

ПЕРИОД ПИЗАНО

Родулевич А. О., Курстак Т. И., студенты гр.451001

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь*

Баркова Е. А. – Заведующий кафедрой, кандидат

физико-математических наук, доцент

Ключевые слова. Период Пизано, рекуррентность, последовательность Фибоначчи, зависимость, Python.

Аннотация. Исследование посвящено изучению периодов Пизано $\pi(m)$ — длин циклов повторения последовательности Фибоначчи по модулю m . С использованием Python проанализированы 100 000 чисел, выявлены закономерности и доказаны формулы для степеней 2, 5 и $24 \cdot 5$.

Результаты подтверждены анализом свойств последовательности Фибоначчи, включая тождества для четных членов и рекуррентные преобразования.

Введение

Последовательность Фибоначчи, впервые описанная Леонардо Пизанским в XIII веке, является одной из наиболее изученных рекуррентных последовательностей в математике. Её свойства находят применение в различных областях, включая теорию чисел, криптографию и алгоритмическую оптимизацию.

Одним из ключевых аспектов исследования этой последовательности является её поведение в модульной арифметике, в частности, изучение периодов Пизано — длин циклов, с которыми последовательность повторяется по модулю натурального числа $\pi(m)$ представляет значительный теоретический и практический интерес.

Основная часть

Начинаем с начальных условий

$$(F_0 \pmod{m}, F_1 \pmod{m}) = (0, 1) \quad (1)$$

При каждом шаге система переходит в новое состояние согласно рекуррентному соотношению. Поскольку количество возможных пар $F_n \pmod{m}, F_{n+1} \pmod{m}$ ограничено числом m^2 , система обязана вернуться в одно из уже посещённых состояний после конечного числа шагов. Это означает, что вся последовательность начнёт повторяться. Количество состояний, прошедших системой и является периодом Пизано.

Для сбора данных (точек и их периодов Пизано) нами был использован язык программирования Python. Также было разработано программное средство, предоставляющее возможность получить указанные точки в удобном для обработки и графического вывода формате. Измерения были проведены для 100000 целых натуральных чисел. График измерения представлен на рисунке 1.

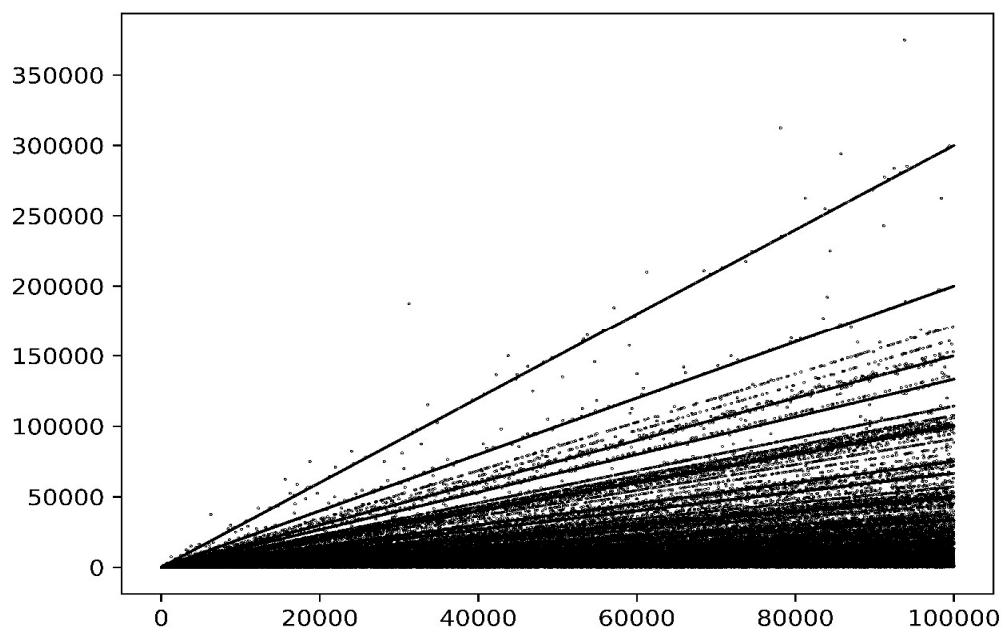


Рисунок 1 – Измерения для 100000 целых натуральных чисел.

Если пронаблюдать за периодами для разных чисел, становится заметно, что Большинство точек имеют период в диапазоне от 0 до 50000. С использованием упомянутого программного средства нами был получен график, представленный на рисунке 2 и изображающий измерения периодов в диапазоне от 0 до 50000, при том же наборе чисел.

