СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Кравцова В.К.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Князюк Н.В. – канд. физ.-мат. наук, доцент

В данной работе рассматриваются методы суммирования расходящихся числовых рядов: метод Пуассона-Абеля и метод Чезаро.

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots. \tag{1}$$

В качестве суммы данного ряда берется предел последовательности его частичных сумм $S = \lim_{k\to\infty} S_k$ в предположении, что этот предел существует и конечен (или равен бесконечности определенного знака). «Колеблющийся» расходящийся ряд не имеет суммы в указанном выше обычном смысле. Для решения задачи суммирования расходящихся в обычном смысле рядов применяют методы «обобщенного суммирования» [1]. В их основе лежит понятие «обобщенной суммы ряда».

Определение «обобщенной суммы ряда» обычно удовлетворяет двум требованиям:

1) Линейность. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ имеет обобщенную сумму A, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ имеет обобщенную сумму B, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$, где $\forall \alpha, \beta \in R$, имеет обобщенную сумму $A + B$.

2) Регулярность. Ряд, сходящийся в обычном смысле к сумме S, должен иметь «обобщенную сумму», и притом также равную S.

В данной работе рассматриваются два метода суммирования расходящихся рядов: метод Пуассона-Абеля (метод степенных рядов) и метод Чезаро (метод средних арифметических)

Метод Пуассона-Абеля (метод степенных рядов). По данному ряду (1) составим степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_k x^{k-1} + \cdots. \tag{2}$$

Если этот ряд сходится для всех $x \in (0,1)$ и его сумма $S(x)$ при $x \to 1-0$ имеет предел, равный S, то есть $\lim_{x\to 1-0} S(x) = S$, то говорят, что ряд (1) суммируем методом Пуассона-Абеля и число S называют «обобщенной (в смысле Пуассона) суммой» данного ряда.

Данный метод «обобщенного суммирования», очевидно, является линейным. Его регулярность доказывает следующая теорема [1].

Теорема (Абеля). Если ряд (1) сходится и имеет сумму S (в обычном смысле), то для $x \in (0,1)$ сходится степенной ряд (2) и сумма его стремится к пределу S при $x \to 1-0$.

Пример 1. Рассмотрим расходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

Составим степенной ряд вида (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots.$$

Данный степенной ряд сходится для всех $x \in (0,1)$ и имеет сумму, равную $S(x) = \frac{1}{1+x}$. Так как

$$\lim_{x\to 1-0} S(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

то рассматриваемый ряд суммируем по методу Пуассона-Абеля и его обобщенная сумма равна $\frac{1}{2}$.

Метод Чезаро (метод средних арифметических). Пусть S_k − частичные суммы числового ряда (1), а

$$A_1 = S_1, A_2 = \frac{S_1 + S_2}{2}, \dots, A_k = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_k}{k}, \dots -$$

последовательность средних арифметических сумм этого ряда. Если существует

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_k}{k} = S$$

то число S называется «обобщенной (в смысле Чезаро) суммой» ряда (1).

Пример 2. В качестве примера снова рассмотрим расходящийся ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Так как $A_{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1}$, а $A_{2k} = \frac{1}{2}$, то $\lim_{k\to\infty} A_k = \frac{1}{2}$. Данный ряд суммируем методом Чезаро и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Линейность метода Чезаро очевидна. Его регулярность вытекает из следующего утверждения.

Утверждение. Если последовательность $\{\alpha_k\}$ сходится к пределу А, то к этому же пределу сходится и последовательность $\sigma_k = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k}{k}$ средних арифметических чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема (Фробениуса). Если ряд (1) суммируем по методу средних арифметических к конечной «сумме» S, то одновременно он суммируем также по методу Пуассона-Абеля, и притом к той же сумме.

Заметим, что обратное неверно. Например, знакочередующийся ряд

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$$

не имеет «обобщенной суммы» в смысле Чезаро, так как не выполняется необходимое условие суммируемости по методу средних арифметических. Тогда как ряд

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

имеет при $x \in (0,1)$ сумму $S(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, а $\lim_{x\to 1-0} S(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}$. Следовательно, «обобщенная сумма» рассматриваемого ряда по методу Пуассона-Абеля равна $\frac{1}{4}$.

Таким образом, метод Пуассона-Абеля применим в более широком классе случаев, чем метод Чезаро, при этом не противоречит ему в тех случаях, когда применимы оба метода.

Список использованных источников:

1. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. Часть 2.Учебник / Г.М. Фихтенгольц. – Москва: Огни, 2005. -- 464 с..