УДК 004.928+519.673

МАТЕМАТИКА ИГРОВОГО БАЛАНСА

Бизюк Д.С., Тытуш Е.А., студенты гр.424403

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Примичева З.Н. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Аннотация. Работа предлагает «новый комбинаторный подход» к анализу игрового баланса, основанный на свойствах циклических многогранников и решении задачи линейного программирования. Используя теорему о верхней границе числа kнаборов стратегий через $k-1$–мерные грани многогранника $C(n+1,m)$, получены гарантии отсутствия доминирующих («имбовых») стратегий. Разработаны явные конструкции для достижения асимптотически оптимального разнообразия стратегий. Реализация модели на языке $C++$ подтверждает теоретические результаты. На примере игр «Genshin Impact» и «SMITE» показано, как метод позволяет прогнозировать мету и динамически адаптировать баланс. Работа открывает перспективы применения в live-service проектах и расширения на нелинейные модели.

Ключевые слова. Модель линейного программирования, матрица затрат, вектор эффективности, целевая функция, стратегия, циклический многогранник, моментная кривая, k –мерная грань многогранника, параметрический анализ.

Введение.

Современные видеоигры — это сложные системы, которые демонстрируют впечатляющий прогресс в области цифровых мультимедийных технологий нового тысячелетия. Легко проследить тенденцию развития от обычных аркадных автоматов, до нынешних сложнейших игровых экосистем таких, как Total War: Warhammer III (2022), The Elder Scrolls V: Skyrim (2011) или Witcher 3: The Wild Hunt (2015). За каждым внутриигровым действием скрывается ряд сложнейших математических конструкций, которые создают главный интерес в любой современной видеоигре — выбор стратегии: какое снаряжение выбрать, по какому пути пойти, какое задание приоритетней, какой навык взять, чтобы прохождение стало интереснее. Разработчикам важно не допустить появление «имбовой» (всегда победной) стратегии, так как игроки будут всегда выбирать её и от этого терять интерес. От количества жизнеспособных стратегий напрямую зависит увлекательность игры, а значит и её успешность.

Оптимизация игровых стратегий через линейное программирование и циклические многогранники: теоретические основы и практика балансировки.

Формально выбор оптимальной стратегии игроком моделируется как линейная программа.

Пусть задана матрица затрат $A \in R_{m\times n}$, в которой элемент a_{ij} определяет количество ресурса типа $i, i = 1, \dots m$, необходимое для использования инструмента $j, j = 1, \dots n$. Вектор эффективности $c \in R^n$ задаёт полезность каждого инструмента j , через значение c_j (например, урон или боевая эффективность на единицу вложений как полезность инструмента). Вектор ресурсов $b \in R^m$ содержит доступные игроку объёмы ресурсов b_i (например, ресурсы в виде валюты, времени или вместимости инвентаря). Вектор вложений $x \in R^n$ представляет собой распределение ресурсов между инструментами, в котором x_j — количество ресурсов, инвестированных в инструмент j. В рамках модели линейного программирования задача выбора игроком оптимальной стратегии заключается в максимизации целевой функции $c^T x$ при ограничениях $Ax \le b, x \ge 0$.

Центральным объектом исследования выступает циклический многогранник $C(n,m)$.

Пусть $t_1, t_2, \dots, t_n$ – произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, и M – произвольная постоянная такая, что $M \ge t^m$.

Моментной кривой в R^m называется

$$x: R \to R^m, \qquad t \to x(t) = (t, t^2, \dots, t^m) \in R^m.$$

Циклическим многогранником $C(n,m)$ называется выпуклая оболочка n различных точек $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ на моментной кривой.

Пример циклического многогранника C (7,3) на рисунке 1.

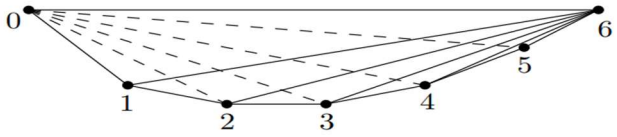


Рисунок 1 – Циклический многогранник C (7,3)

Определим конструкцию игровых систем (A, c) так, что $c = (1,1, \dots,1) \in R^n$ и $A = \big(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\big)$. Модифицированной моментной кривой для матрицы затрат A называется $x: R \to R^m$,где $t \to x(t) = (t, M - t^2, t^3, M - t^4, \dots, t^m) \in R^m$, если m — нечетное число, и $t \to x(t) = (M - t, t^2, M - t^3, t^4, \dots, M - t^{m-1}, t^m)^T \in R^m$, если m — четное число.

