УДК 517.938

СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ

Махонь М.В., студент гр.473902, Прокашко Т.И., студент гр.473902

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Лобанок Л.В. – старший преподаватель, ВМ

Аннотация. Данная статья посвящена изучению сущности аттракторов и странных аттракторов, в частности. Исследуется аттрактор Лоренца, также аттрактор Плыкина и соленоид Смейла – Вильямса.

Ключевые слова. Аттрактор, фазовое пространство, эффект бабочки, странный аттрактор, динамические системы, траектория, математическая модель, моделирование сложных систем.

В современном мире, все более актуальной становиться вопрос прогнозирования поведения сложных систем. Например, важно понимать долгосрочное поведение сложных систем, таких как климат, экономика или биологические экосистемы. Именно в этих сферах понятие аттрактор и находит наибольшее применение.

Так как аттрактор – это сложная математическая система, то первые исследования аттракторов начались в 17-18 веках Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем с началом изучения механических систем. Более глубокое понимание сложных систем стало возможным в 20 веке. Термин «странный аттрактор» был введен Дэвидом Рюэллем и Флорисом Такенсом для описания аттрактора, возникающего в результате серии изменений системы, описывающей поток жидкости. Также несколько открытий сделал Эдвард Лоренц, сначала открывший в 1960-х годах концепцию “эффекта бабочки” а после, в 1963 году, разработал свою модель, названную в итоге странным аттрактором Лоренца.

Кстати, на размышления об эффекте бабочки Лоренца натолкнул один неудавшийся подсчет. Работая в службе прогноза погоды, однажды он решил автоматизировать свою работу и внести данные в компьютер. Цифры в компьютере должны были дать тот же, ранее полученный, результат, но результат вдруг оказался совсем другим – расчеты с внесенными данными обещали совсем другую погоду. Проверив несколько раз и убедившись, что ошибки в числах не было, он наконец понял – причина в округлении до трех знаков. Число вроде 0,673122 сокращалось до 0,673. Получается, разница всего в одну тысячную привела к серьезному искажению прогноза – вместо ясного дня появлялась гроза и так далее. Так Лоренц начал интересоваться природой хаоса и стал одним из создателей «теории хаоса».

В последующие десятилетия исследователи стали находить и описывать множество других аттракторов. Эти открытия сыграли ключевую роль в понимании хаоса и его приложений в различных областях, от физики и биологии до экономики и инженерии.

Аттрактор — это множество точек в фазовом пространстве динамической системы, к которым стремятся траектории системы. Чтобы разобраться в этом понятии, нужно понять, что аттрактор — это понятие, несколько привнесённое в математику. То есть, он бы не появился в математическом моделировании, если бы не существовало соответствующих физических процессов. Каждый из нас является сложной системой, молекулярным агрегатом, термодинамической системой и так далее, позже мы еще затронем этот факт. То есть это очень многопараметрическая система, которая функционирует по самым-самым разным законам и соотношениям. Так вот, любые процессы, которые протекают в окружающей действительности, могут быть каким-то образом формализованы. Для того, чтобы эти процессы описать, нужно в них выявить какую-то закономерность. По причине того, что изменения в разных частях системы неоднородны, возникает необходимость введения фазового пространства.

Фазовое пространство — это абстрактное математическое пространство, в котором каждая точка представляет собой состояние динамической системы. Каждое состояние описывается всеми возможными переменными системы, такими как положение, скорость, температура, энергия и другие параметры. Также каждая точка фазового пространства содержит вектор изменения. То есть, фазовое пространство описывает то, как система меняется в каждой точке.

Далее, для простоты понимания приведем пример: допустим вы каждый день ходите в университет. Следовательно, у такой системы будет повторяемость и траектория. Причем это не просто формальная траектория, а вполне конкретная траектория изменения таких параметров, как ваше кровяное давление, температура тела, частота сердцебиения, перемещение в пространстве. Соответственно, есть совокупность факторов, которые каким-либо образом привязаны к определенной траектории. В этом случае аттрактор позволяет описать более сложное поведение этой системы. Если обычно утром вы просыпаетесь, пьёте кофе, спускаетесь на лифте, доезжаете до университета и

заходите в аудиторию, то это можно назвать стандартной траекторией в аттракторе. Но даже если сломается лифт и вам придётся идти пешком, вы всё равно будете стремиться добраться до университета вовремя. И таких отклонений может возникнуть бесконечно много, но динамическая система в фазовом пространстве будет стремиться к начальному ее состоянию, практически независимо от начального положения и соотношения переменных. Именно совокупность предельно допустимых изменений и будет называться аттрактором или же регулярным аттрактором. Это такая математическая модель поведения системы, которая наглядно и удобно показывает, как может развиваться система.

