УДК 51(0.062)

ОПТИМИЗАЦИЯ МАРШРУТИЗАЦИИ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАДОКСА БРАЕССА И РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ

Драко М. Д., студент гр.458301, Лесковский Е. Е., студент гр.458301

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Лущакова И.Н. – канд. физ.-мат. наук

Аннотация. Представлена математическая модель поведения эгоистичных пользователей при выборе между двумя точками доступа, где одна из них имеет фиксированную скорость передачи данных, а другая – переменную скорость с экспоненциальным затуханием при увеличении числа подключенных пользователей. Показано, как при некоординированном подключении возникает парадокс Браесса. Для распределения пользователей между точками доступа предложен способ поиска равновесия по Нэшу, использующий решение уравнения баланса. Проведен анализ пропускной способности сети и определено оптимальное распределение пользователей между точками доступа, обеспечивающее максимальную суммарную производительность сети.

Ключевые слова. Парадокс Браесса; равновесие по Нэшу; маршрутизация; компьютерные сети; пропускная способность; балансировка нагрузки; оптимизация маршрутов; теория игр, беспроводные сети.

Парадокс Браесса возникает при использовании пользователями эгоистичных игровых стратегий в различных сетевых моделях. Вначале рассмотрим это явление на примере транспортной сети, аналогичном примеру, представленному в статье [1].

Загруженность дорог — серьёзная проблема современных городов. Казалось бы, строительство новых магистралей должно её решить, но часто это лишь усугубляет ситуацию. Чем больше дорог, тем активнее люди пересаживаются на личные автомобили, а перераспределение потоков может увеличить время в пути для всех водителей.

Этот контр-интуитивный эффект в 1968 году описал немецкий математик Дитрих Браесс, и теперь он известен как *парадокс Браесса* [2] .

Предположим, что есть два города А и Б, между которыми проложены две дороги. Одна из них проходит через посёлок В, другая через посёлок Г (см. рисунок 1). Участок дороги А-В очень узкий и извилистый, поэтому время поездки по этому участку равно $T = \frac{X}{100}$, где X - количество машин, одновременно едущих по участку А-В. Участок В-Б проходит по многополосному шоссе, поэтому время поездки по нему всегда равно 45 минутам независимо от количества машин. Вторая дорога из А в Б, проходящая через посёлок Г, организована противоположным образом: участок А-Г является широкополосным шоссе с временем поездки 45 минут, а участок Г-Б является узкой дорогой с временем поездки $T = \frac{X}{100}$.

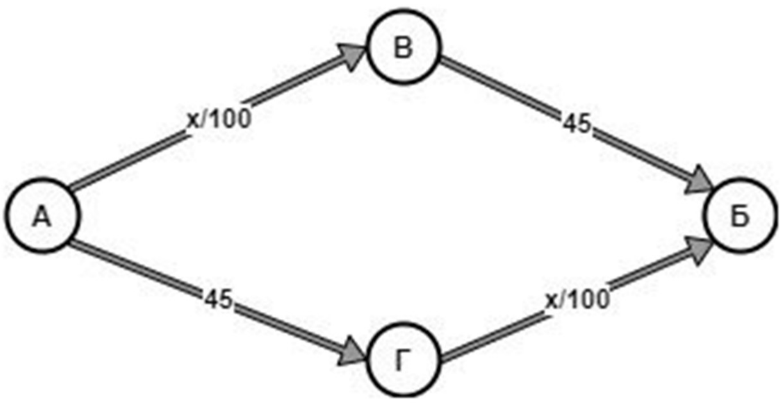

Рисунок 1 – Первоначальная схема транспортной сети между городами А и Б без дополнительного участка.

Рассмотрим случай, когда N=4000 водителей хотят доехать из города А в город Б. Если все водители решат поехать по первой дороге, через посёлок В, общее время поездки каждого водителя составит

$$T = \frac{4000}{100} + 45 = 40 + 45 = 85(\text{минут}).$$

Таким же будет время движения по второй дороге через посёлок Г, если все водители примут решение воспользоваться второй дорогой.

