СВОЙСТВА ОГРАНИЧЕННО-ПЛОСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ С КОРРЕКТИРУЮЩИМИ ПОЛИНОМАМИ ЛЕЖАНДРА

А. А. Свириденко
Кафедра радиолокации и приемо-передающих устройств, Военная академия Республики Беларусь
Минск, Республика Беларусь
E-mail: {svirid2785}@gmail.com

Рассмотрены свойства модифицированных полиномов Лежандра, а также возможность их применения в качестве корректирующих при решении задач аппроксимаци функции коэффициента преобразования мощности.

Введение

Как известно [1] для коррекции частотной характеристики коэффициента преобразования мощности используют полиномы Чебышева, а также применяют максимально плоскую и эллиптическую характеристики коэффициента преобразования мощности.

В последние годы рядом ученых предложены модификации известных классических функций - Чебышева и Баттерворта [3, 4]. Результатом их работы явилось существенное улучшение качества аппроксимации идеальной прямоугольной характеристики.

Для улучшения качества аппроксимации коэффициента преобразования мощности может послужить использование свойств других полиномов (Лежандра, Эрмита, Гегенбауэра и др.). Применение последних, в качестве корректирующих, может принести более высокие результаты по одному из критериев оценки качества аппроксимации.

I. Свойства полиномов Лежандра

Полиномы Лежандра степени n можно представить в виде:

$$P_n\left(s\right) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{ds^n}\left(s^2-1\right)^n. \qquad (1)$$

На рисунке*(1)* представлены полиномы Лежандра 4, 5 и 6 порядков.

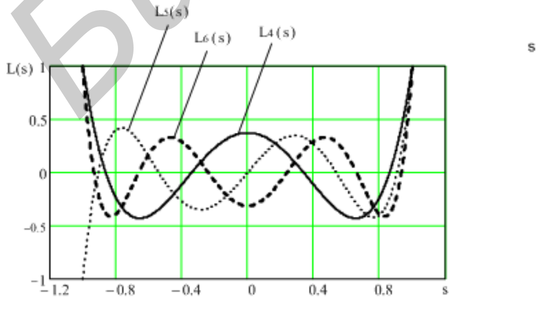

Рис. 1 – Вид полиномов Лежандра 4, 5 и 6 порядков

Из рисунка видно, что функция, описываемая выражением *(1)*, выходит из $(-1)^n\infty$ для больших значений $|s|$, колеблется n раз и возрастает к $+\infty$ для $s > 1$. На рисунке следует обратить внимание на особые точки, называемые экстремумами. Колличество этих особых точек равно $n-1$. Экстремумы расположены между точками -1 и 1 на оси абсцисс и между точками -0.5 и 0.5 на оси ординат. При увеличении порядка плоинома n координаты экстремумов стремятся к |s|=1 по оси ординат и к 0 на оси абсцисс.

Интерес к экстремумам вызван тем, что их взаимное расположение на плоскости определяет координаты других точек, в которых выражение *(1)* принимает значение равное 0. Корни функции *(1)* так же можно вычислить с использованием выражения:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{P_n(x_i^k)}{P_n'(x_i^k)}$$

причем начальное приближение для i – ого корня берется по формуле:

$$x_i^0 = \cos\frac{\pi(4i-1)}{4n+2}$$

II. Особые точки полиномов Лежандра и Чебышева

На рисунке *(2)* приведен вид полиномов Лежандра и Чебышева 6 порядка.

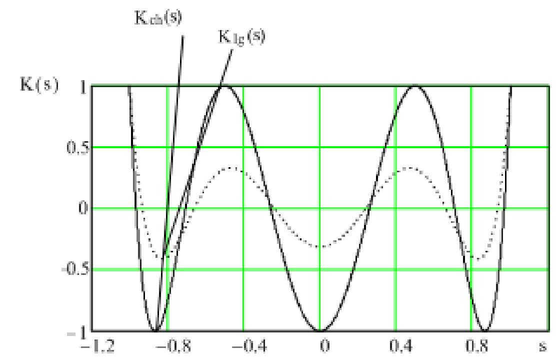

Рис. 2 – Вид полиномов Лежандра и Чебышева 6 порядков

Как видно полиномы Чебышева имеют особые точки, координаты которых отличаются от координат особых точек полиномов Лежандра.