Для описания оптимального сочетания стратегий воспользуемся формулой для нахождения количества k —мерных граней многогранника $C(n, m)$: при $n > m \geq 2$ циклический многогранник $C(n, m)$ одновременно максимизирует количество k —мерных граней для всех $k = 0,1, \dots m - 1$ среди m — мерных многогранников с n вершинами, при этом количество k — мерных граней $f_k\big(C(n, m)\big)$ определяется формулой

$$f_k\big(C(n,m)\big) = \sum_{l=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} C_l^{m-k-1} \cdot C_{n-m+l-1}^{l} + \sum_{l=\left[\frac{m}{2}\right]+1}^{m} C_l^{m-k-1} \cdot C_{n-l-1}^{m-l}.$$

Пусть $|L^k(A, c)|$ — число k —мерных наборов инструментов в игровой системе с матрицей затрат $A \in R_{m\times n}$, $a_{ij} \geq 0$, $i = 1, \dots m$, $j = 1, \dots n$, и вектором эффективности $c \in R^n$, $c_j \geq 0$, $j = 1, \dots n$.

Справедливы [1] следующие теоремы

Теорема 1 (о верхней границе для граней многогранника). Пусть n, m, k — фиксированные положительные целые числа такие, что $n > m \geq k \geq 2$. Тогда число k — мерных наборов инструментов $|L_k(A, c)|$ в любой игровой системе с матрицей затрат $A \in R_{m\times n}$ и вектором эффективности $c \in R^n$ удовлетворяет неравенству

$$|L^k(A, \cdots c)| \leq f_{k-1}\big(C(n+1, m)\big) - C_m^{k-1}.$$

Теорема 2 (о нижней границе для граней многогранника). Пусть n, m, k — фиксированные положительные целые числа такие, что $n > m \geq k \geq 2$. Тогда существуют явные конструкции игровых систем (A, c) с матрицей затрат $A \in R_{m\times n}$ и вектором эффективности $c \in R^n$ такие, что число k —мерных наборов инструментов $|L^k(A, c)|$ удовлетворяет условию

$$|L^k(A,c)| \geq \begin{cases} f_{k-1}\big(C(n,m)\big), \text{если } k < \frac{m}{2}, \\ \frac{f_{k-1}(C(n,m))}{2}, \text{если } k \geq \frac{m}{2}. \end{cases}.$$

Теорема 3. При $n > m = 3$ для числа $k-$мерных наборов инструментов $|L^k(A,c)|$ с матрицей затрат $A \in R_{m\times n}$ и вектором эффективности $c \in R^n$ справедлива оценка $|L^3(A,c)| \geq 2n-5$ и $|L^2(A,c)| \geq 3n-6$.

Теорема 4. Для $n > m = 2$ число $k-$мерных наборов инструментов $|L^k(A,c)|$ с матрицей затрат $A \in R_{m\times n}$ и вектором эффективности $c \in R^n$ удовлетворяет неравенству $|L^2(A,c)| \geq n-1$.

Практическое значение этих теорем заключается в том, что они задаёт объективные пределы разнообразия игровых стратегий, которые не могут быть преодолены простым увеличением количества игровых элементов.

В основе этих конструкций лежит модифицированная моментная кривая, в которой знаки координат специальным образом чередуются. Такое построение создаёт своеобразную «напряжённость» между различными типами ограничений, гарантируя, что стратегии, эффективные по одному параметру, будут иметь слабости по другим.