Когда дело доходит до более сложных процессов, в которых нет цикличности, нет регулярности, и самое важно, что сложно сказать, как будет развиваться система, потому что количество влияющих факторов становится очень велико и коэффициент каждого фактора непредсказуем. Именно поэтому вслед за «регулярным аттрактором» вводится более сложное понятие, как «странный аттрактор». При всем этом система не становится хаотической, так как хаос – это абсолютная непредсказуемость движения, когда в свою очередь, если вы проведете миллиарды экспериментов над системой с моделью странного аттрактора, получится так, что часть фазового пространства будет попросту пуста, так как начальные условия создают определенные ограничения, а часть пространства будет занята самыми различными траекториями, по которым она может двигаться. К слову, поэтому второе название странного аттрактора, а именно «хаотический аттрактор», не совсем верно. Однако, предсказать, как именно будет изменяться система со временем очень сложно.

Аттракторами могут быть точки, кривые, а также произвольные сложные подмножества точек фазового пространства, в том числе фрактальные множества. В последнем случае аттракторы называются странными аттракторами. Далее подробнее рассмотрим один из самый ярких примеров странного аттрактора – аттрактор Лоренца

Лоренц постоянно пытался создать свою собственную математическую модель атмосферы параллельно максимально ее упрощая и у него это получилось, он создал свою модель, которая представлена на рисунке 1, которая была сведена всего к трем числам x, y, z.

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = x(r - z) - y$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

Рисунок 1 – Система дифференциальных уравнений Лоренца, описывающая упрощенную модель атмосферы

При следующих значениях параметров: σ=10, r=28, b=8/3, эта модель создает аттрактор Лоренца.

Каждая точка x, y, z в пространстве представляет собой состояние атмосферы. Эволюция происходит в соответствии с векторным полем. Например, первая координата может представлять температуру, вторая - скорость ветра, а третья - влажность.

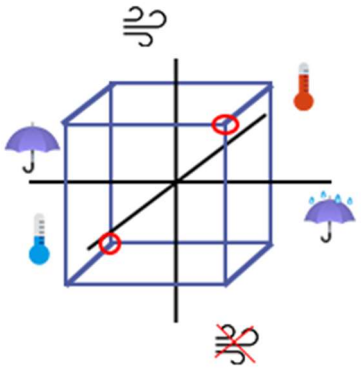

Рисунок 2 – Упрощенный пример фазового пространства для уравнений Лоренца

Таким образом множество возможных состояний атмосферы можно заключить в условный куб. В правом верхнем ближнем углу которого будет холодно, ветрено и дождливо. В левом дальнем нижнем углу все наоборот. Когда мы следим за траекторией движения точки в пространстве, мы следим за изменением погоды. Однако такие модели из-за упрощения часто называют “игрушечными”, то есть используемые для общего понимания черт сложного поведения.

Давайте рассмотрим две атмосферы, являющиеся центрами двух шаров, которые расположены очень близко друг к другу, настолько близко, что они почти идентичны (рисунок 3).

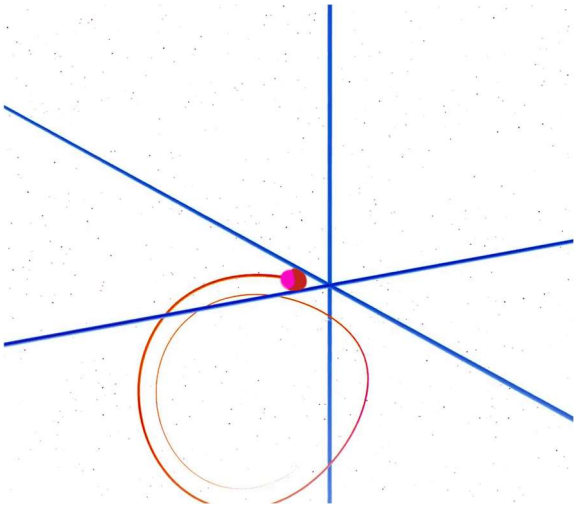

Рисунок 3 – Траектории в начале движения

Сначала две траектории шаров почти неразличимы, но спустя время они начинают отклоняться и в итоге две атмосферы становятся совершенно разными (рисунок 4).

