ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О НАИБОЛЬШЕМ 2-ДИССОЦИИРУЮЩЕМ МНОЖЕСТВЕ

Бердник Л. А.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Дугинов О.И. – канд. физ.-мат. наук

Исследование рассматривает задачу нахождения наибольшего 2-диссоциирующего множества в неориентированном графе – подмножества вершин, порождающее подграф с максимальной степенью вершин не больше, чем 2. В работе изучаются структурные и алгоритмические аспекты задачи, формулируется ее содержательная, распознавательная и оптимизационная постановки, а также предлагается целочисленная линейная модель задачи. Особое внимание уделяется разработке и сравнительному анализу четырех эвристических алгоритмов: жадного, случайного, локального поиска и метода имитации отжига, которые тестируются на случайных графах Эрдеша–Реньи.

Постановка задачи. Приведем содержательную постановку рассматриваемой в работе задачи. Рассмотрим множество элементов (объектов, ресурсов, узлов), между которыми существуют определенные взаимосвязи. Некоторые пары таких элементов находятся во взаимодействии, зависящем от структуры системы (например, технические соединения, маршруты передачи данных, экономическая или логическая взаимозависимость). Эти связи можно представить в виде неориентированного графа, где вершины – элементы системы, а ребра – пары взаимодействующих элементов. Во многих прикладных задачах требуется выделить максимально возможную группу элементов, при этом ограничив число связей внутри этой группы: никакой элемент не должен взаимодействовать более чем с двумя другими внутри этой же группы. Такое ограничение позволяет формировать упорядоченные структуры: цепи, циклы и одиночные элементы, обеспечивая предсказуемое поведение, устойчивость к перегрузкам и ограничение распространения воздействия. Задача состоит в том, чтобы выбрать подмножество элементов максимального размера, в котором каждый элемент взаимодействует не более чем с двумя другими внутри выбранной группы. Это подмножество будет наибольшей по мощности группой с контролируемой внутренней связанностью, что находит применения в задачах анализа инвестиционного портфеля, в проектировании устойчивых коммуникационных сетей, маршрутизации, распределении нагрузки и других задачах, где требуется ограничить степень зависимости между включаемыми объектами.

Представим формулировку рассматриваемой задачи в теоретико-графовой терминологии. Пусть задан неориентированный граф $G = (V, E)$. В задаче требуется найти подмножество вершин $S \subseteq V$ максимальной мощности, такое что для любой вершины $v \in S$ выполнено условие:

$$\{u \in S \vee \{v, u\} \in E\} \vee \leq 2 \text{ или } deg_{G[S]}(v) \leq 2 \qquad (1),$$

где $deg_{G[S]}(v)$–степень вершины v в подграфе, индуцированном множеством S.

Сформулируем задачу о наибольшем 2-диссоциирующем множестве в виде задачи распознавания. Условие: задан неориентированный граф $G = (V, E)$ и целое неотрицательное число $k \in N, 0 \leq k \leq \vee V \vee$.Вопрос: существует ли такое множество $S \subseteq V$, что $S \vee \geq k$ и индуцированный подграф $G[S]$ удовлетворяет условию: $\max_{v \in S} deg_{G[s]}(v) \leq 2$?

Цель работы заключается в исследовании задачи нахождения максимального 2-диссоциирующего множества в графе, рассмотрении структурных и алгоритмических свойств 2-диссоциирующих множеств и разработке эвристических алгоритмов приближенного решения задачи и оценки их эффективности на случайных графах. Задача является NP-трудной и имеет прикладную значимость в телекоммуникациях, распределенных системах и особенно в финансовой аналитике – при формировании портфелей с ограниченной взаимной корреляцией активов. Необходимость в эффективных методах выявления крупных, слабо связанных подмножеств графа, пригодных для устойчивых сетевых или инвестиционных структур, делает исследование теоретически обоснованным и практически востребованным.

Целочисленная линейная модель задачи. Сформулируем задачу нахождения максимального 2-диссоциирующего множества в графе в виде задачи целочисленного линейного программирования. Пусть $G = (V, E)$ – неориентированный граф с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$. Множество вершин графа, смежных с вершиной $v \in V$, обозначим через $N_G(v)$. Множество вершин, состоящее из вершины v и вершин, смежных с ней, обозначим через $N_G[v]$. Обозначим через V_3 множество вершин графа G, степень которых не меньше, чем 3. Пусть $D \subseteq V$ – произвольное непустое множество. Нетрудно увидеть, что множество D является 2-диссоциирующим в графе G в том и только в том случае, когда для каждой вершины $v \in V_3$и каждых трех различных вершин u, w, z, смежных с вершиной v, выполняется следующее условие $D \cap \{v, u, w, z\} \vee \leq 3$.

