

СВЯЗЬ МАТЕМАТИКИ И МУЗЫКИ

Лобачевская М.В., Поддубная Е.И., студенты гр.473903

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Лобанок Л.В. – старший преподаватель кафедры ВМ

Аннотация. Математика и музыка кажутся разными мирами, но их единство раскрывается при детальном изучении. Пифагор связал гармонию с числами, Лейбниц назвал музыку «скрытой арифметикой души», а Гольдбах — «проявлением тайной математики». Исследования показывают, как математика формирует интервалы, ритм и структуру музыки, превращая числа в язык гармонии. Звуки становятся воплощением абстрактных законов. Цель данной работы — показать, что связь математики и музыки — не просто теория, а живой диалог точности и красоты.

Ключевые слова. Пифагорова комма, монохорд, равномерно-темперированный строй, золотое сечение, числа Фибоначчи, квинтовое соотношение.

С древности ученые искали связь между наукой и искусством, веря в универсальные принципы, выраженные через математические законы. Одним из первых взаимосвязь математики и музыки обнаружил Пифагор, исследовавший гармонию звуков. Он объяснил, почему одни музыкальные созвучия приятны на слух, а другие звучат резко и раздражают. Для своего исследования он использовал монохорд — длинный деревянный ящик с одной натянутой струной. Пифагор обнаружил, что простые соотношения длин струны создают гармоничные интервалы:

Интервал	Частотное соотношение
Прима	1:1
Октава	2:1
Квинта	3:2
Кварта	4:3

Рисунок 1 – Гармоничные интервалы

Логическим продолжением открытия Пифагора явилась идея разделения созвучий на консонансы и диссонансы. Консонансы представляют собой созвучия, вызывающие ощущение покоя, гармонии и устойчивости, тогда как диссонансы звучат резко и беспокойно, создавая чувство незавершенности. Стоит отметить, что некоторые консонансы возникают, если длины звучащих струн соотносятся как целые числа, являющиеся треугольными.

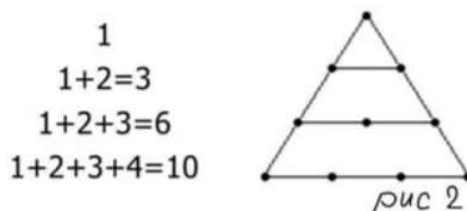


Рисунок 2 – Треугольные числа

Пифагоров строй, основанный на простых соотношениях частот, казался идеальным решением для античной музыки. Однако попытки распространить его принципы на полный 12-ступенный звукоряд привели к неожиданной проблеме: последовательное умножение частот на квинтовое соотношение $3/2$

с приведением к октаве (делением на 2) оказалось неспособным замкнуть звукоряд. После 12 шагов предполагалось возвращение к исходной ноте, смещённой на 7 октав, но расчёты выявили несовпадение:

$$\frac{(\frac{3}{2})^{12}}{2^7} \approx 1,0136(23,46\text{центов}) \quad (1)$$

Разница между этими значениями, равная (около 1,0136(23.46 центов)) получила название Пифагорова комма. Акустически это несоответствие вызывает проблему в настройке инструментов. Накопление этой разницы при многократных циклах квинт приводит к изменению звучания аккордов и мелодий, вызывая диссонанс.

Около 1700 года немецкий органист А. Веркмайстер предложил решение проблемы пифагоровой коммы через использование **"хорошо темперированного строя"**, в нем равномерно распределяются отклонения (пифагоровой коммы) на все интервалы звукоряда. Для этого используется математический подход равного деления октавы на 12 частей(полутонов). В этой системе частота n -го полутона вычисляется как:

$$f_n = f_0 \times 2^{n/12} \quad (2),$$

где f_0 — исходная частота.

Данный подход устраняет пифагорову комму, заменяя «чистые» интервалы слегка скорректированными. Например, интервал квинты в пифагорейском строе имеет точное соотношение частот 3:2, что звучит идеально гармонично. Однако в равномерно темперированном строе частотное соотношение квинты изменяется до $2^{7/12} \approx 1.49832$. Это небольшое отклонение позволяет системе оставаться согласованной в любой тональности.

