$$

-
- Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = f(x,t); \quad (5)$$

- Уравнение Лапласа (стационарные поля):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

Корректность задач зависит от существования, единственности и непрерывности решений. Корректность задач в математической физике требует соблюдения условий:

- Уравнения переноса — начальные и граничные условия.
- Параболические уравнения — теплопередача, диффузия.
- Гиперболические уравнения — колебания, распространение волн.
- Эллиптические уравнения — стационарные распределения температуры или поля.

Численные подходы используют дискретизацию операторов и интегральные преобразования для упрощения анализа и расчётов. Это ключевой инструмент для моделирования сложных систем, что делает математическую физику незаменимой в исследовании и инженерии.

Для этого существуют различные классы интегральных уравнений. Однако прежде, чем мы их рассмотрим, для начала нужно рассказать про само понятие «интегральные уравнения». Обычно под этим термином понимают уравнения, в которых неизвестная функция независимого (скалярного или векторного) аргумента встречается под знаком интеграла. Из них различают линейные и нелинейные интегральные уравнения, исходя из того зависит ли уравнение от неизвестной функции линейным или нелинейным образом. Многие линейные интегральные уравнения (в "одномерном" случае) могут быть записаны в виде уравнения Вольтерры либо же уравнением Фредгольма. А наиболее распространенными представителями нелинейных интегральных уравнений являются уравнения Урысона и уравнения Гаммерштейна. Помимо этого уравнения бывают I и II рода. Прежде, чем объяснить, что такое уравнения I и II рода и какая между ним разница, введем понятие корректности уравнения. Если говорить совсем кратко, то говорят, что уравнение x = I·x + f или 0 = I·x + f корректно, если при любых f оно однозначно разрешимо и решение x непрерывно зависит от f. При этом уравнения I рода представляют собой существенно более сложный объект исследования. Уравнениями II рода называют уравнения вида:

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t), t \in [a,b]. \quad (7)$$

А в свою очередь уравнения I рода выглядят подобным образом:

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t)\,, t \in [a,b]. \quad (8)$$

Выделим еще два класса линейных интегральных уравнений, часто встречающихся в математическом обиходе. Первый из них состоит из так называемых интегральных уравнений с вырожденным ядром. К ним относят уравнения, ядро которых представимо в виде:

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \xi i(t)\eta i(s). \quad (9)$$

А уравнение Вольтерры типа свертки выделяется специальным видом ядра

K (t, s) = k(t – s): $x(t) = \int_0^t k(t-s)x(s)ds + f(t)$ [1]. (10)

Многие задачи математической физики приводят к линейным интегральным уравнениям. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Если внешнее воздействие на какую-либо линейную систему описывается функцией f(x) ($a \le x \le b$), то результат этого воздействия описывается функцией

$$f€ (x) = \int_a^b G(x;\xi) f(\xi) d\xi, \quad (11)$$

где G(x; ξ) — функция влияния, определяемая рассматриваемой системой.

2. Бывают случаи, когда известной оказывается некоторая линейная комбинация

$$\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta f€ (x) \quad (12)$$

функций описывающих внешнее воздействие и соответствующий отклик. Тогда для восстановления внешнего воздействия потребуется решить интегральное уравнение

$$\alpha f(x) + \beta \int_a^b G(x;\xi) f(\xi) d\xi = \varphi(x). \quad (13)$$

Это линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с искомой функцией f(x).

Можно выделить несколько основных методов решения интегральных уравнений [3]:

1. Метод моментов. В методе моментов приближенное решение интегрального уравнения ищется в виде суммы f(x) и линейной комбинации заранее выбранных линейно независимых между собой функций φ1(x), φ2(x), ..., φn(x).

2. Метод квадратур (Нюстрёма). В математике численный анализ методом Нюстрома (методом квадратур) позволяет найти численное решение интегрального уравнения путём замены интеграла представительной взвешенной суммой. Непрерывная задача разбивается на n дискретные интервалы; квадратура или численное интегрирование определяет веса и расположение представительных точек для интеграла.

3. Метод проекций (Галёркина, Коллокация).

- Метод Галёркина — метод приближённого решения краевой задачи для дифференциального уравнения L[u] = f(x). Здесь оператор L[u] может содержать частные или полные производные искомой функции.
- Метод коллокации — это метод численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений. Идея состоит в том, чтобы выбрать конечномерное пространство возможных решений (обычно полиномы до определённой степени) и несколько точек в области (точки коллокации) и выбрать то решение, которое удовлетворяет заданному уравнению в точках коллокации.

Исходя из всего вышеперечисленного, можем сделать вывод, что многие задачи в нынешнее время можно либо полностью, либо частично преобразовать в интегральную форму, причем даже нелинейные и многомерные, что открывает дополнительные пути для анализа и численного решения, которые применимы во многих разных областях физики и инженерии. Данный подход не только помогает в теоретическом понимании проблемы, но и значительно облегчает практические вычисления при моделировании физических процессов, при этом делая расчёты более точными. Все рассмотренные прежде методы эффективны в решении определенных задач, поэтому важно правильно подобрать свой собственный, подходящий под данные условия, в зависимости от типа уравнения и корректности самого поставленного задания. Численные методы лежат в основе моделирования многообразных процессов таких, как теплопередачи, волновых процессов и другие.

Подводя итог, можно сказать, что в последствии данные интегральные уравнения, численные методы используются и применяются в качестве ключевого инструмента для работы со сложными физическими и математическими моделями, что обеспечивает точность, устойчивость, а также вычислительную эффективность.

Список использованных источников:

1. Тумаков Д. Н., Стехина К. Н. Дифференциальные и интегральные уравнения. Численные методы решения: Учебно-методическое пособие. – Казань, 2014. – 35 с.
2. MathHelpPlanet – [Электронный ресурс]. – URL: https://mathhelpplanet.com/static.php?p=chislennye-metody-resheniya-uravnenij-matematicheskoj-fiziki-s-dvumya-peremennymi (Дата обращения: 26.03.2025).
3. Зуева Г. А. Методы математической физики. Интегральные уравнения: Методические указания. – Иваново: Иван. гос. хим.-технол. ун-т, 2006. – 32 с.

UDC 004.932.4

MODELING PHYSICAL PROCESSES BY SOLVING INTEGRAL EQUATIONS

Adamovich K.V., Krivaschokaja A.D., Schurko A.A.[1]

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics[1]*, Minsk, Republic of Belarus*

Chayeuski V.V. – PhD, Associate Professor of the Department of Physics

Annotation. The article examines numerical methods for modeling physical processes based on differential and integral equations. Their classifications, various solution techniques, and key aspects—such as operator discretization and integral transforms to simplify analysis and computations—are also discussed. The efficiency of their application and use in modeling physical processes is analyzed.

Keywords. Mathematical modeling, differential equations, mathematical physics, integral equations, numerical methods.