УДК 51-77

56. МЕТОД ДИРИХЛЕ И ЕГО ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ В РАЗЛИЧНЫХ СФЕРАХ

Егорова А.А., студентка гр.477601

Белорусский государственный университет информатики и электроники
г. Минск, Республика Беларусь

Русина Н. В. – ст. преп., каф. ЭИ

Аннотация. В данной статье рассмотрен принцип Дирихле, его определение и сферы применения, а также предложены эффективные способы решения задач при помощи принципа Дирихле и возможности его применения в экономике.

Ключевые слова. Принцип Дирихле, теория чисел, дискретная математика, конечные множества, комбинаторика, экономика.

Теоретические сведения.

Впервые принцип Дирихле (другое название – принцип ящиков Дирихле) упоминается во французском сборнике «Récréations Mathématiques» («Занимательная математика») 1624 года, который, предположительно, был опубликован французским математиком Жаном Лёрешоном. Однако широкое распространение данный принцип получил после его применения в области теории чисел немецким математиком Иоганном Дирихле (приблизительно 1824 год). Сегодня принцип Дирихле широко применяется в дискретной математике и теории чисел, является простым и понятным методом доказательства утверждений о конечном множестве [1].

В математической терминологии принцип Дирихле звучит следующим образом: «Если (*n+1*) элемент разбит на n множеств, то по крайней мере одно множество содержит не менее двух элементов» [2].

Примечательно, что в дискретной математике принцип Дирихле устанавливает логическую связь между объектами (например, «кроликами») и контейнерами («клетками») при выполнении определённых условий: превышение числа объектов над числом контейнеров. В результате, наиболее широкое распространение получила его простейшая формулировка: «Если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика». В дополнение, существует парная к ней формулировка: «Если число клеток больше, чем число кроликов, то как минимум одна клетка пуста».

Доказательство принципа Дирихле основано на логике и противоречии. Представим, что n кроликов распередлено по m клеткам, при этом $n > m$. Согласно принципу Дирихле, хотя бы в одной клетке будет находится более одного кролика. Для доказательства предположим обратное: в каждой клетке находится не более одного кролика. В таком случае, $n < m$. Возникает противоречие исходному условию. Соответственно, принцип доказан.

Практическое применение принципа Дирихле.

Принцип Дирихле является полезным и часто используется во множестве сфер: теория чисел, теория графов, экономика, комбинаторика, геометрия, вероятностная теория и статистика, физика и др. Рассмотрим некоторые из них.

1. Теория чисел. На основании данного принципа доказываются основные утверждений в теории чисел. Например, утверждение о несоизмеримости остатков.

Представим, что имеется некое множество *A* из *n+1* целых чисел, каждое из которых мы разделим на некоторое целое число n. Тогда все возможные остатки будут образовывать конечное множество:

$$R = \{0, 1, 2,\dots, n-1\}, \qquad (1)$$

где n – некоторое целое число. Поскольку чисел больше, чем различным возможных остатков, согласно принципу Дирихле, хотя бы два числе из *n+1* чисел имеют одинаковый остаток.

Доказательство: пусть каждый элемент a_i ($i = 1, 2,\dots,n+1$) из множества *A* даёт целочисленный остаток при делении на *n*. Тогда каждый остаток r_i ($i = 1, 2,\dots,n+1$) принадлежит множеству *R* (1). Однако множество *R* (1) содержит *n* различных остатков, а количество элементов в множестве *A* – *n+1*. Соответственно, остатки минимум у двух чисел совпадут. Что и подтверждает принцип Дирихле.

Пример.

Пусть множество целых чисел $A = \{3, 4, 5, 35\}$, $n=3$. В таком случае, $R = \{0, 1, 2\}$. Проверим остатки от деления:

$$r_1 = 3 \bmod 3 = 0;$$
$$r_2 = 4 \bmod 3 = 1;$$
$$r_3 = 5 \bmod 3 = 2;$$
$$r_4 = 35 \bmod 3 = 2.$$
$$r_3 = r_4 = 2. \qquad (2)$$

Согласно равенству (2), остатки двух элементов из множества *A* совпадают ($r_3 = r_4 = 2$). Следовательно, утверждение о несоразмерности остатков, основанное на принципе Дирихле, доказано ($n+1 = 4$, $n = 3$) и является верным для любого множества $X = \{a_1, a_2,\dots, a_i\}$, где $i = 1, 2,\dots,n+1$ и для любого целого числа *n*.

