ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КВАДРУПОЛЬНЫХ СИСТЕМ

Грабовский А.К.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Минск, Республика Беларусь

Редьков В.М. – доктор физико-математических наук, профессор

Методами компьютерного моделирования исследовано влияние геометрической конфигурации квадрупольных систем и стохастических возмущений на распределение потенциала и динамику заряженных частиц.

Анализ мультипольных моментов играет важную роль при описании электростатических конфигураций в области дальнего поля. В данной работе исследуются различные конфигурации четырёх точечных зарядов. Методология основана на классических подходах, изложенных в [1].

Рассмотрим простой симметричный пример квадрупольной системы, состоящей из четырёх точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной *a* на плоскости *(y, z):* два заряда +*q* в точках $(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$ и $(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2})$, два заряда -*q* в точках $(\frac{a}{2},-\frac{a}{2})$ и $(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2})$.

Точное выражение для потенциала в точке наблюдения M(x,y,z) задаётся равенством

$$\phi(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{1+}+\frac{1}{r_{2+}-\frac{1}{r_{1-}-\frac{1}{r_{2-}}}}}\right) \quad (1).$$

Учитывая две первые поправки в разложении Тейлора $\frac{1}{r}\approx\frac{1}{d}+\frac{r_0 a}{d^3}+\frac{(r_0 a)^2-a^2}{2d^5}$, получаем в области дальнего поля приближенное выражение

$$\phi(M)\approx\frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{yz}{d^5}\left(1+O\left(\frac{a^2}{d^2}\right)\right) \quad (2),$$

где $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ – это расстояние от центра квадруполя до точки наблюдения.

Чтобы исследовать детали пространственного распределения потенциала будем использовать сферические координаты (d,θ,φ):

$$x=d sin\theta cos\varphi \quad (3);$$
$$y=d sin\theta sin\varphi \quad (4);$$
$$z=d cos\theta \quad (5),$$

тогда потенциал принимает вид

$$\phi\approx\frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3}sin\theta^2 sin\varphi cos\varphi \quad (6).$$

Условия экстремумов для функции потенциала задаются уравнениями

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=\frac{3qa^2}{2\pi\varepsilon_0 d^3}sin\theta cos\theta sin\varphi cos\varphi=0 \quad (7);$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}=\frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3}sin\theta^2(cos\varphi^2-sin\varphi^2)=0 \quad (8).$$

Выделяем условия максимумов и минимумов:

$$\theta=\frac{\pi}{2},\varphi=\frac{\pi}{4},\phi_{max}=\frac{3qa^2}{8\pi\varepsilon_0 d^3} \quad (9);$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{3\pi}{4}, \phi_{min} = -\frac{3qa^2}{8\pi\varepsilon_0 d^3} \tag{10}$$

Эту задачу легко можно смоделировать, используя библиотеки NumPy и Matplotlib для Python (рис 1). Тогда убеждаемся, что максимум и минимум расположены по направлениям диагоналей квадрата, образующего квадрупольную систему. Это является проявлением симметрии квадрупольной системы.

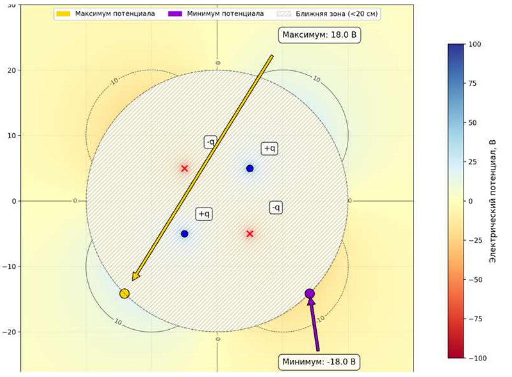

Рисунок 1 – Модель распределения потенциала в дальнем поле квадратичной квадрупольной системы

Далее, исследуем различные конфигурации системы. Поменяем местами один положительный и один отрицательный заряд в исходной конфигурации. Расчёты, подтверждённые моделированием, демонстрируют, что в таком случае полностью исчезает вклад квадрупольного момента в потенциал в дальней точке наблюдения. Для данной конфигурации, потенциал в точке M определяется значением дипольного момента.

Рассмотрим другой пример, расположим заряды в вершинах ромба с острым углом в 60°: два заряда +q в точках $(\frac{3a}{4}, \frac{\sqrt{3}a}{4})$ и $(-\frac{3a}{4}, -\frac{\sqrt{3}a}{4})$, два заряда -$q$ в точках $(\frac{a}{4}, -\frac{\sqrt{3}a}{4})$ и $(-\frac{a}{4}, \frac{\sqrt{3}a}{4})$ (рис.2).

Для данной ромбической конфигурации зарядов, равно как и для любой другой аналогичной ромбической конфигурации данных зарядов, можно показать, что дипольный момент обращается в нуль. Это обусловлено симметрией расположения зарядов. Данный факт подтверждается аналитически на основе формулы $\vec{p} = \sum q_i \vec{r_i}$ и средствами компьютерного моделирования — в расчётах вклад дипольного момента в потенциал в точке наблюдения оказался равен нулю с точностью до 10^{-16}.

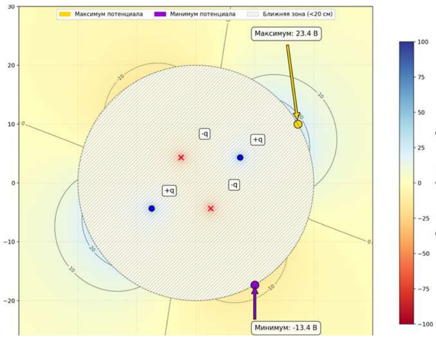

Рисунок 2 – Модель распределения потенциала в дальнем поле ромбической квадрупольной системы

Проведённый анализ показал, что геометрическая конфигурация квадрупольной системы существенно влияет на пространственное распределение электростатического потенциала. Для симметричной квадратной конфигурации наблюдается характерная квадрупольная картина с максимумами вдоль диагоналей. Аналогичные закономерности выполняются для ромбических структур.

Список использованных источников:

1. Jackson, J.~D. Classical Electrodynamics / J.~D.~Jackson. — 3rd ed. — New York: Wiley, 1999. — 808 p.