Появление нового музыкального строя во многом стало возможным благодаря достижениям математики. Без знания логарифмов провести расчеты равномерно-темперированного строя было бы значительно сложнее. Логарифмы стали своеобразной «алгеброй гармонии», на которой выросла темперация. Ниже приведена формула логарифмического представления равномерной темперации.

$$\log_2 (f_n/f_0) = n/12 \quad (3),$$

где f_0 – исходная частота, f_n -частота n -го полутона.

Октава	$\frac{2}{1} \left(\log_2 \frac{2}{1} = 1 \right)$	Кварта	$\frac{4}{3} \left(\log_2 \frac{4}{3} \approx 0,417 \right)$
Септима	$\frac{15}{8} \left(\log_2 \frac{15}{8} \approx 0,907 \right)$	Терция	$\frac{5}{4} \left(\log_2 \frac{5}{4} \approx 0,323 \right)$
Секста	$\frac{5}{3} \left(\log_2 \frac{5}{3} \approx 0,736 \right)$	Секунда	$\frac{9}{8} \left(\log_2 \frac{9}{8} \approx 0,169 \right)$
Квинта	$\frac{3}{2} \left(\log_2 \frac{3}{2} \approx 0,584 \right)$		

Рисунок 3 – Логарифмическое выражение интервалов, которые наиболее распространены в музыке

Пифагорейцы заложили фундамент музыкальной гармонии, исследуя рациональные числовые соотношения, которые определяли строй и интервалы. Однако, с течением времени, интерес к новым подходам привёл к изучению необычных закономерностей, таких как иррациональные числа. Например, ϕ (золотое сечение ≈ 1.618) оказалось связанной с гармонией в музыке, предлагая иной способ её интерпретации.

В музыке золотое сечение можно увидеть через последовательность чисел Фибоначчи. Эта последовательность начинается с чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 и так далее, где каждое следующее число равно сумме двух предыдущих. Если рассматривать отношение между двумя соседними числами, то с увеличением номеров в последовательности это отношение становится всё ближе к числу ϕ (золотое сечение).

В 12-ступенном равномерно темперированном строе интервалы можно выразить через числа Фибоначчи. Если принять полутон (*минимальное расстояние между нотами*) за единицу (1), то:

- 1 = полутон,
- 2 = целый тон,
- 3 = малая терция,
- 5 = чистая кварта,
- 8 = малая секста.

Эти интервалы соответствуют начальным числам Фибоначчи, что делает их гармоничными и приятными для слуха.

Пример с мажорным аккордом: Мажорный аккорд — это сочетание трёх нот, которые звучат вместе и создают гармонию. Например, аккорд до–ми–соль (C–E–G).

Рассмотрим интервалы в аккорде до–ми–соль:

1. Большая терция (до–ми): 4 полутона.
2. Малая терция (ми–соль): 3 полутона.
3. Квинта (до–соль): 7 полутонов.

Соотношения этих интервалов близки к золотому сечению:

малая терция/большая терция = $3/4 = 0.75$,

большая терция/квинта = $4/7 \approx 0.571$.

Эти значения близки к $\varphi^{-1} \approx 0.618$, что указывает на связь с золотым сечением.

Математические закономерности проявляются не только в «вертикали» музыки (сочетания звуков, интервалы, аккорды), но и в её «горизонтали» — временной организации произведения. Например, золотое сечение часто определяет пропорции между разделами композиции (экспозиция, разработка, реприза), создавая структурный баланс: ключевые кульминации или смены темпа могут совпадать с точками, делящими структуру произведения в отношении $\varphi \approx 1.618$.

Профессор Л.Мазель, изучая восьмитактные мелодии Шопена, Бетховена и Скрябина, обнаружил, что их кульминации часто приходятся на слабую долю пятого такта (5/8), что соответствует золотому сечению.

Применим принципы золотого сечения к прелюдии II И. С. Баха. Всего в прелюдии 37 тактов. Заканчивается последний такт нотой, длительностью в четверть такта с фермой — удлинением в 1.5–3 раза. Поскольку это финальная ферма, удлинение будет максимальным. Таким образом, к 37 тактам добавилось еще 2 четверти — полтакта. Длина произведения составила 37.5 тактов. Далее прелюдия разделена на 2 части: первая — однообразная, с очень похожими ходами и комбинациями в тактах; вторая более разнообразная, яркая, с гораздо ярче выраженными эмоциями, включающая нарастающее перед кульминацией волнение, саму кульминацию и коду (завершение). Таким образом, первая часть составляет 23 такта, а вторая — 14.5 тактов. Рассчитаем отношение общего количества тактов к количеству тактов первой части: $37.5/23 \approx 1.6$. Соотнесем количество тактов первой части и второй: $23/14.5 \approx 1.6$. Коэффициенты оказываются равными.