2. Теория графов. В теории графов принцип Дирихле используется для доказательства существования повторяющихся структур, таких как вершины с одинаковыми степенями или треугольники с рёбрами одного цвета, особенно в задачах на раскраску графов и анализ взаимосвязей. Это позволяет выявить закономерности и свойства, которые невозможно увидеть напрямую [3].

Пример.

Условие: доказать, что в полном графе из 6 вершин с ребрами двух цветов найдутся три вершины, образующие треугольник с ребрами одного цвета.

Решение. Пусть точка A – произвольная вершина. Тогдаиз данной точки выходит пять отрезков, соединяющих её с другими вершинами. Все эти отрезки могут быть покрашены по условию в два цвета.

Согласно принципу Дирихле, хотя бы три ребра будут одного цвета. Можем предположить, что из точки А выходит два красныхи три синих ребра. В таком случае, расммотрим тругольник, состоящий из вершин, в которые идут три синих ребра (рисунок 1).

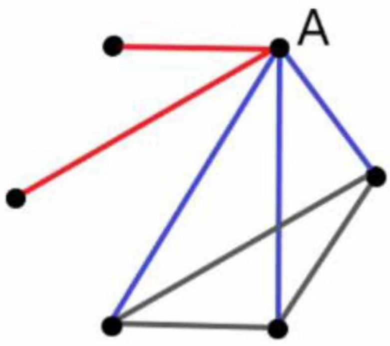

Рисунок 1 - треугольник с вершинами в концах синих ребер

Если одно из его ребер синее, то оно и два ребра, идущих к этому синему ребру, образуют синий треугольник. Если же в этом треугольнике нет синих ребер нет, то он будет красным (рисунок 2).

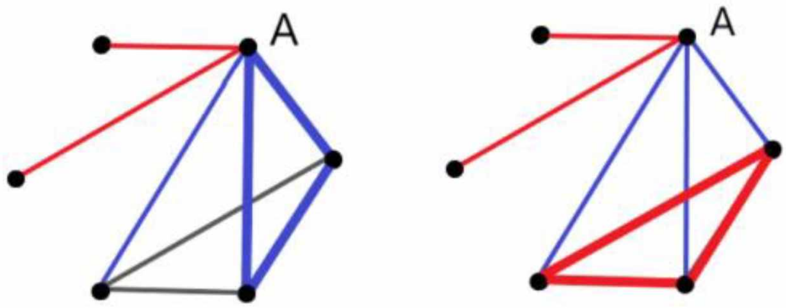

Рисунок 2 - Треугольник с рёбрами одного цвета

3. Комбинаторика. В комбинаторике принцип ящиков Дирихле используется дотстаточно часто, в основном для доказательства определённых свойств, структур или повторений. Рассмотрим несколько направлений в комбинаторике, где использование принципа Дирихле наиболее рационально.

Распределение объектов в группы. Условие: *15* студентов необходимо разделить на *7* команд. Согласно принципу Дирихле, хотя бы в одной команде будет не менее *3* студентов. Пусть количество команд – количество множеств (то есть $m = 7$), тогда количество студентов – это количество элементов, которые нам нужно распределить по данным множествам (то есть $n = 15$). Следовательно, $n>m$. В таком случае, согласно принципу Дирихле, хотя бы одно множество (команда) должна содержать как минимум n/m элементов (студентов). Следовательно, минимальное количество студентов в одной команде находится по формуле:

$$a = n/m = 15/7 = 2,14, \qquad (3)$$

округляя данное число $a = 2,14$ в сторону наибольшего возможного числа, получаем, что $a = 3$. Следовательно, хотя бы одна команда должна содержать не менее 3 студентов. Утверждение доказано.

Комбинации и подмножества. Условие: если из множества $A = \{1, 2, 3,\ldots,10\}$, случайным образом выбрать *6* чисел, то среди них будет хотя бы одна пара чисел, сумма которых будет равна *11*.