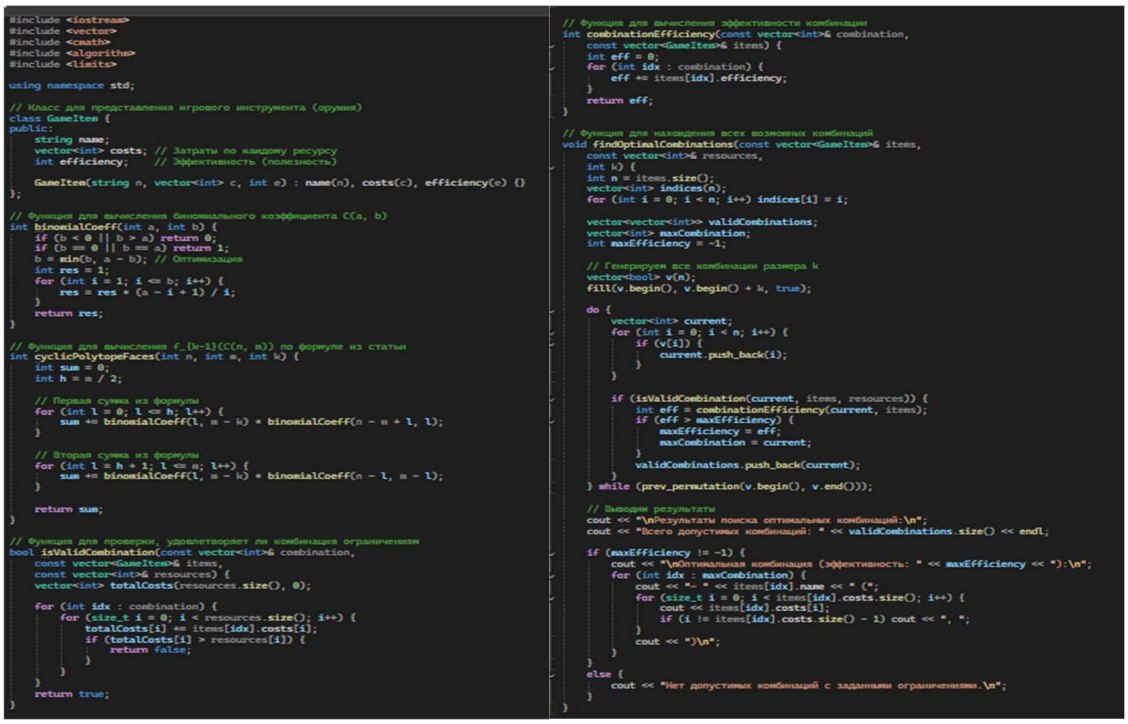
Параметрический анализ — это метод исследования, направленный на изучение влияния изменения параметров модели на её выходные результаты. В нашем случае параметрический анализ изучает зависимость оптимальных стратегий от изменения вектора ресурсов b. В рамках задачи линейного программирования $max\{c^T x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ это позволяет прогнозировать сдвиги в игровой мете при обновлениях баланса.

При изменении вектора ресурсов b оптимальные решения задачи линейного программирования образуют параметрическое семейство. Уникальность решений гарантируется условиями дополняющей нежёсткости, а их поддержки (наборы) соответствуют граням многогранника, порожденного A и c.

Условия дополняющей нежёсткости: уникальность решения гарантируется только при строгом выполнении $min\{b^T y: Ay \leq c, y \geq 0\}$ для всех инструментов вне набора. Это предотвращает вырожденные случаи, когда несколько стратегий одинаково эффективны.

Важным математическим инструментом анализа игрового баланса являются триангуляции конусов, представляющие собой разбиение пространства решений задачи линейного программирования $max\{c^T x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ на симплициальные ячейки. Каждая такая ячейка соответствует определённому набору стратегий ($supp(x)$), который становится оптимальным при конкретных значениях ресурсного вектора b.

Для наглядности представим работу теорему 1 на примере языка $C++$ на рисунке 2.