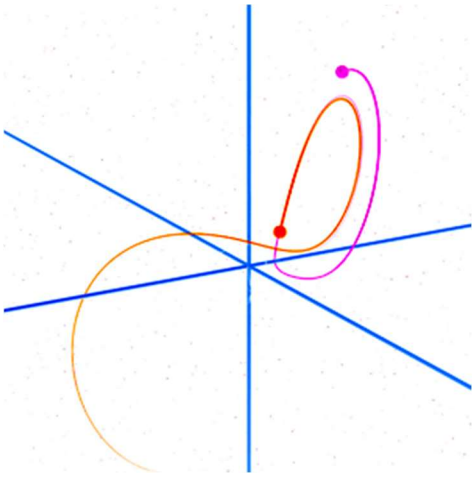

Рисунок 4 – Траектории спустя некоторое время

Тогда возникает хаос, чувствительная зависимость от начальных условий. Тем самым это явление доказывает, что в сложных системах, даже малейшее отклонение от начальных условий, приводит к совершенно другому состоянию системы в долгосрочном периоде.

Далее рассмотрим движение двух точек в модели Лоренца. Одна красная и одна синяя, которые начинают движение в разных начальных координатах. При дальнейшем наблюдении мы видим, что траектории действительно очень разные. Они кажутся абсолютно непредсказуемыми, но при длительном наблюдении можно заметить, что траектория движения начинает напоминать форму форме бабочки (рисунок 5).

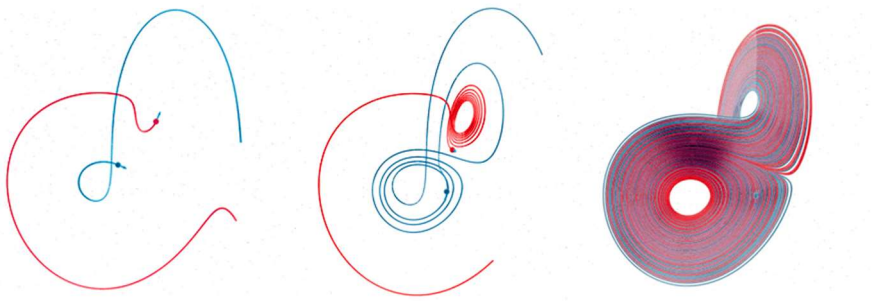

Рисунок 5 –Аттрактор Лоренца, полученный из двух точек с разными начальными координатами

Это то, что называется аттрактором Лоренца или же странным аттрактором. Причем полученная траектория не зависит от начального положения точек.

Далее, для более наглядного отображения этого аттрактора, мы использовали программу DEREK. Эта программа позволяет симулировать динамические системы в виде двумерных и трехмерных графиков. Для того, чтобы построить аттрактор Лоренца мы задали систему уравнений с определенными значениями констант (рисунок 6, 7).

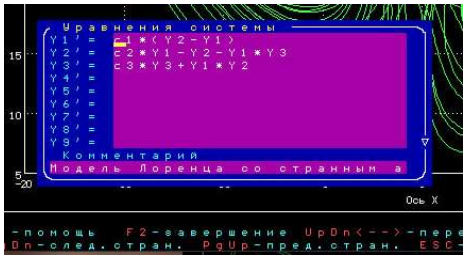

Рисунок 6 – Заданные уравнения в программе DEREK

Рисунок 7 – Значения констант в программе в программе DEREK

Таким образом прогрмма сторит упрощенный график, который, несмотря на это, очень точно отражает траектории состояний в этом странном аттракторе (рисунок 8).