Если же половина водителей выберет дорогу А-В-Б, а другая половина – дорогу А-Г-Б, то общее время в пути каждого водителя сократится и составит

$$T_1 = \frac{2000}{100} + 45 = 20 + 45 = 65(\text{минут}), \text{либо} T_2 = 45 + \frac{2000}{100} = 45 + 20 = 65(\text{минут})$$

В этом случае система будет находиться в состоянии равновесия. Водители, стремясь сократить время поездки, будут распределяться поровну между дорогами. Это и будет равновесием по Нэшу [3]. Если же загруженность какой-то дороги возрастёт, то также возрастёт и время поездки по ней. Из-за этого остальные водители, отправляющиеся из А в Б, будут выбирать другую дорогу, тем самым выравнивая транспортные потоки и возвращая систему в состояние равновесия.

Рассмотрим теперь случай, когда местная администрация, желая улучшить дорожную ситуацию, решила построить дополнительную дорогу, проходящую от посёлка В к посёлку Г (см. рисунок 2). Предположим, что время поездки по дороге В-Г настолько мало, что в расчётах будем считать его равным 0.

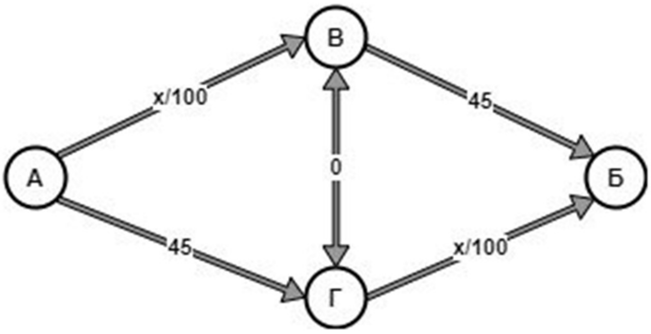

Рисунок 2 – Схема транспортной сети с дополнительным участком В–Г (время поездки по В–Г равно нулю)

В этом случае состояние равновесия системы будет другим. Водители будут выбирать самые быстрые участки пути от А до Б. Это приведёт к тому, что все водители, выезжающие из А, будут выбирать участок А-В, максимальное время поездки по которому будет составлять $T = \frac{4000}{100} = 40$ (минут), в то время как длительность поездки по участку А-Г будет составлять 45 минут. Далее, находясь в посёлке В, водители будут выбирать участок В-Г-Б, максимальное время проезда по которому будет также составлять 40 минут против 45 минут при проезде по участку В-Б. В результате все водители выберут маршрут А-В-Г-Б с общим временем поездки 80 минут. Это состояние будет новым равновесным состоянием системы. Продолжительность любого другого маршрута будет превышать 80 минут, мотивируя новых водителей стартующих из А в Б, по-прежнему выбирать маршрут А-В-Г-Б.

Отсюда следует парадоксальный вывод: после строительства дополнительной дороги общее время поездки между двумя точками увеличится, а загруженность отдельных участков пути (А-В, В-Г, Г-Б) значительно возрастёт.

Принимая во внимание этот парадокс, исследуем математическую модель, описывающую динамику пропускной способности двух точек доступа ТД1 и ТД2 к компьютерной сети при распределении между ними N пользователей [4]. Пусть $N = 100$ – общее количество пользователей в сети с двумя точками доступа.

Каждая из точек обеспечивает начальную скорость доступа, для ТД1 это $r_f = 20\,\text{Мбит/с}$, а для ТД2 скорость доступа r_v экспоненциально затухает при росте числа подключений:

$$r_v(m) = r_0 \cdot e^{-k \cdot m},$$

где $r_0 = 220\,\text{Мбит/с}$– начальная скорость,$k = 0{,}05(\text{от}0{,}01\text{до}0{,}1)$– коэффициент экспоненциального затухания, m – количество пользователей, подключенных к ТД2. Такая модель широко применяется в анализе сетевых компьютерных систем с ограниченными ресурсами.

Точка доступа имеет ограниченные ресурсы, и при слишком большом количестве пользователей каждый из них получает всё меньшую долю пропускной способности, а значит, скорость передачи данных падает (см. рисунок 3). Это критично при планировании распределения нагрузки — слишком много пользователей в одной точке значительно снижает производительность.

