ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

Волынец М.В.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Иванов М.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент

В работе рассмотрено волновое уравнение Дирака, которое объединяет квантовую механику и специальную теорию относительности. Описаны его математическая структура с матрицами 4×4, алгебраическая процедура линеаризации, а также объяснение наличия спина у электрона, предсказание позитрона. Это уравнение сыграло ключевую роль в развитии квантовой теории поля и физики конденсированного состояния.

В конце 1920-х годов физика столкнулась с парадоксом: эксперименты с электронами в магнитных полях выявляли аномалии, такие как расщепление спектральных линий, необъяснимые в рамках уравнения Шрёдингера. Вольфганг Паули ввёл концепцию спина — внутреннего момента импульса электрона, — но его модель оставалась нерелятивистской. Прорыв совершил Поль Дирак в 1928 году, предложив уравнение, объединившее квантовую механику и специальную теорию относительности, из которого следовало существование спина электрона. Неожиданным следствием стали античастицы — предсказание, подтверждённое открытием позитрона в 1932 году.

Пусть $H = \frac{\overline{p}^2}{2m}$ — гамильтониан для свободной частицы. Тогда замена $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \overline{p} \to -i\hbar\overline{\nabla}$ даёт нам уравнение Шрёдингера, если $\hat{E}\Psi = \hat{H}\Psi$ - базовое волновое уравнение [1]. В релятивистском случае: $H^2 = \overline{p}^2c^2 + m^2c^4$, т.е. это уравнение нелинейно. Если записать:

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}, \tag{1}$$

то очевидна асимметрия - слева H в первой степени, а справа импульс входит в нелинейное выражение. В релятивистской механике энергия и импульс являются компонентами одного вектора, поэтому и в релятивистское волновое уравнение они и их операторы должны входить симметричным образом. Чтобы достичь этой симметрии, Дирак применил чисто алгебраическую процедуру линеаризации уравнения (1). Поясним ее на примере [2] линеаризации уравнения:

$$X_1{}^2 + X_2{}^2 = y^2, \tag{1'}$$

Введём матрицы $A_1 = \begin{pmatrix}1, & 0, \\ 0, & -1\end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix}0, & 1 \\ 1, & 0\end{pmatrix}$ и некоторые новые переменные Ψ_1 и Ψ_2, которые запишем как матрицу-столбец $\Psi \equiv \begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2\end{pmatrix}$. Составим новое линейное относительно X_1 и X_2 уравнение:

$$A_1X_1\Psi + A_2X_2\Psi = Ey\Psi, \tag{2}$$

где $E = \begin{pmatrix}1, & 0 \\ 0, & 1\end{pmatrix}$ — единичная матрица 2x2, нашему нелинейному уравнению (1'). Так как $A_1A_2 + A_2A_1 = 0$, то умножение слева на A_1X_1 + A_2X_2 в уравнении (2) даёт:

$$\left(X_1{}^2 + X_2{}^2\right)\Psi = y^2\Psi, \tag{3}$$

т.к.$A_1{}^2$+$A_2{}^2 = E$. Мы видим, что уравнение (1') всегда имеет место, если выполняется уравнение (2).

Для релятивистского случая с четырьмя слагаемыми: $H^2 = (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + m^2c^4$ Дирак ввёл 4x4 матрицы γ^μ , удовлетворяющие условиям: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}I_4$, $g^{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$, где антикоммутатор {A, B} = AB + BA. В стандартном представлении:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix}E_2, & 0, \\ 0, & -E_2\end{pmatrix}, \gamma_i = \begin{pmatrix}0, & \sigma_{i,} \\ -\sigma_{i,} & 0\end{pmatrix}, \text{где } E_2 \equiv \begin{pmatrix}1, & 0, \\ 0, & 1\end{pmatrix} \equiv \sigma_0,\ \sigma_1 = \begin{pmatrix}0, & 1, \\ 1, & 0\end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix}0, & -i, \\ i, & 0\end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix}1, & 0, \\ 0, & -1\end{pmatrix}.$$

Матрицы σ_i , i = 1,2,3, называют матрицами Паули. Мы использовали две из них при линеаризации уравнения (1').

Окончательная форма уравнения Дирака для свободной частицы:

$$\gamma_\mu \hat{p}^\mu\Psi = mc\Psi, \tag{4}$$

где Ψ — четырёхкомпонентный спинор. Последний шаг в конструировании великого уравнения – это введение взаимодействия электрона с зарядом $-e$ с электромагнитным полем минимальной заменой:
$\hat{p}^{\mu} \to \hat{p}^{\mu} - eA^{\mu}$,
где A^{μ} – 4-потенциал электромагнитного поля.

Уравнение Дирака не только решило проблему релятивистского описания электрона, но и стало мощным инструментом в теоретической физике. Его математическая структура, включая матрицы Дирака и спинорные решения, продолжает находить новые приложения — от квантовой теории поля до физики конденсированного состояния. Это уравнение остаётся одним из самых глубоких и плодотворных результатов теоретической физики XX века.

Список использованных источников:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика: учебное пособие. 4-е изд., испр. Москва: Наука, 1989. С. 70.
2. M.A. Ivanov. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. Vol. 54, № 1, 1996. С. 25–33.