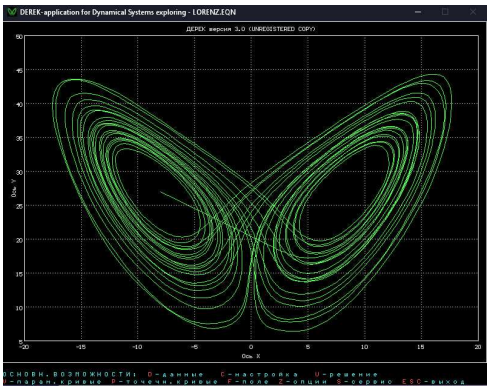

Рисунок 8 – Симуляция аттрактора Лоренца в программе DEREK

Помимо аттрактора Лоренца, есть и другие примеры странных аттракторов. Например, аттрактор Плыкина.

Аттрактор Плыкина – это классический пример гиперболического (то есть структурно устойчивого) странного аттрактора, возникающего в рамках теории динамических систем. Он определяется как максимальный аттрактор на двумерном диске, то есть такое множество, куда сходятся траектории системы, если (почти) любое начальное состояние взять из заданной области.

Главной особенностью данного аттрактора является его гиперболичность: в каждой точке множества можно разделить касательное пространство на стабильное и нестабильное подпространства, что обеспечивает экспоненциальное сжатие вдоль одних направлений и растяжение вдоль других. Такая схема динамики приводит к фрактальной структуре аттрактора и к явлениям детерминированного хаоса, где малая ошибка в начальных условиях приводит к значительной разнице в поведении системы в будущем.

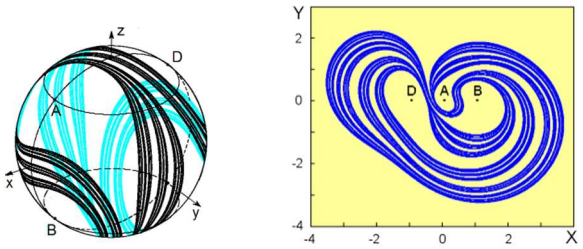

Рисунок 9 – Аттрактор Плыкина, представление на сфере и на плоскости

При подстановке параметров в систему (K=1.9, e=0.72), получаем аттрактор, представленный на рисунке в трехмерном расширенном фазовом пространстве неавтономной системы (рисунок 10). В сечении плоскостью t=const можно видеть объект, аналогичный аттрактору рассмотренного выше отображения (рисунок 9).

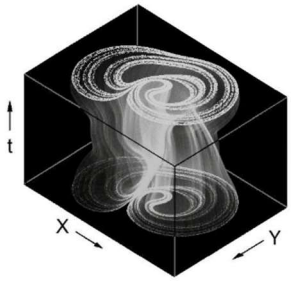

Рисунок 10 – Аттрактор Плыкина в трехмерном расширенном фазовом пространстве

Конструкция аттрактора Плыкина не только теоретически привлекательна, но и служит важным примером для изучения устойчивости хаотических динамических режимов. В отличие от некоторых других известных аттракторов, гиперболичность Плыкина гарантирует, что его структура не разрушается при малых возмущениях системы – он является образцом так называемой структурной устойчивости. Это делает его полезным не только для математических исследований, но и для прикладных задач, где требуется обеспечить надёжное сохранение качественно хаотического поведения в ходе изменения параметров системы.

Также примером странного аттрактора служит Аттрактор Смейла – Вильямса.

Аттрактор строится для отображения трехмерного пространства в себя, определенного следующей процедурой. Рассмотрим область в форме тора, растянем ее в длину, сложим вдвое и вложим в исходный тор, как показано на рисунке. При каждой следующей итерации количество «витков» удваивается. Объект, который получается в пределе большого числа итераций, называют соленоидом Смейла – Вильямса, он изображен на рисунке 11. Его поперечная структура имеет вид канторова множества (пример фрактальной структуры).