Для доказательства рассмотрим все возможные пары, сумма чисел которых равна *11*:

$$(1,10), (2,9), (3,8), (4,7), (5,6), \qquad (4)$$

получаем, что количество таких пар (и множеств) $m = 5$. Нам нужно выбрать 6 чисел (элементов), значит $n = 6$. Следовательно, $n>m$ ($6>5$). Согласно принципу Дирихле, если элементов больше, чем множеств, то хотя бы одно множество будет содержать не менее двух объектов. В данном случае это говорит о том, что хотя бы одна пара чисел из множества (4) будет выбрана полностью. Следовательно, сумма этой пары чисел будет равна *11*. Утверждение доказано.

Задачи на раскраску объектов. Условие: пусть имеется квадрат размером $3×3$, состоящий из 9 клеток. Нужно раскрасить 6 клеток этого квадрата двумя цветами, например, белым и чёрным. Требуется доказать, что хотя бы две соседние клетки будут одного цвета.

За количество элементов примем количество клеток, значит, $n=6$. За количество множеств примем количество клеток, которые являются соседями выбранной. Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону. Это означает, что каждую клетку связывают до четырёх соседей (за исключением углов и краёв квадрата). В таком случае, $m = 4$. Согласно принципу Дирихле, если $m<n$, то хотя бы одно из множеств будет иметь не менее 2 объектов. В данной задаче принцип Дирихле указывает на то, что не менее две соседние клетки будут закрашены одним цветом. Утверждение доказано.

Однако принцип Дирихле используется не только в различных отраслях математики. Широкое применение он также получил, например, в физике. Например, он используется для расчёта электрического поля внутри проводника. Если потенциал на поверхности проводника задан и одинаков для всех точек, то, применяя принцип Дирихле, можно определить распределение потенциала внутри проводника.

Ещё один пример применения принципа связан с движением частиц в электромагнитном поле. Если известны начальная и конечная точки траектории частицы, этот принцип позволяет рассчитать её путь между этими точками. Такой метод часто применяется для моделирования движения электронов в небольших электронных устройствах, где важно точно предсказать их поведение [4].

Доказательство эффективности принципа Дирихле при решении задач.

Как говорилось в начале работы, сегодня принцип Дирихле считается простым и интуитивно понятным и используется, как мы убедились, во многих отраслях. Однако его полезность заключается не только в разнообразии применяемых сфер и простоте, но и в том, что в некоторых ситуациях он попросту избавляет от необходимости сложных вычислений, что делает решение задач очень быстрым быстрым и увлекательным процессом.

Рассмотрим некоторые примеры таких задач.

1. Условие: существует 10 ящиков и 55 шариков. Необходимо доказать, что хотя бы в одном ящике будет не менее 6 шариков.

Без применения принципа Дирихле можно рассчитать среднее количество шариков на ящик: $55/10=5,5$. Однако для строгого доказательства было бы необходимо проанализировать все возможные комбинации. С использованием принципа Дирихле решение становится более простым: при 55 шариках и 10 ящиках очевидно, что $55/10=6$, поскольку используется округление в большую сторону. Это значит, что хотя бы в одном ящике гарантированно будет не менее 6 шариков. Что и было необходимо доказать.

2. Предположим, в классе 13 человек. Нужно доказать, что хотя бы у двух человек дни рождения в один и тот же месяц. Без знания принципа Дирихле также было бы необходимо анализировать всевозможные комбинации и ситуации. Однако, ссылаясь на прининцип ящиков Дирихле, мы с уверенностью можем сказать, что поскольку количество учеников $n = 13$, количество месяцев $m = 12$, значит $n>m$. Следовательно, найдётся как минимум один месяц, в котором дни рождения совпадут хотя бы у двух учеников.