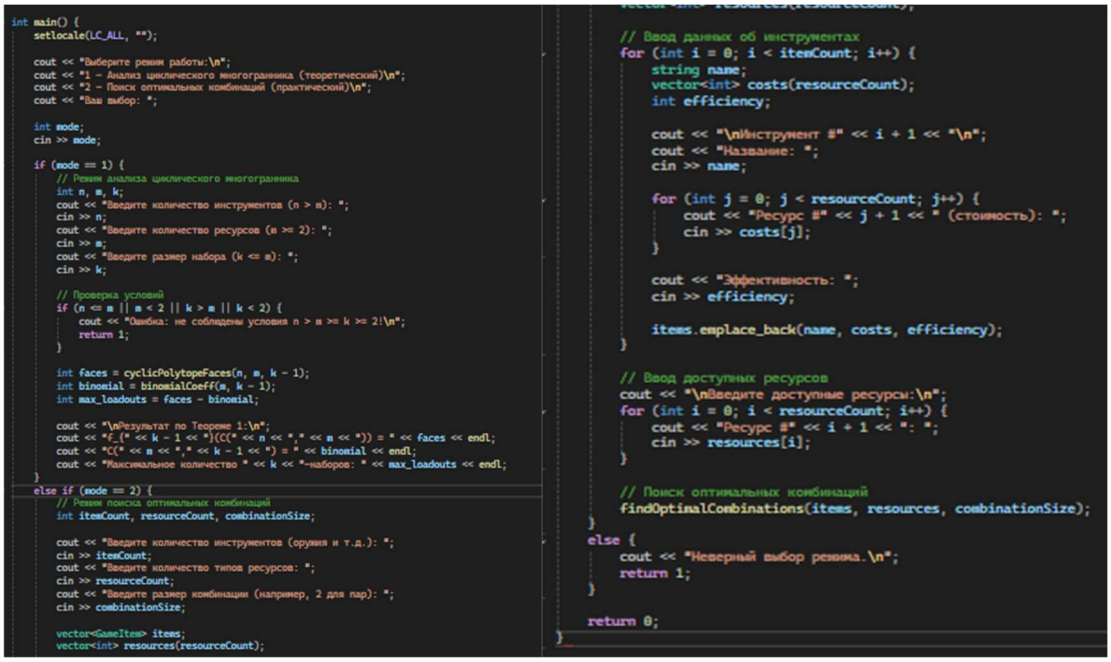


Рисунок 2 – Пример кода на $C++$

Практическое применение математики баланса в геймдизайне.

Возьмем пример из практики для игры «Apex Legends» на основе предложенной матрицы затрат A и вектора эффективности c.

Рассмотрим систему выбора оружия в «Apex Legends», в которой игроки распределяют материалы для крафтинга (создания оружия) (b_1) и время на поиск (b_2, в секундах). Имеют место параметры:

Инструменты (оружие/апгрейды): $n = 5$ (например, «Пистолет P2020», «ПП R-99», «Пушка Хаос», «Снайперская винтовка Лонгбоу», «Гранатомёт»);

Ресурсы:$m = 2$ (материалы, время).

Тогда матрица затрат A примет вид

$$A = \begin{bmatrix} 50 & 120 & 200 & 150 & 250 \\ 10 & 25 & 40 & 30 & 60 \end{bmatrix},$$

в которой элементы первой строки — стоимость в материалах, а второй — время на поиск (в секундах); вектор эффективности запишется как $c = (4{,}8{,}12{,}9{,}15)$, где c_j — комбинированный показатель (урон/сек + точность + мобильность).

Пример из практики.

Пусть игрок начинает матч с 180 материалами (b_1) и 50 секундами (b_2). Необходимо выбрать оптимальный набор оружия.

Решение.

Воспользуемся кодом на $C++$, написанным ранее. В консоль впишем все элементы данной матрицы и найдем оптимальную пару оружия.