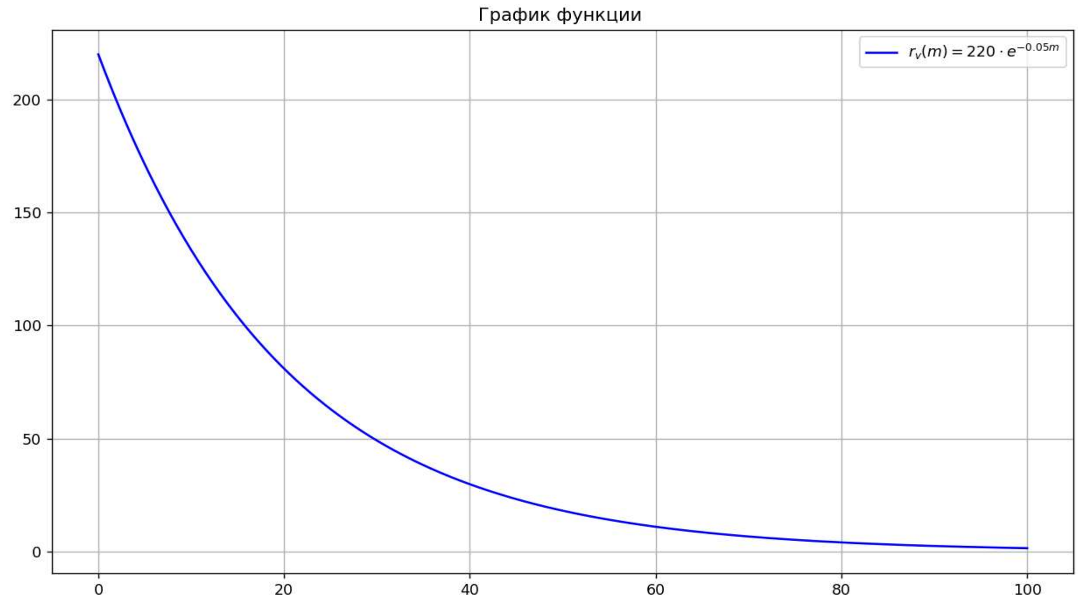

Рисунок 3 - График скорости r_v в зависимости от числа подключенных пользователей m

Рассмотрим подробнее механизм эгоистичного выбора маршрута. Этот термин означает, что каждый пользователь выбирает точку подключения исключительно на основе своей личной выгоды — там, где скорость выше именно для него. Он не учитывает, как его выбор повлияет на других пользователей или на сеть в целом.

На старте, при малом числе подключений, ТД2 действительно показывает более высокую скорость. Поэтому большинство пользователей выбирают именно эту точку доступа. Однако, каждый новый пользователь снижает доступную скорость на ТД2 — нагрузка растёт, а производительность падает. Но пользователи продолжают подключаться к ней, пока она кажется им более выгодной.

Здесь возникает типичная ситуация из теории игр [5], когда каждый игрок действует оптимально для себя, но в итоге все оказываются в проигрыше. Это и есть основа парадокса Браесса: индивидуальные решения ухудшают общее состояние системы. В нашем случае — перегрузка ТД2 и падение скорости подключения почти для всех пользователей. При этом ТД1 остаётся недозагруженной.

При подключении всех N пользователей к ТД2 их суммарная скорость становится равной:

$$r_{\Sigma} = 100 \cdot r_v(100) = 10 \cdot 220 \cdot e^{-0{,}05 \cdot 100} \approx 148{,}2\,\text{Мбит/с}.$$

В ситуации, где каждый пользователь рационален и не может улучшить для себя скорость передачи данных, наступает равновесие по Нэшу. Согласно этому принципу, суммарная скорость пользователей, подключённых ко второй точке доступа ТД2, должна быть равна суммарной скорости пользователей, подключённых к первой точке ТД1. Условие баланса нагрузки выражается уравнением:

$$r_{\Sigma 1} = r_{\Sigma 2}$$

где $r_{\Sigma 1}$ - это суммарная скорость пользователей, подключенных к ТД1, $r_{\Sigma 2}$ - суммарная скорость пользователей, подключенных к ТД2.

В итоге получаем:

$$m \cdot r_v(m) = (N - m) \cdot r_f$$

где m – число пользователей, подключившихся к ТД2, N − m – число пользователей ТД1.

Идея равновесия по Нэшу заключается в том, что каждый пользователь (игрок) выбирает стратегию, оптимальную для себя, но с учётом поведения других. Система стремится к такому состоянию, при котором никто не может улучшить свой результат, изменив стратегию в одностороннем порядке.

