

АППРОКСИМАЦИЯ НЕЯВНО ЗАДАНЫХ ФУНКЦИЙ СУММОЙ ЭКСПОНЕНТ

Могилевец Д.Э., Романовский М.Д.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Анисимов В.Я. – канд. физ.-мат. наук, доцент

В работе рассматривается задача восстановления параметров функции, заданной в дискретных точках и представляющей собой сумму двух экспонент. Для нахождения параметров экспоненциальной модели используется метод наименьших квадратов, основанный на разностных приближениях производных второго порядка. Приводится аналитическое обоснование метода и анализ его применимости. Также проводится анализ описанного метода с использованием СКА Maple.

Пусть некоторая неизвестная вещественнозначная функция $f(x)$ задана множеством своих значений в узловых точках $(x_0, x_1, \dots, x_n)$. При этом $x_i = ih$, где h – некоторое положительное действительное число. Пусть также известно, что на самом деле $f(x)$ представляет собой сумму двух экспонент, то есть $f(x) = ce^{\alpha x} + de^{\beta x}$ (где α и β возможно комплексно сопряжённые числа).

Поскольку $f(x)$ – сумма двух экспонент, $f(x)$ является решением некоторого дифференциального уравнения вида $y'' + ay' + by = 0$, где a и b – некоторые действительные положительные числа.

Для того, чтобы отыскать коэффициенты a и b воспользуемся методом наименьших квадратов [1]. Обозначим $f(x_i) = y_i$, тогда, используя разностные формулы второго порядка точности можем найти, $f'(x_i) = y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ и $f''(x_i) = y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$, для i от 1 до $(n-1)$ [2]. Тогда необходимо минимизировать выражение:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (y''_i + ay'_i + by_i)^2 \quad (1)$$

по a и b . Для этого приравняем частные производные по a и b к нулю. Имеем:

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2y'_i(y''_i + ay'_i + by_i) = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2y_i(y''_i + ay'_i + by_i) = 0 \quad (3)$$

Относительно a и b имеем линейную систему, можем переписать её в виде:

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i'^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^{n-1} y'_i y_i \right) b = - \sum_{i=1}^{n-1} y'_i y_i'' \quad (4)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} y'_i y_i \right) a + \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \right) b = - \sum_{i=1}^{n-1} y_i y_i'' \quad (5)$$

Определитель данной системы равен:

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i'^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} y'_i y_i \right)^2 \quad (6)$$

Данное соотношение, из неравенства Коши-Буняковского, равно нулю в том и только том случае, если $\frac{y_1}{y'_1} = \frac{y_2}{y'_2} = \dots = \frac{y_{n-1}}{y'_{n-1}}$ [3], что верно в том и только том случае, если $f(x)$ удовлетворяет уравнению $y' = py$, для некоторой константы p , то есть $f(x) = ce^{px}$, что не является суммой двух экспонент.

Значит во всяком ином случае имеем однозначное выражение для a и b . Следовательно, имея a и b можем выразить $\alpha = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ и $\beta = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Рассмотрим случай, где $a^2 - 4b > 0$, тогда решение дифференциального уравнения можно записать в виде $ce^{\alpha x} + de^{\beta x}$, где c и d – действительные. Для того, чтобы отыскать их, опять воспользуемся методом наименьших квадратов. Будем минимизировать по c и d выражение:

$$\sum_{i=0}^n (ce^{\alpha x_i} + de^{\beta x_i} - y_i)^2 \quad (7)$$

Вновь используя метод наименьших квадратов, можем отыскать значения c и d . Остальные случаи значений дискриминанта рассматриваются аналогично, в соответствии с общей теорией решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим приращение функции $f(x)$ при шаге h в зависимости от значений c, α, d, β . Не нарушая общности, положим $\alpha > \beta$. $\Delta f \approx f'(x)h = (cae^{\alpha x} + d\beta e^{\beta x}) = cae^{\alpha x}(1 + \frac{d\beta}{cae^{\alpha x}})h$. Функция $g(x) = \frac{d\beta}{cae^{\alpha x}}$ возрастает по x , пусть максимальное рассматриваемое значение $x = m$. Тогда, если величина $\frac{d\beta}{cae^{\alpha m}} \ll h^2$, то вклад второго слагаемого в производную функции невозможно оценить пользуясь разностным соотношением второго порядка точности. Значит, необходимым условием работы метода является $\frac{d\beta e^{\beta m}}{cae^{\alpha m}} h^2$.

Для проверки описанного метода была реализована программа с использованием СКА Maple. Был проведён набор тестов. В каждом из тестов использовалась функция, представляющая собой сумму двух экспонент с различными коэффициентами. Рассматривался отрезок $[0,1]$, шаг $h = 10^{-2}$. Был подтверждён представленный выше критерий работы метода. Относительная погрешность метода в оценке показателей степеней экспоненты составила в среднем 5%.

Для уравнения $e^{2x} + 5e^{3x}$ была исследована зависимость величины среднего квадрата отклонения от количества узловых точек. На графике ниже представлена зависимость величины десятичного логарифма среднеквадратичного отклонения решения от истинного от десятичного логарифма числа точек (число точек менялось в пределах от 5 до 20). Как можно видеть на графике. Как можно видеть, данная зависимость почти линейна. Коэффициент пропорциональности между логарифмами величин равен примерно 1. То есть, величину ошибки можно определить примерно как $\frac{const}{n}$, где n – число точек разбиения. Тогда можно сделать вывод, что погрешность имеет порядок $O(h)$.

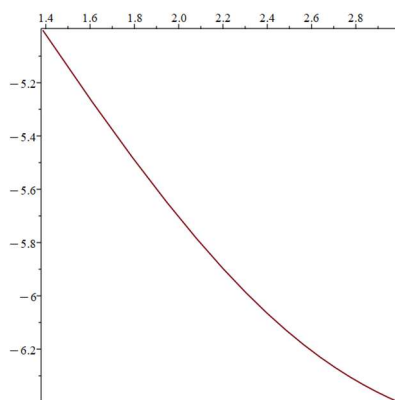


Рисунок 1 – Зависимость логарифма ошибки от логарифма числа узловых точек

Список использованных источников:

1. Хартли, Р. Метод наименьших квадратов и его приложения / Р. Хартли, А. Зиссерман. – М.: Бином, 2006. – 456 с.
2. Садовничий, В.А. Методы численного дифференцирования / В.А. Садовничий, А.А. Ларионов. – М.: МГУ, 1999. – 184 с.
3. Богачёв, В.И. Мера и интеграл / В.И. Богачёв. – М.: МЦНМО, 2005. – 496 с.