

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ (В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ)

Боровик А.А., Новик У.А., студенты группы 473903

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь*

Научный руководитель Лобанок Л.В. – ст. преподаватель каф. ВМ

Аннотация. Данная статья посвящена построению и исследованию формул замечательных кривых в полярной системе координат. Рассмотрены реальные образы, которые описывают замечательные кривые.

Ключевые слова. Полярная система координат, кривые в полярной системе координат, эллипс, декартов лист, лемниската Бернулли, кардиоида, спираль Архимеда.

Человек всегда находится в окружении линий: горизонт, линии суши, изгибы дорог, раковина улитки, траектория движения в природе и технике. В математике их описывают алгебраическими уравнениями в декартовой системе координат, а также параметрическими и полярными уравнениями. Фридрих Энгельс утверждал, что математика изучает пространственные формы и количественные отношения реального мира. Хотя она во многом абстрактна, её фундаментальные исследования часто находят практическое применение, становясь частью повседневной жизни. Данная работа посвящена построению и исследованию формул замечательных кривых в полярной системе координат, а также рассмотрению реальных образов, которые они описывают.

Полярной системой координат является двумерная система, в которой положение точки на плоскости определяется расстоянием от фиксированной точки (полюса) и углом относительно фиксированного направления (полярной оси). Эта система широко применяется в различных областях науки, а также используется при работе с задачами, связанными с круговой и радиальной симметрией или вращательным движением.

В математике под замечательными кривыми понимаются геометрические кривые, обладающие особыми математическими свойствами или значимостью в историческом и прикладном аспектах.

Кривые классифицируются по порядку в зависимости от степени их алгебраического уравнения в декартовых координатах. К кривым первого порядка относятся прямые, к кривым второго порядка – эллипс, парабола, гипербола, пара пересекающихся действительных прямых, пара параллельных действительных прямых, мнимый эллипс, пара пересекающихся мнимых прямых, пара параллельных мнимых прямых, пара совпавших прямых. Декартов лист, локон Аньези, циссоида, строфоида – это кривые третьего порядка. Лемниската Бернулли, овалы Кассини, конхоида, улитка Паскаля, кардиоида, розы относятся к кривым четвёртого порядка. Также существуют трансцендентные кривые, то есть кривые, которые не являются алгебраическими, к ним относятся спираль Архимеда и циклоида.

Эллипс — это кривая второго порядка, представляющая собой множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) является постоянной величиной. Это свойство формулируется следующим образом:

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a \quad (1),$$

где — F_1, F_2 фокусы эллипса; $2a$ — большая ось эллипса.

Эллипс был изучен ещё в Древней Греции. Менехм впервые ввёл понятие эллипса, исследуя сечения конуса. Позже Аполлоний Пергский детально изучил его свойства и ввёл современное название. В XVII веке Исаак Ньютон доказал, что планеты движутся по эллиптическим орбитам, что стало основой небесной механики.

В полярных координатах уравнение эллипса, фокус которого находится в начале координат, записывается в виде:

$$r = \frac{p}{1-eco} \quad (2),$$

где $p = \frac{b^2}{a}$ — фокальный параметр эллипса; $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса.

Метод построения эллипса: на плоскости отмечают фокусы F_1 и F_2 , определяя центр эллипса O как середину их отрезка. Через O проводят взаимно перпендикулярные оси. Затем строят две концентрические окружности с радиусами, равными половинам большой и малой осей эллипса.

Разделяя окружности на равные угловые интервалы, проводят лучи через O , находят точки пересечения с окружностями и строят перпендикуляры к соответствующим осям. Точки пересечения этих перпендикуляров формируют эллипс, который затем обводят плавной линией. Построение эллипса изображено на рисунке 1.

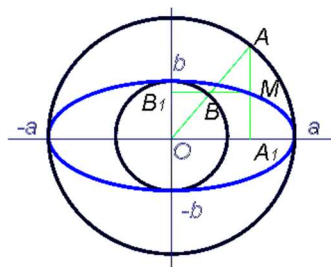


Рисунок 1 – Построение эллипса

Эллипсы широко встречаются в природе и технике. Согласно законам Кеплера, орбиты планет Солнечной системы представляют собой эллипсы с Солнцем в одном из фокусов. Это же справедливо для орбит спутников и других небесных тел. В оптике эллиптические зеркала используются для фокусировки световых лучей, поскольку свет, исходящий из одного фокуса эллипса, после отражения собирается в другом фокусе. В механике эллиптические зубчатые колёса применяются для передачи вращательного движения с переменной скоростью. В архитектуре эллиптические арки и купола обеспечивают равномерное распределение нагрузки, что повышает устойчивость конструкций.

Декартов лист- линия, которая состоит из петли и двух бесконечных ветвей.

В полярных координатах уравнение Декартова листа имеет вид:

$$r = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi} \quad (3),$$

где r — радиус-вектор; φ — полярный угол; a — параметр, определяющий размер кривой.