Чтобы обеспечить оптимальное распределение пользователей между двумя точками доступа, необходимо найти такое значение переменной m при котором выполняется условие равновесия:

$$f(m) = m \cdot r_v(m) - (N - m) \cdot r_f \approx 0$$

Это уравнение показывает, что общий объём трафика, обрабатываемый первой точкой доступа, должен быть равен объёму трафика, приходящемуся на вторую точку доступа. Таким образом достигается баланс нагрузки.

Для визуализации и анализа поведения функции применим Python из библиотеки(Matplotlib.pyplot) для построения графиков (см. рисунок 4).

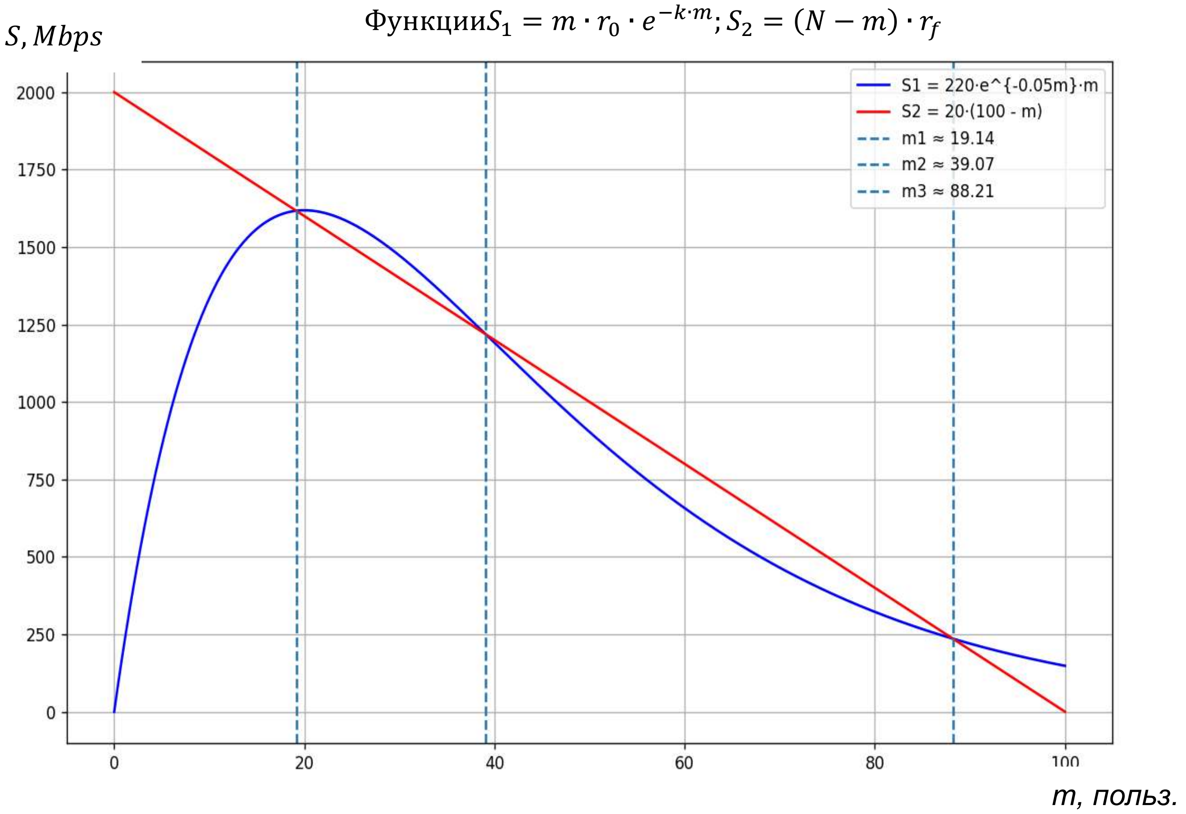

Рисунок 4 - Синяя кривая:$S_1 = m \cdot r_0 \cdot e^{-k \cdot m}$ – суммарная скорость пользователей, подключенных к ТД2, в зависимости от их числа m. Красная прямая:$S_2 = (N - m) \cdot r_f$ – суммарная скорость пользователей, подключенных к ТД1, в зависимости от числа оставшихся пользователей.