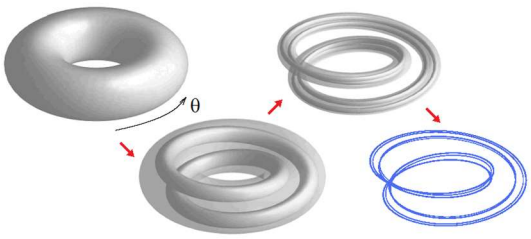

Рисунок 11 – Представление построения соленоида Смейла – Вильямса

Рисунок 12 показывает портреты аттрактора в проекции на плоскость, где по осям координат отложены обобщенная координата (напряжение) и скорость (производная по времени от напряжения) для первого осциллятора. Цветной портрет аттрактора сфотографирован непосредственно с экрана осциллографа. Второй портрет получен из решения уравнений на компьютере. Он представлен в серых тонах, где яркость изображения пропорциональна относительному времени пребывания в соответствующих точках.

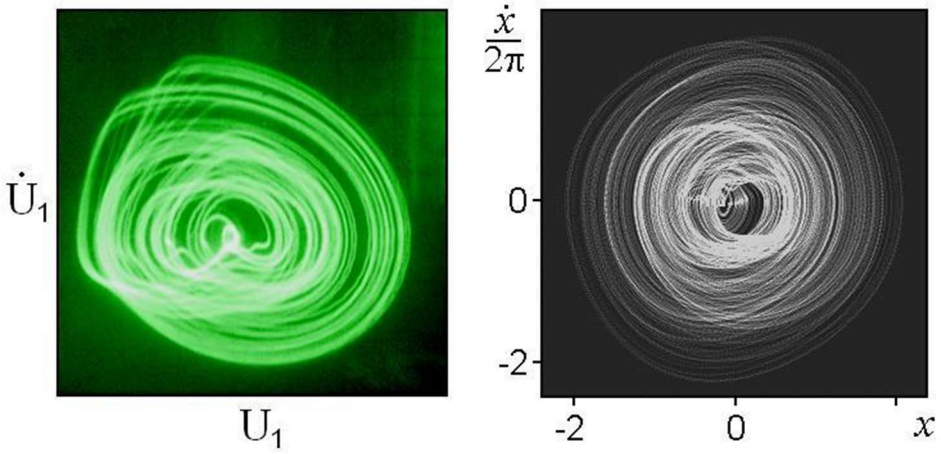

Рисунок 12 –Портреты аттрактора Смейла-Вильямса в проекции на плоскость

В ходе нашего исследования мы рассмотрели различные примеры аттракторов и их особые черты. Сначала мы изучили историю появления аттракторов. Затем мы рассмотрели понимание самого аттрактора и странного аттрактора. После этого мы рассказали про эффект бабочки и подробно рассмотрели странный аттрактор Лоренца. И в конце рассмотрели другие примеры странных аттракторов.

Оценивая вклад нашей работы в развитие высшей математики, мы можем сказать, что наше исследование расширило понимание странных аттракторов и аттракторов в целом. Мы продемонстрировали важность и интересность термина аттрактор в математике и показали это различными моделями и иллюстрациями. Наши результаты могут быть полезны для лучшего понимания понятия аттрактор, для дальнейших исследований и привлечения внимания к данной теме.

В перспективе дальнейших исследований в этой области стоит углубиться в изучение возможности использования аттракторов в физике и биологии. Также как один из путей развития можно выдвинуть поиск закономерностей в странных аттракторах с помощью искусственного интеллекта. Понимание и использование странных аттракторов имеет потенциал для развития новых математических, физических и биологических концепций и практических приложений, и дальнейшие исследования в этой области могут привести к новым открытиям и достижениям.

Список использованных источников:

1. Аттрактор Смейла – Вильямса / С.П. Кузнецов [и др.] // Саратовская группа теоретической нелинейной динамики: Динамический хаос и гиперболический аттракторы, 2013. – С.170-174 .

2. Аттрактор Плыкина – Вильямса / С.П. Кузнецов [и др.] // Саратовская группа теоретической нелинейной динамики: Динамический хаос и гиперболический аттракторы, 2013. – С.88-94 .

3. 3-D моделирование аттрактора Лоренца / А.Л. Золкин [и др.] // Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций имени проф. И.А. Бондарева, кафедра информационных управляющих систем: Моделирование аттрактора Лоренца, 2020. – С.614-617 .

4. The Solenoid / D. Ruelle // Strange Attractors, 1990. – P. 130-132.

5 Strange Attractors in nature / D. Ruelle // Strange Attractors, 1990. – P. 132-135.