Кривая была впервые исследована Рене Декартом в 1638 году, который построил её петлю в первом координатном угле и предположил симметричное повторение в остальных квадрантах, назвав её "цветком жасмина". В 1692 году Христиан Гюйгенс представил современное описание этой кривой.

Для построения Декартова листа в полярных координатах необходимо выполнить следующие шаги: необходимо задать значения угла φ в диапазоне от 0 до 2π с определенным шагом. Затем для каждого значения φ следует рассчитать соответствующее значение r по приведенной выше формуле. Далее необходимо нанести на полярную координатную плоскость точки с координатами (r, φ) . Для завершения надо соединить полученные точки плавной линией, формируя кривую. Построение Декартова листа изображено на рисунке 2.

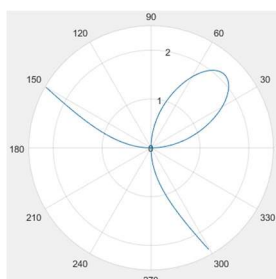


Рисунок 2 – Построение Декартова листа

Форма Декартова листа напоминает петлю или каплю. Хотя прямая практическая применимость этой кривой ограничена, ее изучение способствует пониманию свойств алгебраических кривых и их геометрических характеристик. В математическом моделировании и теоретических исследованиях Декартов лист используется для демонстрации особенностей кривых третьего порядка и их поведения в различных системах координат.

Лемниската Бернулли — это плоская алгебраическая кривая, представляющая собой геометрическое место точек, для которых произведение расстояний до двух фиксированных точек (фокусов) постоянно и равно квадрату половины расстояния между фокусами. В полярных координатах её уравнение имеет вид:

$$r^2 = 2c^2 \cos 2\varphi \quad (4),$$

где r — радиус-вектор; φ — полярный угол; c — параметр, связанный с расстоянием между фокусами лемнискаты.

Название «лемниската» происходит от латинского *lemniscus* («лента», «повязка») и связано с украшениями победителей в Древней Греции и Риме. Кривая названа в честь Якоба Бернулли, который описал её уравнение в 1694 году. Ранее, в 1680 году, Джованни Кассини изучал похожие кривые — овалы Кассини.

Метод построения лемнискаты Бернулли основан на геометрическом определении лемнискаты: она является множеством точек, для которых произведение расстояний до двух фокусов постоянно. Первоначально следует определить фокусы $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Затем требуется выбрать несколько точек на плоскости и проверить, удовлетворяют ли они условию $PF_1 \times PF_2 = 2c$, где P — любая точка лемнискаты. Для следующего шага необходимо выбрать несколько значений угла φ , вычислить расстояние r по формуле в полярных координатах, при помощи циркуля отложить полученные значения r от начала координат вдоль соответствующих углов и соединить построенные точки плавной линией. Построение лемнискаты Бернулли изображено на рисунке 3.

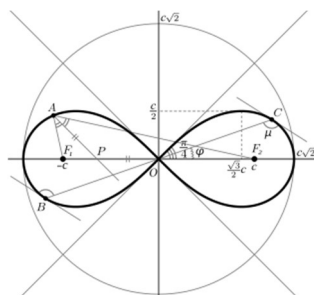


Рисунок 3 – Построение лемнискаты Бернулли

Лемниската Бернулли применяется в различных областях. В транспортной инфраструктуре она используется для проектирования плавных закруглений путей. В инженерии её форма применяется в кулачковых механизмах для равномерного движения. В физике она моделирует траектории частиц и колебательные процессы. Эта кривая служит важной моделью в науке и технике.

Кардиоида — это плоская кривая, форма которой напоминает сердце. Она является частным случаем эпициклоиды и образуется при катании окружности по внешней стороне другой неподвижной окружности того же радиуса.

В полярной системе координат кардиоида описывается уравнением:

$$r = 2a(1 - \cos\varphi) \quad (5),$$

где r — радиус-вектор; φ — полярный угол; a — параметр, определяющий размер кривой.

Впервые кардиоида была описана французским математиком Луи Карре в 1705 году. Название "кардиоида" (от греческого "кардіа" — сердце) было предложено в 1741 году Джованни Сальвемини ди Кастильоне. Независимо от них, кривую изучал голландский математик Йохан Коерсма в том же году.

Для построения кардиоиды можно воспользоваться методом катящейся окружности. Представьте окружность радиуса a , которая катится без проскальзывания по внешней стороне другой неподвижной окружности того же радиуса. Если зафиксировать точку на границе катящейся окружности, её траектория при движении будет описывать кардиоиду.

Альтернативный способ построения основан на использовании уравнения в полярных координатах. Для этого необходимо задать значения угла φ в диапазоне от 0 до 2π с определённым шагом, затем вычислить соответствующие значения радиус-вектора r по формуле $r = 2a(1 - \cos\varphi)$. После этого точки с координатами (r, φ) наносятся на полярную координатную плоскость и соединяются плавной линией, формируя кардиоиду. Построение кардиоиды изображено на рисунке 4.