Заметим, что точками равновесия будут точки, где синяя и красная линии пересекаются и получаем три решения: приблизительно 19, 39 и 88. Из них решение m ≈ 19 выбирается как оптимальное (так как кажется, что оно будет наилучшим, однако это не совсем так, и надо учесть условия оптимизации).

Условия оптимизации:

1) скорость передачи данных через тд2 убывает монотонно.

$$r_v(m+1) - r_v(m) \leq 0$$

2) максимум суммы достигается не в точке равновесия по нэшу, а в точке, достаточно близкой к точке равновесия по нэшу:

$$m \cdot r_v(m) \approx (N-m) \cdot r_{f.}$$

3) пользователи 17, 18, 19, выбирая тд2, ещё могут немного улучшить синюю линию. но тогда меньшее число оставшихся пользователей ухудшит красную линию так, что суммарный результат по зелёной линии немного ухудшится. фактически, нам надо просто построить два графика - синий и красный и геометрически их просуммировать (см. рисунок 5). а далее найти точку максимума на зелёном графике. при этом точка равновесия по нэшу с минимальной абсциссой - это приблизительная интерпретация полученного результата в терминах теории игр.

$$S_1 + S_2 = S_{max}$$

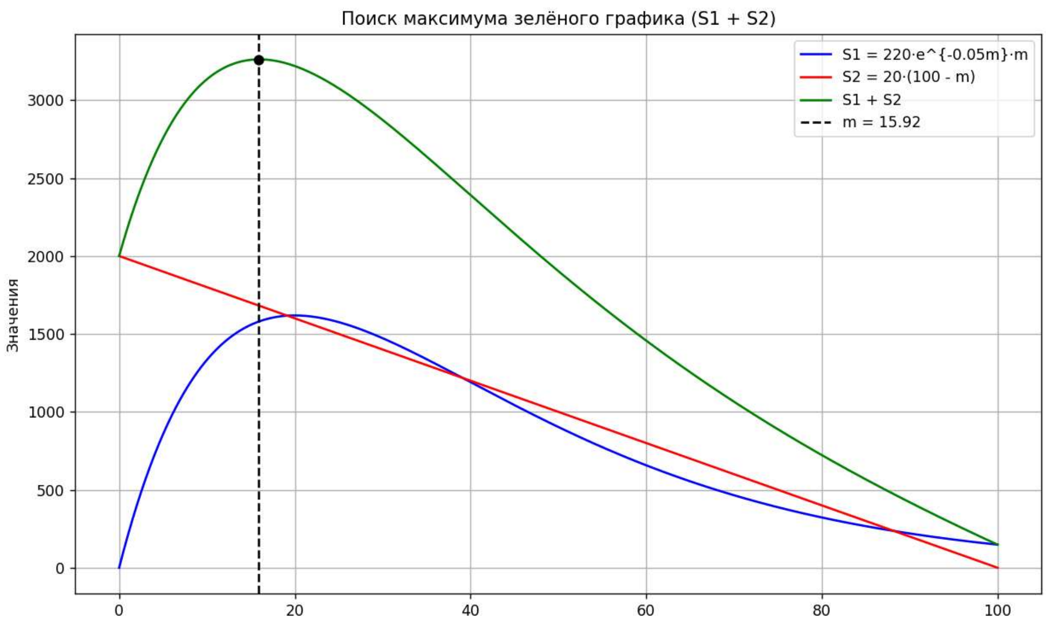

Рисунок 5 – Поиск оптимального значения m

Выбираем m = 16, потому что именно при таком распределении пользователей суммарная пропускная способность двух точек доступа оказывается максимальной.

$$r_\Sigma = m \cdot r_v(m) + (N-m) \cdot r_f$$

Подставляя найденные значения, получаем:

$$r_\Sigma = 3261 \text{Мбит/с}.$$

Сравним три сценария подключения пользователей к сети (без оптимизации, эгоистичный выбор и оптимизация по Нэшу).

Сценарий 1. Все пользователи подключаются к ТД1 (без оптимизации).