Так по оси ординат экстремумы полиномов Чебышева, не зависимо от порядка полинома принимают значения $(-1)^k$, где $k = 1, 2...(n-1)$. По оси абсцисс координаты особых точек полиномов Лежандра имею меньшее значение, чем значение координат особых точек полиномов Чебышева $|s_t h| > |s_l g|$. Это в свою очередь приводит к тому, что точки, в которых полиномы Чебышева принимают значение равное 0, находятся дальше от начала координат в отличие от полиномов Лежандра того же порядка. Эти обстоятельства позволяют сделать вывод, что полиномы Лежандра являются наилучшей аппроксимацией гладкой прямой на интервале $s \in [-1; 1]$ по отношению к полиномам Чебышева.

III. Ограниченно-плоские аппроксимации с коректирующими полиномами Лежандра

В задачах синтеза частотно-избирательных цепей для реализации максимально плоской функции передачи используют полином вида $(-1)^n s^{2n}$.

Представляет интерес объеденить свойства полиномов Лежандра, а также свойства полинома имеющего максимальное колличество производных в точке $s = 0$.

Результатом перемножения полинома Лежандра порядка n и полинома, образующего максимально плоскую функцию передачи, порядка $(n-m)$, является модифицированный полином Лежандра вида:

$$F_{Lgm}(s) = s^{n-m} Lg(n, s). \tag{2}$$

Вид модифицированного полинома *(2)* для $n = 4$ и $m = 2$ представлен на рисунке *(2)*.

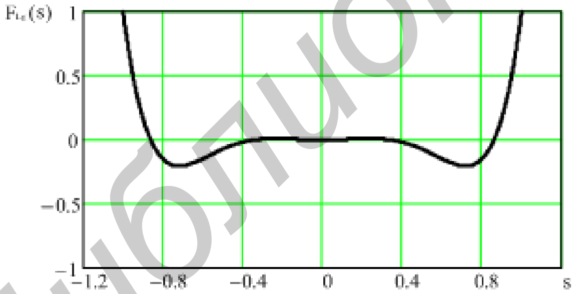

Рис. 3 – Вид модифицированного полинома Лежандра при $n = 4$ и $m = 2$

Новая функция, описываемая выражением *(2)*, в отличие от функции *(1)* на нулевой частоте имеет более одной первой производной, равной нулю. При четном порядке образующего полинома Лежандра, число этих производных равно $(n-m-1)$,при нечетном $(n-m)$.

В отличие от максимально плоской характеристика *(2)* может иметь несколько точек, в которых ее первая производная равна нулю. При нечетном n характеристика *(2)* имеет n таких точек, их число равно порядку полинома Лежандра. При четном количество таких точек составляет $(n+1)$. На краю полосы пропускания и за ее пределами рассматриваемая характеристика, так же как и максимальноплоская и равноволновая, монотонно убывает.

Заключение

Предложен новый вид полинома, обладающий одновременно свойствами полиномов Лежандра и максимально плоского полинома. Данный полином является ограниенно-плоским так как количество его первых производных равных нулю больше, чем у полинома Лежандра такого же порядка, однако меньше чем у максимально плоского полинома такого же порядка. Модификация полинома Лежандра позволила повысить его линейные свойства.

Использование свойств данного полинома, может улучшить качество аппроксимации при решении задач построения электрических фильтров и согласующих цепей поодному из критериев в сравнении с результатами, полученными в [3, 4].

1. Chen, W-K. Passive, Active, and Digital Filters / W-K. Chen –Chicago: University of illinois, – 2009. P. 2–18.
2. Шашок, В. Н. Синтез цепей широкополосного согласования и фильтрации с повышенной равномерностью группового времени запаздывания :дис. канд. техн. наук: 05.12.04 / В. Н. Шашок – Минск, 2013. – 142 л.
3. Шашок, В. Н. Цепи фильтрации с модифицированной нарастающеволновой функцией передачи / В. Н. Шашок, Г. А. Филиппович // Докл. БГУИР. – 2012. – №6 (68) – С. 69–75.
4. Бойкачев П. В., Филиппович Г. А., Метод модификации аппроксимирующих функций для синтеза фильтров и согласующих цепей // «Вестник» ВАРБ №4(37) 2012. – С. 63–69.