Работа кода на примере задачи из практики для игры «Apex Legends» на основе предложенной матрицы затрат A и вектора эффективности c видна на рисунке 3.

```
Выберите режим работы:
1 - Анализ циклического многогранника (теоретический)
2 - Поиск оптимальных комбинаций (практический)
Ваш выбор: 2
Введите количество инструментов (оружия и т.д.): 5
Введите количество типов ресурсов: 2
Введите размер комбинации (например, 2 для пар): 2

Инструмент #1
Название: p2020
Ресурс #1 (стоимость): 50
Ресурс #2 (стоимость): 10
Эффективность: 4

Инструмент #2
Название: R-99
Ресурс #1 (стоимость): 120
Ресурс #2 (стоимость): 25
Эффективность: 8

Инструмент #3
Название: Chaos
Ресурс #1 (стоимость): 200
Ресурс #2 (стоимость): 40
Эффективность: 12

Инструмент #4
Название: Longbow
Ресурс #1 (стоимость): 150
Ресурс #2 (стоимость): 30
Эффективность: 9

Инструмент #5
Название: GrenadeLauncher
Ресурс #1 (стоимость): 250
Ресурс #2 (стоимость): 60
Эффективность: 15

Введите доступные ресурсы:
Ресурс #1: 180
Ресурс #2: 50

Результаты поиска оптимальных комбинаций:
Всего допустимых комбинаций: 1

Оптимальная комбинация (эффективность: 12):
- p2020 (50, 10)
- R-99 (120, 25)
```

Рисунок 3 – выполнение примера из практики для игры «Apex Legends»

Видно, что наилучший набор — {ПП R-99, Пистолет P2020} с эффективностью 12.

Благодаря данным вычислениям, можно получить гарантированную смену стратегий при росте ресурсов, обеспечить отсутствие «имбовой» (всегда выигрышной) стратегии и прогнозировать поведение игроков, стремящихся оптимизировать свою игру.

Применение циклического многогранника.

Используя формулу расчёта количества граней циклического многогранника при $m = 3$ (треугольные грани), получим $f_2\big(C(n,3)\big) = 2n - 4$, то есть в игре с 3 ресурсами максимальное число троек оружия, которые могут быть оптимальными, растёт линейно с n. В игровом дизайне каждой вершине такого многогранника соответствует определённая игровая стратегия или комбинация игровых элементов. Например, в стратегических играх жанра MOBA вершины могут представлять различные комбинации предметов экипировки, а в RPG — наборы навыков персонажа.

Рассмотрим примеры.

1. Стратегическая игра *Total War: Warhammer III*.

Каждая вершина многогранника может соответствовать уникальной комбинации юнитов. При $n = 10$ юнитах и $m = 3$ ресурсах (золото, мана, время) количество рёбер (парных стратегий) вычисляется

по формуле $f_1\big(C(n,3)\big) = \big(n\cdot(n-1)\big)/2 - 3\cdot(n-3)$. Отсюда при $n = 10$ получим $f_1\big(C(10,3)\big) = (10\cdot 9)/2 - 3\cdot 7 = 24$, что означает существование 24 парных комбинации юнитов, обеспечивающих разнообразие тактик.

2. MOBA-игры (Dota 2, League of Legends).

Количество рёбер циклического многогранника $C(n,3)$ растёт квадратично с увеличением n. Например, при добавлении нового предмета имеем

$$\Delta f_1\big(C(n,3)\big) = \big((n+1)\cdot n\big)/2 - 3\cdot(n-2) - \big(n\cdot(n-1)\big)/2 - 3\cdot(n-3) = n-3,$$

то есть каждый новый элемент увеличивает число рёбер на $n-3$, расширяя границы меты и предотвращая доминирование одной сборки, поэтому патчи часто добавляют новые предметы.

Практическое значение теорем (о верхней и нижней границах циклического многогранника) в геймдизайне.

Для иллюстрации рассмотрим конкретный пример из популярной MOBA-игры League of Legends. При моделировании системы предметов экипировки с $m = 3$ основными ограничениями выбора стратегии (золото, время, вместимость инвентаря) теорема предсказывает, что число эффективных парных комбинаций предметов будет расти линейно с увеличением общего числа предметов n, но не быстрее, чем $f_1\big(C(n,3)\big) = 2\cdot n\cdot(n-1) - 3\cdot(n-3) = 2n^2 - 5n + 9$. Поэтому разработчики добавляют новые предметы, поскольку каждый новый элемент увеличивает число рёбер на $\Delta f_1\big(C(n,3)\big) = n-3$. Это позволяет разработчикам контролируемо расширять стратегическое пространство: рост вариантов остаётся предсказуемым и управляемым, избегая экспоненциальной сложности.

Оптимальные конструкции стратегических систем представляют особый интерес для практического геймдизайна. Аппарат математического анализа помогает показать существование явных способов построения матрицы ограничений A и вектора эффективности c , которые обеспечивают асимптотически максимальное разнообразие стратегий.