3. Представим, что необходимо доказать, что среди 101 числа найдется пара, разность которых делится на 100. Без принципа Дирихле потребовалось бы перебирать разности всевохможных пар и анализировать их делимость, что делает процесс решения задачи очень длинным и долгим. Используя принцип Дирихле, мы учитываем, что остатки от деления на 100 для 101 числа обязательно включают повторяющийся остаток, так как остатков всего 100 (подробнее рассмотрено в разделе «Практическое применение принципа Дирихле»). Значит, разность двух таких чисел делится на 100, согласно вычислениям (5).

$$a=100k+r,\ b=100m+r;$$
$$a-b=(100k+r)-(100m+r)=100(k-m), \qquad (6)$$

где a и b – некоторые числа, r – общий остаток, k и m – невоторые множители. Утверждение доказано.

Возможности применения принципа Дирихле в экономике.

Принцип Дирихле является эффективным и полезным не только в физических и математических науках. Например, он может быть применён в экономике для анализа конкуренции, распределения русурсов и рынка труда. Рассмотрим каждый вариант.

1. Анализ конкуренции. Предположим, что есть некоторое количество сфер экономики m и некоторое количество компаний n. В данном случае, компании выступают в роли элементов, сферы экономики – множеств. Если $n>m$, значит, по крайней мере в одном множестве существует не менее двух элементов, то есть по крайнеё мере в одной сфере функционирует не менее двух предприятий.

При этом, чем сильнее n превышает *m*, чем больше предприятий приходится на одну отрасль, тем сильнее конкуренция. Применение метода Дирихле в таком случае поможет интуитивно понять, в каком секторе экономики наблюдается переизбыток предприятий, а в каком открытие нового предприятия, наоборот, будет выгодным.

2. Анализ распределения ресурсов. Предположим, что у нас есть некоторое количество n ограниченного ресурса (элементы) и некоторое количество предприятий m, которым необходим данный ресурс. Если $n<m$, то хотя бы одно множество останенется пустым. Это говорит о том, что хотя бы одно предприятие не получит ограниченный ресурс. Данное знание поможет оценить, необходимо ли перераспределить данный ресурс, заменить часть данного ресурса на менее редкие субституты, а также понять, насколько данный ресурс предприятиям необходим (на это укажет количество пустых множеств: их большое количество будет говорить о том, что ресурс является очень востребованным и нужным).

3. Анализ рынка труда. Представим, что количество рабочих мест в определённой сфере – *m* (множества), а количество сотрудников, подходящей квалификации – *n* (элементы). Ситуацию на рынке труда можно оценить при помощи нахождения отношения элементов к множествам. Чем больше элементов приходится на одно множество, тем выше конкуренция среди рабочих в данном экономическом секторе. Это говорит о том, что рынок труда перенасыщен специалистами данного профиля. Ситуация, когда отношение показателей <1, говорит о том, что некоторые множества пусты, что в свою очередь, говорит о нехватке подходящих специалистов. Анализ ситуации на рынке труда может наглядно и просто показать, в каких сотрудниках нуждается экономика, что позволит оптимизировать их подготовку и обучение.

Хотя принцип Дирихле в экономике на сегодняшний день используется весьма редко, его применение делает интуитивно понятными многие экономические процессы и явления и доступно объясняет их.

Таким образом, принцип Дирихле, благодаря своей простоте и универсальности, остаётся важным инструментом в математике и её приложениях. Он также демонстрирует свою эффективность в широком спектре наук, причем не только математических: от теории чисел и комбинаторики до физики и экономики. Как показано в работе, применение этого принципа позволяет значительно упростить процесс решения отдельных типовых задач и избежать сложных и трудоёмких вычислений. Для экономики данный метод может быть полезен и удобен в различных анализах благодаря своей простоте и ясности. На сегодняшний день частота использования принципа Дирихле только возрастает. Всё это говорит о его практичности, удобстве и доступности для понимания.

Список использованных источников:

1. Электронный ресурс: https://ru.wikipedia.org/

2. Электронный ресурс: https://foxford.ru/

3.Электронный ресурс: https://view.officeapps.live.com/op/view.aspx?src=https%3A%2F%2Fshkolaatemarskaya-r13.gosweb.gosuslugi.ru%2Fnetcat_files%2F159%2F2594%2FPrintsip_Dirihle_v_teorii_grafov.docx&wdOrigin=BROWSELINK

4. Электронный ресурс: https://faqguru.ru/faq/znacheniya/princip-dirixle-smysl-i-primenenie