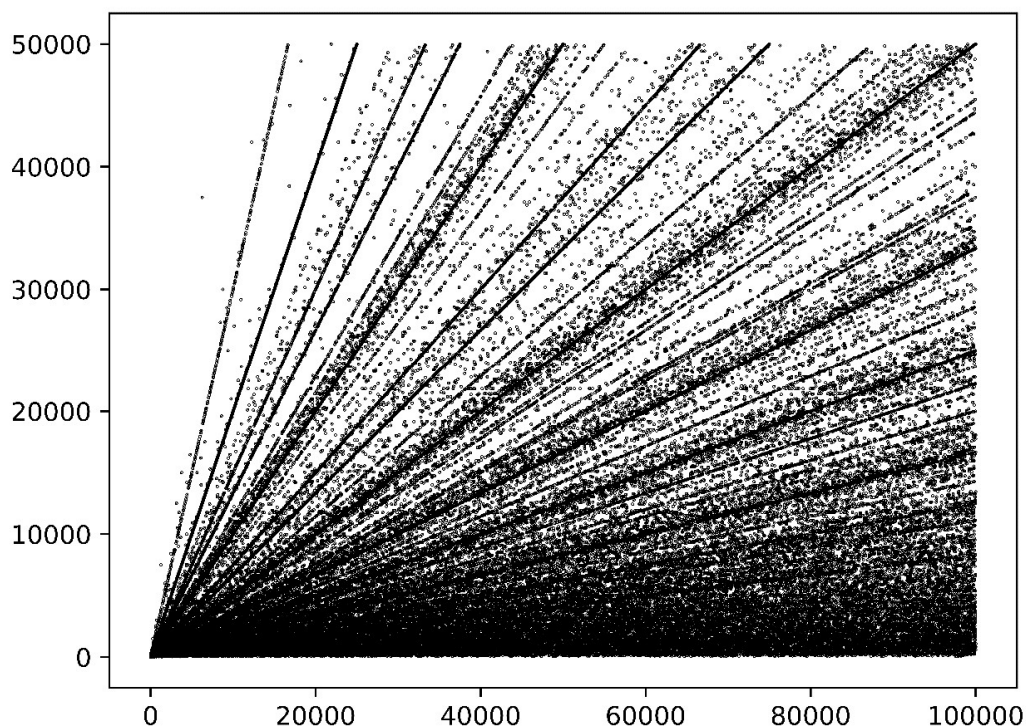


Рисунок 2 – Измерения периодов в диапазоне от 0 до 50000

Если наблюдать за периодами для разных чисел, становится заметно, что существуют такие наборы чисел, для которых зависимость периода от числа близка к линейной.

Вычислим значения для 1000 периодов. Теперь при помощи программного обеспечения для каждой предполагаемое линейной зависимости найдем коэффициенты прямой, которая содержит как минимум 3 точки, при этом наши линейные зависимости должны быть возрастающими, смотреть на рисунке 3. Далее для более точного анализа предполагаемых линейных зависимостей увеличим диапазон исследования.

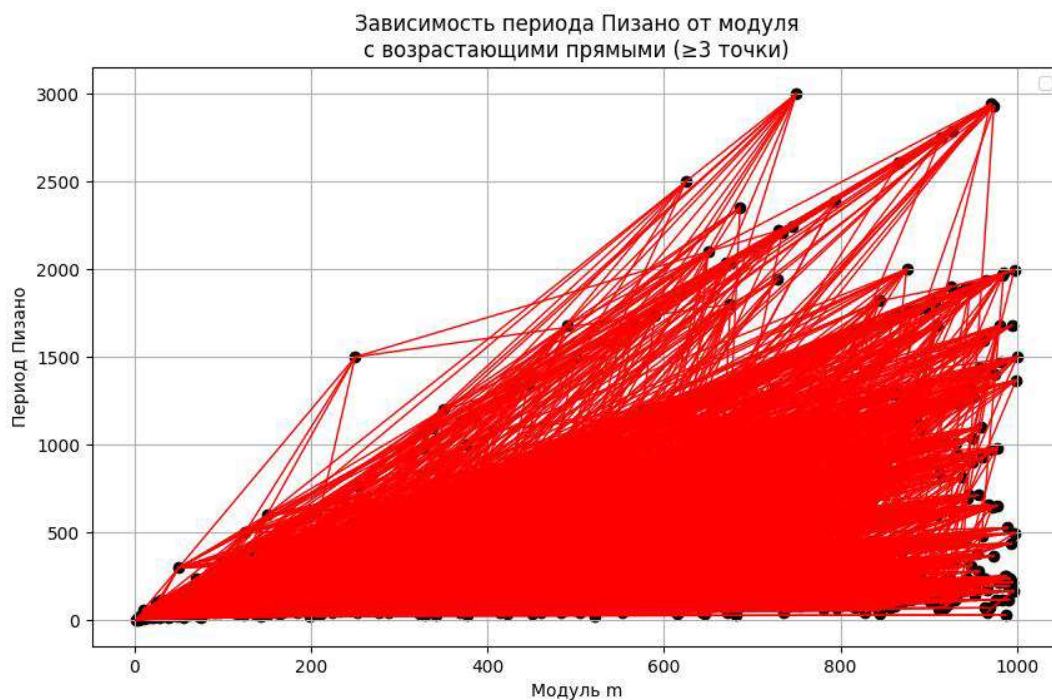


Рисунок 3 – Возрастание линейных зависимостей.

