

99. ТЕОРИЯ ИГР: ФУНКЦИЯ ШПРАГА-ГРАНДИ. НОВЫЕ МЕТОДЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФУНКЦИИ ШПРАГА-ГРАНДИ В ЭКОНОМИКЕ

Жарская А.Д., студент гр.477602, Юроть В.Е., студент гр.477602

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь*

Русина Н.В. – ст. преп., каф. ЭИ

Аннотация. В данной статье функция Шпрага-Гранди рассматривается как инструмент анализа комбинаторных игр в рамках теории игр, а также обеспечивает новые подходы к их применению в экономике. Особое внимание уделено возможности использования функции Шпрага-Гранди для моделирования экономических процессов, таких как конкурентные стратегии, финансовые ресурсы и аукционы. Предложены инновационные методы использования функции для анализа алгоритмических игр с неполной информацией и оценки устойчивости экономических систем. Результаты исследования доказали потенциал использования функции Шпрага-Гранди как инструмента для разработки оптимальных стратегий в экономике.

Введение. Теория игр представляет собой раздел математики, изучающий стратегии взаимодействия между участниками, где результат одного зависит от действий других. Одним из ключевых инструментов комбинаторной теории игр является функция Шпрага-Гранди, которая изначально была разработана для анализа беспристрастных игр, таких как Ним. Она позволяет определять выигрышные и проигрышные позиции и разрабатывать оптимальные стратегии для игроков. Несмотря на свою фундаментальную природу, применение функции Шпрага-Гранди в экономическом развитии ограничено из-за ее ориентации на игры с полной информацией и строгой структурой.

Современные задачи, такие как конкуренция на рынках и аукционы, требуют новых подходов к моделированию стратегического управления. Таким образом, целью данной работы является исследование возможностей расширения применения функции Шпрага-Гранди в экономике, включая разработку новых методов анализа технологических процессов и игр с неполной информацией. Структура работы строится следующим образом: сначала исследуются основы функции Шпрага-Гранди, а после предлагаются инновационные методы применения функции в экономике.

Теоретические основы функции Шпрага-Гранди. Вначале дадим определение функции Шпрага-Гранди. Функцией Шпрага-Гранди называется такая функция G , определенная для x и принимающая неотрицательные значения, так что:

$$G(x) = \min\{n \geq 0 : n \neq G(y), y \in F(x)\} \quad (1),$$

n – любое целое неотрицательное число,
 y – одна из позиций, в которую можно перейти непосредственно из позиции x за один ход,
 $G(y)$ – значения Шпрага-Гранди позиций, в которые можно перейти непосредственно из позиции x за один ход,
 $F(x)$ – список позиций, в которые можно перейти непосредственно из позиции x за один ход.
 Таким образом, $G(x)$ – наименьшее неотрицательное целое число, не найденное среди значений

Шпрага-Гранди для определенных x . Это число представляет собой "ним-значение" позиции и вычисляется рекурсивно с использованием принципа наименьшего исключенного значения (min)

Далее, стоит рассмотреть основные свойства Шпрага-Гранди:

1. Если x — конечная позиция, то $F(x) = 0$. Позиции x , для которых $F(x) = 0$, являются П-позициями (проигрышными для игрока, чья очередь делать ход), тогда как все другие позиции соответственно Н-позициями (выигрышными для игрока, чья очередь делать ход). Выигрышная стратегия заключается в том, чтобы выбирать на каждом шаге ход, в котором значение Шпрага-Гранди равно нулю.

2. Из позиции x , для которой $F(x) = 0$, существуют ходы только в позицию y такую, что $F(y) \neq 0$.

3. Из позиции x , для которой $F(x) \neq 0$, существует хотя бы один ход в позицию y , для которой $F(y) = 0$.

