УДК 519.66

93. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСКРАСКИ ГРАФОВ И ИХ ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Попова В.А., Черкасова Е.И., студенты гр.477603

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Русина Н.В. – ст. преп., каф. ЭИ

Аннотация: В данной статье изучаются теоретические основы раскраски графов, а также практическое их применение на примере решения задачи на составление расписания транспортных рейсов.

Ключевые слова: теория графов, раскраска графов, алгоритм раскраски графов, составление графика рейсов, хроматическое число графа, планарность графа.

Формирование теории графов началось в конце XVIII - начале XIX веков благодаря работам математиков Леонарда Эйлера и Огюстена Луи Коши, которые изучали задачу о кенигсбергских мостах, что привело к формализации понятия графа. С развитием вычислительной техники и программирования появилась острая необходимость в моделировании и анализе сложных систем, и графы стали незаменимым инструментом для решения этих задач.

Графом называется объект, состоящий из точек и соединяющих их линий. (Рисунок 1)

Точки называются вершинами графа, а линии — ребрами. В дискретной математике граф описывает отношения. Соответственно, любое отношение можно описать в виде графа [1].

Рисунок 1 – Иллюстрация графов

Граф называется планарным, если его можно уложить на плоскости, плоским - если он уложен на плоскости.

Область, ограниченная ребрами в плоском графе и не содержащая внутри себя вершин и ребер, называется гранью. Число ребер плоского графа G обозначается r(G). Неограниченная грань называется внешней, ограниченные – внутренними.

Важно отметить, что планарность графа зависит от способа его изображения на плоскости. То есть, один и тот же граф может быть планарным или непланарным в зависимости от выбранного способа его изображения.

Для проверки планарности графа существуют различные алгоритмы, такие как алгоритмы визуализации графов и алгоритмы поиска подграфов в заданном графе. Эти алгоритмы позволяют определить, является ли граф планарным или непланарным. Планарные графы имеют важное применение в различных областях, таких как сетевой дизайн, телекоммуникации, компьютерная графика, графовые базы данных и другие, где требуется визуализация и анализ связей и отношений между объектами.

Планарность графа тесно связана с его раскраской.

Раскраска графа — это присвоение каждой вершине графа определенного цвета таким образом, чтобы никакие две смежные вершины не имели одинакового цвета. Также рекомендуется использовать как можно меньше цветов.

Цвета — это целые положительные цифры [2].

Связь между планарностью и раскраской графа выражается в так называемой теореме четырех красок. Эта теорема утверждает, что любой планарный граф может быть раскрашен с помощью не более четырех цветов так, чтобы никакие две смежные вершины не имели одинакового цвета.

Хроматическое число графа — минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы концы любого ребра имели разные цвета.

Пусть G – граф. Раскраской графа G называется окрашивание вершин графа G такое, что никакие две смежные вершины не имеют один цвет. Пусть CG(λ) обозначает количество способов раскраски графа G с использованием λ цветов, так что никакие две смежные вершины не имеют один цвет, т.е. CG (λ) – количество способов раскраски графа G. Для фиксированного графа G функция CG(λ) является полиномиальной функцией от λ, называемой хроматическим многочленом графа G. Хроматическое число графа – это наименьшее число цветов, которое используется для раскраски графа. Это наименьшее положительное число n такое, что CG(n) ≠ 0. Последовательный алгоритм. Определим хроматическое число и раскраску графа изображенного на рисунке 2.

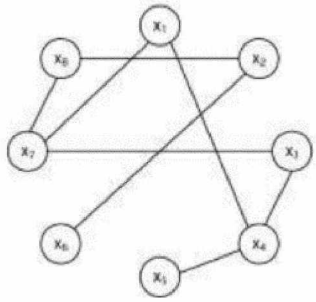

Рисунок 2 – Граф G

Воспользуемся последовательным алгоритмом раскраски графа [3]:

1. Подсчитываем локальные степени вершин графа G и составляем список вершин в порядке убывания их локальных степеней:

$\rho(X_i)$	3	3	3	2	2	2	2	1
X_i	4	7	8	1	2	3	5	6

2. Выбираем из списка вершину x4: П1 = {x4}.
3. Просматриваем список на предмет нахождения несмежных вершин. Выбираем ближайшую несмежную вершину. Это вершина x7: П1 = {x4, x7}.
4. Продолжаем процесс просмотра. Выбираем вершину x2 - несмежную вершинам x4 и x7, включенным в подмножество П1. Теперь П1 = {x4, x7, x2}.
5. Просматриваем список дальше, и, так как в списке больше нет вершин, несмежных вершинам подмножества П1, окрашиваем вершины этого подмножества в первый цвет и удаляем их из списка. После удаления список примет вид:
6. Выбираем вершину x8: П2 = {x8}.
7. Выбираем вершину x1: П2 = {x8, x1}.
8. Выбираем вершину x3: П2 = {x8, x1, x3}.
9. Выбираем вершину x6: П2 = {x8, x1, x3, x6}.
10. В списке нет больше вершин, несмежных вершинам подмножества П2. Окрашиваем вершины этого подмножества во второй цвет и удаляем их из списка.
11. В списке остается только одна вершина – x5. Эта вершина окрашивается в третий цвет.

Таким образом, для раскраски графа нам потребовались три краски, следовательно, хроматическое число: $\chi(G) = 3$. Алгоритм реализует «жадную» стратегию. Существуют различные эвристические подходы [3]. Однако с увеличением размерности задачи их эффективность в плане качества решения значительно ухудшается.