Для дальнейшего анализа вторая часть делится еще на две: подготовка к кульминации — 9 тактов и кульминация с кодой — 5.5 тактов. Составлено отношение: $14.5/9 \approx 1.6$; $9/5.5 \approx 1.6$. И снова коэффициенты близки к 1.6. Затем кульминация отделена от коды, соответственно 3.5 и 2 такта, с отношением: $5.5/3.5 \approx 1.6$. Во всех отношениях коэффициент близок к 1.6 с небольшими погрешностями.

Таким образом, можно сделать вывод, что прелюдия №II И. С. Баха подчиняется законам золотого сечения.

Золотое сечение проявляется не только в структуре музыкальных произведений, но и в форме и конструкции музыкальных инструментов. Например, изгибы корпуса скрипки часто следуют этой пропорции: широкая часть и «талия» находятся в соотношении, близком к золотому сечению. Такая конструкция не только делает инструмент визуально привлекательным, но и улучшает передачу вибраций, способствуя качественному звучанию.

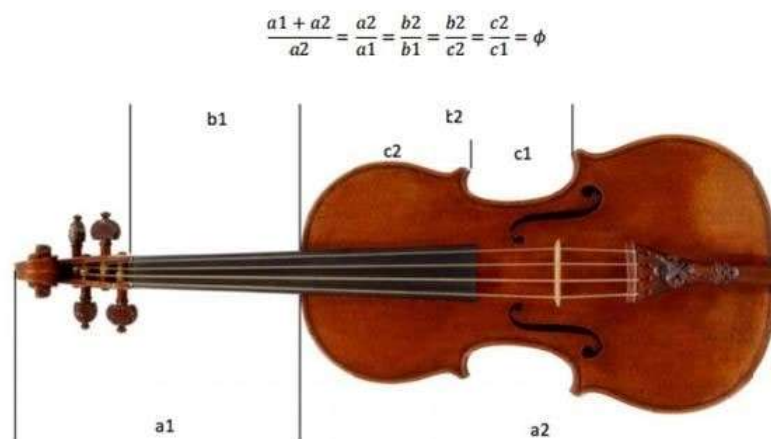


Рисунок 4 – Применение принципа золотого сечения к скрипке

На основании проведённой работы можно подвести итог, что математика играет значительную роль в музыке. Математические принципы лежат в основе музыкальной теории, объясняя ритмы, гармонию и акустические закономерности, что позволяет глубже понять структуру и содержание музыкальных произведений. Математика не ограничивает творчество, а расширяет его возможности.

Список использованных источников:

1. Кондратьев В. Н. Миф о музыкальной гармонии: Параллели с математикой : монография / В. Н. Кондратьев. — М. : Наука, 1988. — 256 с.
2. О золотом сечении в музыке // *Ethos u aesthesis современного философствования : материалы всероссийской научной конференции, 14–15 ноября 2003 г.* — СПб. : Изд-во С.-Петербургского филос. общества, 2003. — С. 120–125.
3. Kung, D. *How Music and Mathematics Relate* : лекция / Professor David Kung. — St. Mary's College of Maryland, 2019. — P. 53–63.
4. *The Golden Ratio in Music: Compositional Practice or the Result of Genius* : статья. — 2024. — P. 323–326.

THE CONNECTION BETWEEN MATHEMATICS AND MUSIC

Lobachevkaya M.V., Poddubnaya E.I., students of group 473903

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Lobanok L.V. – senior lecturer, Department of Higher Mathematics

Annotation. Mathematics and music may seem like different worlds, but their unity is revealed through detailed study. Pythagoras linked harmony with numbers, Leibniz called music "the hidden arithmetic of the soul," and Goldbach referred to it as "the manifestation of secret mathematics." Research shows how mathematics shapes intervals, rhythm, and the structure of music, transforming numbers into the language of harmony. Sounds become an embodiment of abstract laws. The purpose of this work is to demonstrate that the connection between mathematics and music is not just a theory, but a living dialogue of precision and beauty.

Keywords. Pythagorean comma, monochord, equal temperament, golden ratio, Fibonacci numbers, quintal ratio.