

98. КОМБИНАТОРНЫЕ ИГРЫ

Тарасенко К.В., студент группы 473904, Стрелец А.Н., студент группы 473904.

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь*

Русина Н.В. — ст. преп., каф. ЭИ

Аннотация. Работа посвящена исследованию комбинаторных игр в рамках дискретной математики. Рассматриваются основные подходы к их анализу, а также предлагается пример практического применения на основе игры «Ним».

Комбинаторные игры представляют собой интересную и многогранную область дискретной математики, сочетающую элементы комбинаторики, алгоритмов и теории игр. Они изучают взаимодействие участников в условиях детерминированности и полной информации, что позволяет не только углубить понимание математических закономерностей, но и находить практическое применение теоретическим разработкам. В таких играх участвуют два или более игрока, которые совершают ходы поочередно в рамках заданных правил, стремясь достичь оптимального результата.

Уникальной особенностью комбинаторных игр является отсутствие случайности, что дает возможность анализировать стратегии с помощью четких математических моделей. Классическими примерами являются такие игры, как «Ним», «Ханойская башня» и «Крестики-нолики», которые изучают математические алгоритмы для нахождения оптимальных стратегий. Например, в игре «Ним» используется понятие «ним-суммы», позволяющее определить, является ли текущая позиция выигрышной или проигрышной.

Изучение комбинаторных игр охватывает несколько ключевых аспектов. К ним относятся классификация и свойства игр, алгоритмы анализа, математическое моделирование и реальные приложения.

Такие игры делятся на несколько типов в зависимости от их особенностей. Например, существуют игры на графах (которые будут рассмотрены как пример ниже), в которых анализируются стратегии в сетевых структурах, и игры с удалением объектов, где игроки поочередно убирают элементы из куч по заданным правилам.

Для анализа стратегий используются различные алгоритмы, такие как дерево решений, которое позволяет визуализировать все возможные ходы и предсказывать ход игры, и методы теории графов, которые применяются для исследования сложных сетевых игр, включая построение оптимальных путей. Значительную роль в изучении стратегий играют численные методы и вычислительные модели.

Комбинаторные игры находят применение в реальной жизни, включая искусственный интеллект, разработку алгоритмов и решение оптимизационных задач. Например, алгоритмы искусственного интеллекта для шахмат базируются на принципах, заложенных в комбинаторных играх.

Интересным направлением исследований являются комбинаторные игры с элементами кооперации, где временное сотрудничество участников может привести к общему успеху, но в дальнейшем каждый игрок стремится к своей индивидуальной цели. Такое сочетание кооперации и соперничества открывает перспективы для анализа гибридных стратегий и поиска решений в условиях конфликтов интересов.

Игра «Ним» является одним из примеров применения методов комбинаторной теории игр, которая исследует беспристрастные игры с полной информацией, где исход определяется исключительно стратегиями игроков. В основе анализа лежит ним-сумма — результат побитовой операции XOR (операция исключающее "или") над размерами всех кучек, позволяющий формально оценить выигрышные и проигрышные позиции.

$$S = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n, \quad (1)$$

где a_1, a_2, a_n — размеры кучек; $\oplus$ — операция XOR.

Каждая позиция игры также характеризуется значением функции Шпрага–Гранди, которая позволяет однозначно определить выигрышность или проигрышность данной позиции. Согласно теореме Шпрага–Гранди, любую игру, состоящую из нескольких независимых частей, можно свести к эквивалентной игре «Ним» с кучками, количество предметов в которых соответствует значениям функции Гранди для каждой части.

Стратегия игры основывается на стремлении оставлять после каждого своего хода позиции с нулевой ним-суммой, так как из таких позиций противнику невозможно сделать ход, возвращающий ним-сумму к нулю.

Такой подход к игре опирается на фундаментальные принципы комбинаторной теории игр, где ним-сумма служит ключевым инструментом для анализа позиций.

Помимо этого, теория изучает модификации игры, такие как «Мизер» или «Обратный ним», предлагая математические методы для адаптации стратегий к изменяющимся правилам. Эти модификации сохраняют математические закономерности оригинальной игры, включая использование ним-суммы и функций Гранди.

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) = G(a_1) \oplus G(a_2) \oplus \dots \oplus G(a_n), \quad (2)$$

где $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — общее значение функции Гранди; $G(a_i)$ — значение функции Гранди для отдельной кучки (a_i); $\oplus$ — операция XOR.

Независимо от специфики модификации — будь то «Мизер» или «Обратный ним» — остаётся важным учитывать структуру выигрышающих и проигрывающих позиций, что позволяет находить оптимальные ходы. Именно благодаря этим математическим закономерностям удаётся сохранить стратегическую глубину игры и формализовать её с помощью функций Гранди. Эти функции служат универсальным инструментом, помогающим оценивать любые вариации игры с точки зрения теоретико-игрового анализа, делая их предсказуемыми и логически непротиворечивыми.

Исследование комбинаторных игр позволяет формализовать ключевые математические принципы, включая ним-сумму и функцию Гранди, что лежит в основе стратегического анализа игровых ситуаций. Развитие теории поддерживается модификациями, такими как «Мизер» и «Обратный ним», демонстрирующими адаптацию математических моделей к изменяющимся условиям игры. Эти варианты сохраняют фундаментальные закономерности, позволяя эффективно применять разработанные алгоритмы для стратегического планирования и оптимизации решений.

Формирование алгоритмов оптимизации стратегий опирается на точные математические модели, включая вычисление ним-суммы и рекуррентные зависимости функции Гранди. Это

способствует разработке универсальных подходов, применимых в различных игровых сценариях, и подчёркивает важность структурного анализа комбинаторных игр.

Таким образом, комбинаторные игры обладают широкой применимостью, позволяя моделировать и решать задачи в различных игровых сценариях, включая их модификации и аналогичные логические структуры.

Список использованных источников:

1. Комбинаторная теория игр / Пьер Деорнуа // Летняя школа «Современная математика», 2009. – С. 7-22.
2. Комбинаторика и настольные игры. [Электронный ресурс] URL: <https://habr.com/ru/articles/150365/>
3. Комбинаторные игры / А. Х. Шень // Лекции по дискретной математике, 2016. – С.276-319.
4. Введение в теорию комбинаторных игр. Простейшие комбинаторные игры / И. С. Фролов // Математическое образование, выпуск 3(63), 2012. – С.38-52.