Используя метод раскраски графов, можно решить многочисленные задачи, например, составление расписаний, графиков рейсов, распределение оборудование и др. Мы для изучения практического использования теории раскраски графов рассмотрим следующую задачу:

Заданы множество пунктов S = {s_1; s_2, …, s_k} - склады, пункты самовывоза товара и др. и множество рейсов R = {r_1, r_2, …, r_n}, каждый из которых включает в себя несколько различных пунктов. Рейсом машины является последовательность пунктов r_i = {s_{i1}, s_{i2}, …, s_{ik}}, $1 \le i \le n$, $m\ i \le к$, которые она посетит за данный день.

Требуется найти расписание (распределение рейсов по дням недели) со следующими свойствами: каждый пункт посещается за неделю хотя бы один раз, рейсы нужно распределить среди нескольких дней недели таким образом, чтобы ни один пункт не посещался дважды за один день.

Построим граф G, в котором вершины соответствуют рейсам. Две вершины этого графа смежны тогда и только тогда, когда два различных рейса содержат один и тот же пункт. Любая правильная раскраска графа G дает распределение рейсов на несколько дней недели (по числу цветов, и требуется, чтобы их было не более шести) таким образом, чтобы каждый пункт посещался хотя бы раз в неделю, но ни один пункт не посещался дважды за один день.

<u>Решение:</u> Заданы множества R = {r_1, r_2, …, r_{10}} и S = S = {s_1; s_2, …, s_{12}} рейсы и пункты соответственно. 10 рейсов разбиты на 3 группы: долгие рейсы - 11 ч, средние рейсы - 9 ч, быстрые рейсы - 7 ч. Необходимо распределить рейсы так, чтобы среди нескольких дней недели ни один пункт не посещался дважды за один день и, хотя бы один раз в неделю. В таблице 1 отмечены рейсы, которые содержат один и тот же пункт. Требуется определить общее время работы всех машин за неделю.

Таблица 1 – Таблица рейсов для построения графа

Рейсы	Пункты												Время
	s1	**s2**	**s3**	**s4**	**s5**	**s6**	**s7**	**s8**	**s9**	**s10**	**s11**	**s12**	Tk
r1	+	+	+		+				+	+			11
r2	+		+	+		+	+			+		+	9
r3			+		+	+			+		+		7
r4								+				+	7
r5		+	+	+			+				+		7
r6			+							+		+	9
r7	+		+				+		+				11
r8		+			+	+				+	+		11
r9		+											9
r10	+						+				+		7

Построим граф с вершинами r1 ,r2 , …, r10. Соединим ребрами вершины, в соответствии с таблицей 1. Получим граф, изображенный на рисунке 3. Вершины r1, r2 , r3 , r5 , r8 , r10 образуют полный подграф, следовательно хроматическое число графа не меньше 6, $\chi(G) \ge 6$. На рисунке 3 указан один из вариантов раскраски графа в 6 красок.

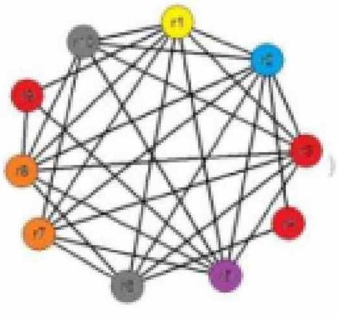

Рисунок 3 – Раскраска графа, построенного на основе таблицы

Сопоставляем полученную раскраску с таблицей 1 и составляем вариант расписания рейсов (см. таблица 2). В понедельник выполняется рейс r_1, вершина которого раскрашена в желтый цвет и указано максимальное время работы машины за этот день T_1=11. Во вторник выполняется один рейс r_2. Соответствующая ему вершина покрашена в синий цвет, а время работы равно T_2=9. В среду выполняются рейсы r_3, r_4, r_9, соответствующие им вершины покрашены в красный цвет и время выполнения всех рейсов равно T_3 = 9. В четверг выполняется один рейс r_5, соответствующая ему вершина раскрашена в фиолетовый цвет и время работы равно T_4=7. В серый цвет покрашены вершины, соответствующие рейсам r_6, r_{10}, которые выполняются в пятницу за время $T_5 = 9$. В субботу выполняются рейсы r_7, r_8 (вершины оранжевого цвета) за время $T_6=11$.

Таблица 2 – Расписание рейсов

Дни недели	Рейсы	Пункты											
Понедельник	r1	s1	s2	s3		s5				s9	s10		
Вторник	r2	s1		s3	s4		s6	s7			s10		s12
Среда	r3,r4,r9		s2	s3		s5	s6		s8	s9		s11	s12
Четверг	r5		s2		s4			s7				s11	
Пятница	r6, r10	s1		s3				s7			s10	s11	s12
Суббота	r7, r8	s1	s2	s3		s5		s7		s9	s10	s11	

Общее время работы всех машин за неделю: $T = 11 + 9 + 9 + 7 + 9 + 11 = 56$ ч. Таким образом, мы решили задачу, построив граф и раскрасив его.

Список использованных источников:

1. Онлайн школа Skysmart [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://skysmart.ru/articles/mathematic/osnovnye-ponyatiya-teorii-grafov.

2. Hexlet [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.hexlet.io/courses/graphs/lessons/coloring/theory_unit.

3. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Дискретная математика: Теория графов –- Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. – 162 с.