На основе этой характеризации 2-диссоциирующего множества построим целочисленную линейную модель задачи. Для каждой вершины $v \in V$ создадим булеву переменную:

$$x_v = \begin{cases} 1, \text{если} v \in D \\ 0, \text{если} v \notin D \end{cases} \quad (2),$$

Тогда число вершин в множестве D можно выразить в виде следующей суммы $\sum_{v \in V} x_v$.

Ограничения на переменные, которые гарантируют, что множество D является 2-диссоциирующим, имеют вид $x_v + x_u + x_w + x_z \leq 3 \forall v \in V_3 \forall \{u, w, z\} \subseteq N_G(v)$.

Получаем следующую задачу целочисленного линейного программирования, которая является моделью задачи о наибольшем 2-диссоциирующем множестве:

$$\begin{cases} \sum_{v \in V} x_v \to max \\ x_v + x_u + x_w + x_z \leq 3 \forall v \in V_3 \forall \{u, w, z\} \subseteq N_G(v) \\ 0 \leq x_v \leq 1 \forall v \in V \\ x_v \in Z \forall v \in V \end{cases} \quad (3),$$

Характеристика графов с малыми значениями 2-диссоциирующего числа. Опишем, какие структурные ограничения на граф необходимы, чтобы значение $diss_2(G)$ было небольшим.

Лемма 1. О графах с 2-диссоциирующим числом не более 1.

Для произвольного графа $G = (V, E)$ справедливо: $diss_2(G) \leq 1 \leftrightarrow |V| \leq 1$.

Лемма 2. О графах с 2-диссоциирующим числом не более 2.

Для произвольного графа $G = (V, E)$справедливо: $diss_2(G) \leq 2 \leftrightarrow |V| \leq 2$.

Лемма 3. О графах с 2-диссоциирующим числом не более 3 через запрещенные подграфы.

Пусть Г – семейство графов, состоящее из всех четырехвершинных графов, максимальная степень которых не больше 2. Тогда справедливо: $diss_2(G) \leq 3 \leftrightarrow$ граф G является Г-свободным.

Эвристические методы решения задачи. Отсутствие известных оптимальных решений в данной задаче создает определенные ограничения при оценке оптимальности результатов. Поэтому, будем сравнивать результаты эвристических алгоритмов между собой и анализировать их сходства или различия. В рамках работы для решения задачи поиска наибольшего 2-диссоциирующего множества разработаны четыре эвристических алгоритма: жадный алгоритм, алгоритм случайного выбора, локальный поиск и метод имитации отжига. Сравнение эвристических алгоритмов проводится на разреженных случайных графах с небольшим количеством вершин. В качестве модели случайных графов выбрана модель Эрдеша-Реньи $G(n, p)$ с параметрами n (число вершин) и p (вероятность существования ребра между двумя вершинами), причем $p = 0.1$.

Выводы по экспериментам. По графикам локальный поиск требует значительно большего времени выполнения из-за необходимости проводить большое количество итераций. Жадный алгоритм очень быстр, однако может пропустить несколько вершин по сравнению с лучшим решением. Метод отжига показал себя близким к жадному по качеству среднего решения. Случайный подбор, как и ожидалось, наименее эффективен по качеству, хотя его разброс результатов иногда позволяет получить решение близкое к жадному. Также было замечено, что для повышения устойчивости случайного метода можно усреднить результаты нескольких запусков или выбрать лучший из них.

Практические эксперименты на случайных графах $G(n, p)$ подтвердили, что локальный поиск и имитация отжига находят более крупные 2-диссоциирующие множества, чем жадная или случайная стратегии. При этом жадный алгоритм и отжиг существенно быстрее локального поиска.

Можно сделать вывод, что выбор алгоритма зависит от требований: когда важна скорость или требуются многие запуски – предпочтителен жадный алгоритм, когда критичен размер множества – локальный поиск. Имитация отжига представляет компромисс, обеспечивая высокое качество решений за умеренное время.

Список использованных источников:

1. Yannakakis, M. Node-Deletion Problems on Bipartite Graphs. / M. Yannakakis // SIAM J. Comp. – 1981. – Vol. 10, № 2. – P. 310–327.

2. Orlovich, Yu.L. The complexity of dissociation set problems in graphs / Yu.L. Orlovich [et al.] // Discrete Appl. Math. – 2011. – Vol. 159, № 13. – P. 1352–1366.

3. Boliac, R. On computing the dissociation number and the induced matching number of bipartite graphs / R. Boliac, K. Cameron, V. Lozin // Ars Combinatoria. – 2004. – Vol. 72. – P. 241–253.