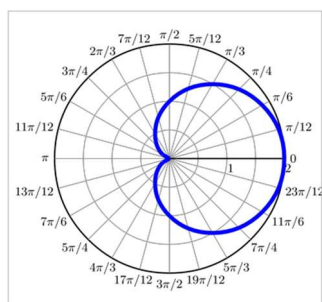


Рисунок 4 – Построение кардиоиды

Кардиоида встречается как в науке и технике, так и в природе и искусстве. В оптике кардиоидальные отражатели применяются для фокусировки световых лучей, а в акустике микрофоны с такой диаграммой направленности уменьшают уровень шума. В радиотехнике антенны кардиоидной формы обеспечивают направленный приём сигналов, снижая помехи. В гидродинамике эта кривая используется в конструкции улиток центробежных компрессоров для оптимального потока жидкости или газа. В природе кардиоидные очертания можно заметить в морских раковинах, волнах и формах растений. В архитектуре и дизайне кардиоидные структуры применяются при создании куполов, сводов и декоративных элементов.

Спираль Архимеда — это плоская кривая, описываемая точкой, которая равномерно движется вдоль луча от фиксированного центра, в то время как сам луч равномерно вращается вокруг этого центра. Спираль Архимеда была обнаружена ученым в III веке до н.э. в ходе опыта с компасом. Он равномерно тянул стрелку, одновременно поворачивая сам компас по часовой стрелке. В результате получилась кривая в виде спирали, каждый виток которой смещался на такую же величину, что и угол поворота компаса, а расстояние между соседними витками оставалось неизменным. В полярных координатах уравнение спирали Архимеда имеет вид:

$$r = a\varphi \quad (6),$$

где r – расстояние от начала координат (полюса) до точки на спирали; a – постоянный коэффициент, определяющий расстояние между витками спирали; φ – полярный угол.

Чтобы построить спираль Архимеда необходимо начертить окружность и разделить её на 12 равных частей. Затем следует провести горизонтальную линию и также разделить её на 12 равных отрезков. Следующим шагом является начертание вспомогательной окружности с центром в исходной точке так, чтобы каждая окружность пересекала горизонтальную линию в точках, соответствующих её номеру. Далее требуется обозначить точки пересечения вспомогательных окружностей с радиусами, проведёнными через ранее отмеченные деления окружности. Для завершения построения спирали Архимеда необходимо соединить полученные точки плавной линией. Построение спирали Архимеда изображено на рисунке 5.

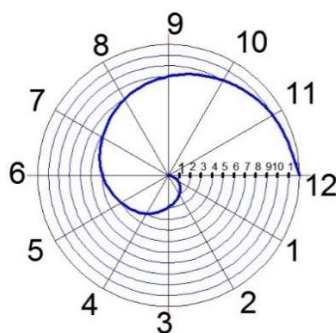


Рисунок 5 – Построение спирали Архимеда

Спираль Архимеда встречается как в природе, так и в различных сферах техники, архитектуры и биологии. В природе её можно увидеть в раковинах улиток, спиральных галактиках, водоворотах и молекуле ДНК, в архитектуре – в винтовых лестницах. Спираль Архимеда описывает формы многих явлений и объектов, связанных с равномерным увеличением или уменьшением расстояния от центра при вращении.

В данной работе были рассмотрены известные кривые в полярной системе координат, их уравнения, способы построения и области применения. Изученные кривые, включая спираль Архимеда, лемнискату Бернулли, эллипс, Декартов лист и кардиоиду, обладают уникальными свойствами, востребованными в различных научных и технических сферах. Исследование этих кривых

способствует более глубокому пониманию математических закономерностей и их практическому использованию. Их изучение имеет значение как для фундаментальной математики, так и для инженерии, архитектуры и дизайна.

Список использованных источников:

1. Эволюция современной науки: сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф. (25 июля 2016 г., г. Пермь): в 3 ч. Ч. 3. — Уфа: АЭТЕРНА, 2016. — 232 с.
2. Прокин Ю. М. Практическое применение свойств некоторых математических кривых // Научно-методический электронный журнал «Концепт». — 2017. — Т. 39. — С. 2011–2015.
3. Жулин А. И., Козырев А. С. Замечательные кривые в полярной системе координат и их компьютерное исследование [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://elib.sfu-kras.ru/bitstream/handle/2311/7330/s011-011.pdf?sequence=1>. — Дата доступа: 27.03.2025.
4. Блинова И.В., Попов И.Ю. Кривые, заданные параметрически и в полярных координатах. Учебное пособие. — СПб: Университет ИТМО, 2017. — 56 с.

REMARKABLE CURVES (IN POLAR COORDINATES)

Borovik A.A., Novik U.A., students of group 473903

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Scientific supervisor Lobanok L.V. – senior lecturer, Department of Higher Mathematics

Annotation. This article is devoted to the construction and study of formulas for remarkable curves in the polar coordinate system. Real images describing remarkable curves are considered.

Keywords. Polar coordinate system, curves in the polar coordinate system, ellipse, Cartesian leaf, Bernoulli's lemniscate, cardioid, Archimedes' spiral.