В этом случае каждый пользователь получает скорость $r_f = 20 \text{ Мбит}/c.$

Суммарная скорость сети:

$$r_{\Sigma}=r_f \cdot N=2000 \text{Мбит}/c$$

Сценарий 2. Все пользователи подключаются к ТД2 (эгоистичный выбор, без координации). Каждый пользователь получает скорость $r_v = r_v(N) = 220 \cdot e^{-0{,}05 \cdot 100} = 1{,}482 \text{ Мбит}/c$
Суммарная скорость сети:

$$r_{\Sigma}=r \cdot N=148{,}2 \text{Мбит}/c$$

Сценарий 3. Оптимизация по равновесию Нэша (сбалансированное распределение).

Найденное равновесное значение m ≈ 16 означает, что около 16 пользователей подключаются к ТД2, а остальные N – m ≈ 84 пользователей - к ТД1.

Пользователи ТД1 получают скорость:

$$r_f = 20 \text{ Мбит}/c\,; \quad r_{\Sigma 1} = r_f \cdot (N - m) = 1680 \text{ Мбит}/c.$$

Пользователи ТД2 получают скорость:

$$r_v = r_v(16) = 220 \cdot e^{-0{,}05 \cdot 16} = 98{,}852 \text{ Мбит}/c\,; \quad r_{\Sigma}=m \cdot r_v(m)=1581 \text{Мбит/с.}$$

Суммарная скорость сети $r_{\Sigma}=r_{\Sigma 1}+r_{\Sigma 2}=3261 \text{Мбит/с.}$

Итоговое сравнение сценариев (в процентах):

1) Все пользователи подключены к ТД1: 2000 Мбит/c – 100%(базовый уровень).
2) Все пользователи подключены к ТД2: 148,2 Мбит/c – около 7,4% от базового уровня.
3) Оптимизация по равновесию Нэша: 3261 Мбит/c — около 163,1% от базового уровня.

Таким образом, оптимальное распределение пользователей между ТД1 и ТД2 (с использованием равновесия по Нэшу) позволяет значительно увеличить суммарную скорость сети по сравнению с ситуациями, когда все пользователи подключаются только к одной точке доступа.

В дальнейших исследованиях модель может быть расширена за счет использования более сложных функциональных зависимостей затухания пропускной способности точки доступа (например, логарифмических, степенных или гибридных моделей), что позволит более точно учитывать поведение сети при высоких нагрузках. Для транспортной сети перспективно создание прикладного программного решения — мобильного или веб-приложения, способного в реальном времени отслеживать динамическую нагрузку на дорожной сети (сбор данных с GPS-навигаторов, датчиков, камер), визуализировать узкие места и предлагать маршруты с минимальным временем в пути.

Список использованных источников:

1. *The Chicken Braess Paradox /K. Eriksson, J. Eliasson // Mathematics Magazine, 2019.- V. 92:3, P. 213-222.*
2. *Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. Unternehmensforschung Operations Research / D. Braess // Recherche Opérationnelle, 1968.-V.12(1), P. 258–268.*
3. *Equilibrium points in n-person games / J. F. Nash// Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1950. – V. 36(1), P. 48–49.*
4. *A primer on spatial modeling and analysis in wireless networks / J. G. Andrews [et al.] // IEEE Communications Magazine, 2010. – V. 48(11), P. 156–163.*
5. *Деулофеу, Х. Дилемма заключенного и доминантные стратегии. Теория игр. Мир математики: в 40 т. Т. 8/ Х. Деулофеу. / Пер. с исп. — М.: Де Агостини, 2014. — 144 с.*

UDC 51(0.062)

ROUTING OPTIMIZATION IN COMPUTER NETWORKS USING BRAESS PARADOX AND NASH EQUILIBRIUM

Drako M.D., Leskovsky E.E.

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Lushchakova I.N. - PhD in Physics and Mathematics

Annotation. We consider a mathematical model for the behavior of selfish users choosing between two access points, where one of these access points has a fixed data transfer rate, and the other has a variable rate with exponential decay increasing in the number of connected users. It is shown how the Braess paradox arises in uncoordinated connections. A method for finding the Nash equilibrium using the solution of the balance equation is proposed for distributing users between access points. The network throughput is analyzed and the optimal distribution of users between access points is determined, ensuring the maximum total network performance.

Keywords. Braess paradox; Nash equilibrium; routing; computer networks; throughput; load balancing; route optimization; game theory; wireless networks.