Рассмотрим пример реализации при $m = 2$ ограничений (например, золото и мана) и n инструментов. Построим матрицы A и c следующим образом $A = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$, $c = (1,2,\dots,n)$. Оптимальными наборами являются все пары соседних инструментов $\{j, j+1\}$ при $j \in [1; n-1]$, поскольку для каждой пары $\{j, j+1\}$ существует ресурсный вектор b, делающий её единственно оптимальной.

Пусть y_1- «цена» золота: сколько эффективности теряется или приобретается при изменении количества золота на 1 единицу, y_2- «цена» маны: сколько эффективности теряется или приобретается при изменении количества маны на 1 единицу. Для пары $\{j, j+1\}$ получим систему:

$$\begin{cases} y_1\cdot j^2 + y_2 = j, \\ y_1\cdot (j+1)^2 + y_2 = j+1, \end{cases}$$

решением которой являются положительные значения $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$. Это подтверждает, что инструменты $j, j+1$ полностью расходуют ресурсы $b_1 = j^2 + (j+1)^2$ (золото) и $b_2 = 2$ (мана) и ни один из инструментов не доминирует: игрок вынужден выбирать между ними, что обеспечивает баланс.

Моментная кривая как модель игрового прогресса.

Параметр t в игровом дизайне отражает прогрессию игрока, связывая уровень его возможностей с доступными ресурсами. Например, 1) в *The Witcher 3* рост t (от 1 до 5) открывает доступ к более сложным зельям: на начальных уровнях ($t = 1$) игрок ограничен базовыми эликсирами, а на высоких ($t = 5$) — требуется редкий ресурс b_5; 2) в *Genshin Impact* рост t моделирует силу персонажа: линейный рост атаки (t) сочетается с квадратичными затратами на прокачку (t_2), что вынуждает игроков менять стратегии на поздних этапах.

Такие модели, основанные на модифицированных моментных кривых, балансируют прогрессию и ограничения. Стартовые стратегии теряют эффективность, а новые комбинации требуют планирования ресурсов, предотвращая доминирование одной тактики. Принцип модифицированной моментной кривой хорошо знаком опытным геймдизайнерам, поскольку он проявляется, например, в классическом балансе между оружием с высокой мощностью, но низкой скорострельностью, и легким вооружением, которое наносит меньше урона, зато позволяет атаковать быстрее.

Польза параметрического анализа при балансировке игр.

Параметрический анализ изучает влияние изменения вектора ресурсов b на оптимальные стратегии. Например, в RPG (*World of Warcraft*) рост уровня персонажа открывает новые комбинации экипировки. Условия дополняющей нежёсткости позволяют гарантировать уникальность стратегий: $x_i > 0 \Rightarrow y_i = 0, y_i > 0 \Rightarrow x_i = 0$, где x_i — затраченный ресурс, y_i — «свободный ресурс», поскольку исключаются вырожденные случаи.

Параметрический анализ также оценивает чувствительность системы к изменениям, которая выражается через коэффициенты регрессии (b_i) в моделях прогнозирования; параметры игровых объектов (урон, стоимость, время восстановления).

Рассмотрим примеры из игровой индустрии.

1. MOBA-игры (Dota 2**)**, в которой параметр стоимости предмета «Клинок беспорядка» $(x_3 = 2050)$. Уменьшение стоимости до 1800 золота приводит к увеличению частоты его выбора игроками на 30%, что аналогично снижению коэффициента b_3 в регрессии, уменьшающего вес фактора «цена предмета» в общей эффективности. Принцип дополняющей нежёсткости работает так: если какой-то элемент системы (например, игровой предмет или переменная в модели) становится слишком сильным или «перевешивающим», его параметры меняют, чтобы избежать дисбаланса.

2. MMORPG (World of Warcraft), в которой параметром является количество очков чести для покупки экипировки b_1 Увеличение b_1 с 3000 до 4000 смещает оптимальные стратегии игроков в сторону комбинаций с меньшей ресурсоёмкостью, что соответствует изменению вектора B в уравнении $Y = X \cdot B$ при добавлении новых данных.