Анализируя все прямые, а именно коэффициенты и точки, через которые они проходят, найдем выделяющиеся зависимости. Такими являются $\pi(2m)$, $\pi(5m)$, $\pi(24 \cdot 5m)$, смотреть рисунок 4.

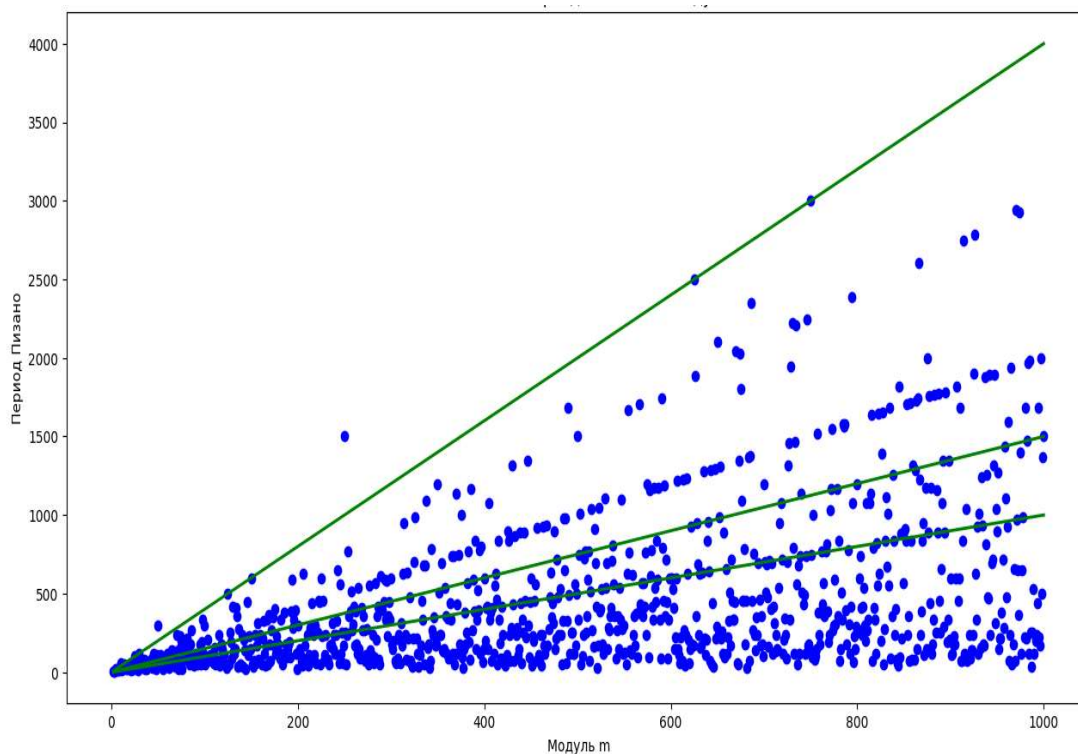


Рисунок 4 – Выделяющиеся зависимости.

Заключение

Проведённое исследование периодов Пизано $\pi(m)$ продемонстрировало их фундаментальную связь со структурой последовательности Фибоначчи в модулярной арифметике. На основе анализа свойств рекуррентных соотношений и применения методов теории чисел были доказаны гипотезы о

линейных зависимостях для степенных модулей. Ключевым инструментом работы стала разработанная программа на Python, позволившая провести масштабный вычислительный эксперимент для 100 000 натуральных чисел. Визуализация данных выявила преобладание периодов в диапазоне 0–50 000 и подтвердила наличие устойчивых линейных трендов для специфических классов чисел.

Список использованных источников:

1. Wikipedia – *Pisano period* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Pisano_period Дата доступа: 11.03.2025.
2. ON THE DIVISIBILITY PROPERTIES OF FIBONACCI NUMBERS, John Hs Halton, University of Colorado, Boulder, Colorado, 2011.
3. V. E. Hoggatt, Jr. , *Fibonacci and Lucas Numbers*, Houghton Mifflin, Boston, 1969.
4. *The Fibonacci Sequence Under Various Moduli*, Marc Renault. May, 1996.
5. Frederick Gebhardt, "Generating Pseudo-Random Numbers by Shuffling a Fibonacci Sequence," *Mathematics of Computation*, Oct. 1967

PISANO PERIOD

Rodulevich A. O., Kurstak T. I., students of group 451001.

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

*Barkova E. A. – Head of Department, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor*

Keywords. Pisano period, recurrence, Fibonacci sequence, dependency, Python.

Annotation. The study is devoted to the investigation of Pisano periods $\pi(m)$ —the lengths of cycles in the Fibonacci sequence modulo m . Using Python, 100,000 numbers were analyzed, revealing patterns and proving formulas for powers of 2, 5, and $24 \cdot 5$. The results are confirmed by an analysis of the properties of the Fibonacci sequence, including identities for even terms and recurrent transformations.