

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ В СРЕДЕ MATHCAD

Красько А.П.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Работа посвящена моделированию движения частицы с магнитным моментом в неоднородном магнитном поле с использованием среды MATHCAD.

При обучении естественнонаучным дисциплинам необходимо использовать программное обеспечение, которое может являться средой общения, редактирования математических объектов, моделирования процессов и средством презентации материала в лекционном режиме.

MATHCAD - система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением. Среда математического моделирования MATHCAD используется в сложных проектах, чтобы визуализировать результаты математического моделирования, путем использования распределённых вычислений и традиционных языков программирования. MATHCAD достаточно удобно использовать для обучения, вычислений как физических, так и инженерных расчетов. Открытая архитектура приложения в сочетании с поддержкой технологий .NET и XML позволяют легко интегрировать MATHCAD практически в любые ИТ-структуры и инженерные приложения. Есть возможность создания электронных книг (e-Book).

Для экспериментального исследования характеристик движения частиц, имеющих магнитный момент, применяется неоднородное магнитное поле. Рассмотрим модель, в которой используется неоднородное магнитное поле, созданное двумя длинными параллельными проводниками, в которых токи текут в противоположных направлениях. Расположим проводники в плоскости XOY параллельно оси OX на расстоянии $2a$ друг от друга. Пусть токи равны I , частица начинает своё движение из точки $M_0(x_0, 0, z_0)$ со скоростью $\vec{v}_0 = (0, 0, v_{z0})$.

Для анализа траектории движения частицы с магнитным моментом в неоднородном магнитном поле составим уравнение по второму закону Ньютона. На частицу со стороны поля будет действовать сила:

$$\vec{F} = -\text{grad}U \quad (1),$$

где U - энергия, которую приобретают частицы в магнитном поле, равная скалярному произведению магнитного момента на индукцию поля:

$$U = -\mu_{sz}B \quad (2).$$

С учётом того, что градиент поля существует лишь в направлении оси OZ , получаем:

$$F_z = -\mu_{sz} \frac{\partial B}{\partial z} \quad (3).$$

Определение индукции магнитного поля в точках плоскости движения частицы является тривиальной задачей. Воспользуемся известной формулой для модуля индукции поля системы проводников:

$$B = \mu_0 I \frac{a}{\pi(z^2 + a^2)} \quad (4).$$

Средствами MATHCAD выполним дифференцирование выражения (1) по переменной z и получим величину производной индукции магнитного поля как функцию координаты:

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{-2\mu_0 a z I}{\pi(z^2 + a^2)} \quad (5).$$

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$$m_a \frac{dv_x}{dt} = 0;$$

$$\begin{aligned} m_a \frac{dv_y}{dt} &= 0; \\ m_a \frac{dv_z}{dt} &= \frac{2\mu_{sz}\mu_0 a z l}{\pi(z^2 + a^2)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Численно решим данную систему дифференциальных уравнений, применив метод Рунге-Кутты 4-го порядка, которому в среде MATHCAD соответствует встроенная функция:

$$V_k = rkfixed(V0(k), t0, t, N, D) \quad (7),$$

где V_0 – вектор начальных скоростей и координат; t_0 – начальное значение времени; t – конечное; N – число разбиений данного временного интервала; D – векторная функция, составленная из выражений правых сторон системы дифференциальных уравнений для проекций скоростей и координат (Рис.1).

Рисунок 1 – а) вектор производная, б) вектор переменных в) вектор начальных значений

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad D(t, V) &:= \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ V_3 \\ 0 \\ V_5 \\ p_{mz} \cdot \frac{2 \cdot I \cdot a \cdot \mu_0 \cdot \mu_{sz} \cdot V_4}{\pi \cdot [a^2 + (V_4)^2]^{2ma}} \end{bmatrix} \\
 \text{b)} \quad V &= \begin{pmatrix} x_0 \\ v_{x0} \\ y_0 \\ v_{y0} \\ z_0 \\ v_{z0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix} \\
 \text{в)} \quad V_0 &:= \begin{pmatrix} x_0 \\ v_{x0} \\ 0 \\ 0 \\ z_0 \\ v_{z0} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Получив функции координат от времени, можно построить график траектории движения частицы с магнитным моментом. На графике (Рис.2) наблюдаем ее отклонение вверх. Отклонение вниз получается при противоположном знаке проекции магнитного момента на направление магнитного поля.

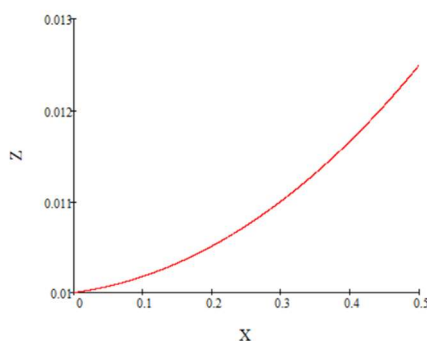


Рисунок 2 – график траектории движения частицы

Данная модель может быть применена для визуализации расщепления пучка атомов при объяснении опыта Штерна-Герлаха.

Использование MATHCAD позволило эффективно провести расчёты, визуализировать траекторию и подтвердить адекватность модели. Разработанный подход может быть применён в учебном процессе для наглядного объяснения взаимодействия частиц с неоднородными полями, а также расширен для анализа более сложных конфигураций магнитных полей и динамики частиц с различными параметрами.

Список использованных источников:

1. Савельев И.В. Курс общей физики: учеб. пособие. Том 2 // И.В. Савельев. – М. Изд-во Моск. ун-та Наука, 1988. – С.133-138
2. Руководство пользователя MATHCAD [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://old.exponenta.ru/soft/mathcad/usersguide/chapter16/16_2.asp – Дата доступа: 07.04.2025