3. Apex Legends.

Пусть x — это переменные решения, отражающие выбор игрока в рамках ограничений (очки чести). При увеличении материалов при $b_1 = 250$ оптимальным становится «Пушка Хаос» $(x_3 = 1)$, эффективность 12 + «Пистолет P2020» $(x_1 = 1)$, общая эффективность 16. Если время сократится до $b_2 = 300$, игрок сможет взять только «ПП R-99» $(x_2 = 1)$, эффективность 8.

Интерпретация через циклический многогранник.

Пусть $m = 2$, $n = 5$.Тогда число ребер $f_1\big(C(5,2)\big) = 2n - 4 = 6$. Максимальное число парных наборов равно $6 - 2 \cdot 1 = 4$, что соответствует 4 возможным комбинациям пар оружия (например, {R-99 + P2020}, {Хаос + Лонгбоу} и т. д.). В сезоне 16 добавление «Немезис» $(n = 6)$ увеличивает число рёбер до 8, предотвращая доминирование одной сборки, что согласуется с теоремой о верхней границе. Модель показывает, как ограничения на ресурсы в «Apex Legends» формируют разнообразие стратегий. Теоретический максимум парных наборов (4) приводит разработчиков к регулярному добавлению нового оружия, что позволяет им расширять мету, сохраняя баланс.

Вывод. Математический аппарат циклических многогранников и линейного программирования не только объясняет существующие механики игр, но и предоставляет инструменты для проектирования динамического баланса. Примеры из Warhammer III, SMITE и Genshin Impact демонстрируют превращение теории в практику, обеспечивая долгосрочную вовлечённость игроков.

Список использованных источников:

1. *McMullen P. The maximum numbers of faces of a convex polytope // Mathematika. – 1970. – P. 179–184.*
2. *De Loera J., Rambau J., Santos F. Triangulations: Structures for Algorithms and Applications. – Heidelberg: Springer, 2010. – Vol. 25. – P. 336*
3. *Hanguir O., Ma W., Ryan C.T. Designing optimization problems with diverse solutions // International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization. – 2023. – P. 172–186.*
4. *Knight V. Maths behind a MOBA: Using Linear Programming to model and solve a problem. – 2015. – URL: https://vknight.org/Computing_for_mathematics/Assessment/28_IndividualCoursework/PastCourseWorks/2015-2016/knight2015-2016.pdf*
5. *Smith L. et al. Nonlinear balance models in Genshin Impact // IEEE Transactions on Games. – 2022. – P. 45–56.*
6. Balinski M. On the graph structure of convex polyhedra // Pacific Journal of Mathematics. – 1961. – P. 431–434.
7. Eisenbrand F. Parametric integer programming in fixed dimension // Mathematics of Operations Research. – 2008. – P. 839–850.
8. Тиморин В.А. Комбинаторика выпуклых многогранников. – М.: МЦНМО (Летняя школа «Современная математика»), 2002. – С. 11–15.
9. Ziegler G.M. Lectures on Polytopes. – New York: Springer, 1995. – Vol. 152 (Graduate Texts in Mathematics). – P.254

UDC 004.928+519.673

MATHEMATICS OF GAME BALANCE

Bizyuk D.S., Tytush E.A., students of group 424403

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
Minsk, Republic of Belarus

Primicheva Z.N. – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Higher Mathematics

Annotation. *The work proposes a "new combinatorial approach" to analyzing game balance, based on the properties of cyclic polytopes and solving linear programming problems. Using the theorem on the upper bound of the number of k strategy sets via the $k-1$-dimensional faces of the polytope $C(n+1,m)$, guarantees are obtained for the absence of dominant strategies. Explicit constructions have been developed to achieve asymptotically optimal diversity of strategies. The implementation of the model in $C++$ confirms the theoretical results. Using the examples of the games "Genshin Impact" and "SMITE," it is demonstrated how the method allows predicting the meta and dynamically adapting balance. The work opens prospects for application in live-service projects and extension to nonlinear models.*

Keywords. *Linear programming model, cost matrix, efficiency vector, objective function, strategy, cyclic polytope, moment curve, k –dimensional face of a polytope, parametric analysis.*