Одним из наглядных примеров использования функции Шпрага-Гранди является игра Ним. Игра Ним — это математическая игра для двух игроков, в которой игроки поочередно удаляют предметы (обычно камни или спички) из нескольких кучек. Цель игры состоит в том, чтобы вынудить противника взять последний предмет. Игра начинается с нескольких кучек предметов. Их количество и количество предметов в кучках определяются заранее. Ходят игроки по очереди. В свой ход игрок должен выбрать какую-либо кучку и удалить из нее то количество предметов, которое определит сам (но не меньше одного). Завершение игры наступает при опустении всех кучек. Проигрывает тот игрок, который не может сделать ход. Следовательно, состояние игры можно описать набором из N натуральных чисел, а игра заканчивается, когда сумма этих чисел становится равной нулю.

Чтобы выиграть в Ниме, нужно стремиться к тому, чтобы ним-сумма всех кучек была равна нулю после каждого вашего хода. Ним-сумма двух и более чисел — это результат применения операции XOR к их двоичным представлениям. Здесь имеют смысл два случая:

1) Текущая ним-сумма не равна нулю. Это означает, что текущая позиция является выигрышной, следовательно, существует ход, приводящий к тому, чтобы ним-сумма была равна нулю.

2) Текущая ним-сумма равна нулю. Следовательно, текущая позиция является проигрышной, ведь любой ход игрока приведет к ним-сумме, отличной от нуля.

Инновационные методы использования функции Шпрага-Гранди в экономике. Теперь, в целях демонстрации полезности функции Шпрага-Гранди, мы предложим новые методы использования данной функции в экономике. Первым примером использования данной функции в экономике может быть применение их в динамических аукционах. Аукционы можно интерпретировать как игры, где участники делают ставки, а результат зависит от их стратегий. Функция Шпрага-Гранди может быть адаптирована для анализа динамических аукционов, где участники могут менять стратегии в реальном времени. Можно использовать функцию для моделирования аукционов с несколькими лотами, где участники выбирают, за какие лоты бороться, а ресурсы ограничены. Функция покажет, какие комбинации ставок ведут к выигрышу или минимизации потерь.

Следующим моментом, в котором можно применить функцию Шпрага-Гранди, является оптимизация цепочек поставок и логистики. Цепочки поставок можно представить как игру, где участники, это могут быть производители, дистрибьюторы или ритейлеры, делают выбор: закупать, хранить или транспортировать товары. Функция Шпрага-Гранди может помочь оптимизировать решения в условиях ограниченных складских мощностей или транспортных узлов. Функция может указывать на оптимальные моменты для закупки или продажи, минимизируя риски сбоев. Это особенно актуально в условиях глобальных кризисов, таких как пандемии, когда цепочки поставок обрываются.

Также, одним из действительно полезных вариантов применения функции Шпрага-Гранди в экономике, является моделирование конкуренции на рынках с ограниченными ресурсами. Представим рынок как комбинаторную игру, где компании борются за ограниченные ресурсы, например сырье, потребителей, частоты для телекоммуникаций. Функция Шпрага-Гранди может быть использована для определения оптимальных стратегий распределения ресурсов между игроками. Каждое действие фирмы — это ход, а позиция в игре отражает текущее распределение ресурсов. Мы можем применить функцию для анализа асимметричных рынков, где игроки имеют разные стартовые условия, например, крупные корпорации против стартапов. Функция может указывать, какие стратегии ведут к доминированию или выживанию на рынке. Это особенно актуально для рынков с высокой волатильностью, таких как криптовалюты или зеленая энергетика.

Таким образом, на основании вышесказанного, мы можем сделать вывод что использование функции Шпрага-Гранди в экономике может являться полезным, и потому требует дальнейшего изучения.

Список использованных источников:

1. Петросян, Л. А. Теория игр: учебное пособие / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2012. — 304 с.
2. Губин, В. Б. Теория игр: Математические методы анализа результатов / В. Б. Губин. — М.: Физматлит, 2012. — 352 с.

*61-я Научная Конференция Аспирантов, Магистрантов и Студентов БГУИР,
Минск 2025*

3. Воробьёв, Н. Н. Математические методы в экономике и управлении / Н. Н. Воробьёв, А. В. Воробьёв. — М.: Юрайт, 2014. — 416 с.