Применение систем компьютерной математики для исследования симметрических пространств с почти симплектической структурой

Н. П. Можей, email: mozheynatalya@mail.ru

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Аннотация. *Работа посвящена описанию использования систем компьютерной математики для исследования четырехмерных симметрических однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой, рассматривается комплексный случай.*

Ключевые слова: *система компьютерной математики, однородное пространство, почти симплектическая структура, комплексная алгебра Ли.*

Введение

Симплектическая геометрия дает математический аппарат для таких областей физики, как классическая механика, геометрическая оптика, термодинамика и др., симплектическое многообразие – это многообразие с заданной на нем симплектической формой (замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формой), оно позволяет, в частности, естественным геометрическим образом ввести гамильтонову механику и дает наглядное толкование многим ее свойствам, в исследовании симплектических многообразий существенную помощь оказывают пакеты прикладных программ. В данной работе описывается применение систем компьютерной математики для исследования четырехмерных симметрических однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой, рассматривается комплексный случай.

1. Применение систем компьютерной математики

Программное обеспечение и информационные ресурсы, которые могут оказаться полезными при исследовании однородных пространств, довольно разнообразны, это могут быть как специализированные, так и универсальные математические пакеты, а также программы, созданные в какой-то универсальной среде программирования. Система компьютерной математики Maple имеет мощную систему символьных вычислений, что позволяет ее использовать для выполнения достаточно громоздких преобразований математических формул и выражений, с которыми приходится иметь дело при изучении дифференциальной геометрии. Также в Maple есть подгружаемый пакет DifferentialGeometry, содержащиеся там команды и функции ориентированы на геометрию поверхностей, тензорное исчисление, изучение алгебр Ли и др. Для многих математических задач, решаемых по заданному алгоритму, в Maple имеются готовые команды. Maple обладает мощными средствами визуализации вычислений и математических понятий, обеспечивает управляемые пользователем возможности отображения информации на экране, позволяет минимальными средствами создавать свои эффективные программы. Остановимся подробнее на применении Maple для исследования симплектических однородных пространств.

Множество функций Maple реализовано в проблемно-ориентированных пакетах расширения. Информацию о пакетах расширения Maple можно получить, используя команду ?packages. Для нахождения изотропно-точных пар используются пакеты DifferentialGeometry, GroupActions, LieAlgebras, Tensor и другие. Например, чтобы определить алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ применяется пакет DifferentialGeometry. Этот пакет представляет собой набор команд и подпакетов с тесно интегрированными инструментами для вычислений в области исследований на многообразиях (работа с векторными полями, дифференциальными формами и преобразованиями), в области тензорного анализа, вычислений на пространствах джетов, изучения алгебр Ли и групп Ли и их преобразований и др. Алгебры Ли играют существенную роль в дифференциальной геометрии и ее приложениях, пакет LieAlgebras является подпакетом пакета DifferentialGeometry, он содержит, в частности, команды для определения алгебр Ли и создания новых алгебр из существующих, например, DirectSum, Extension, LieAlgebraData, MatrixAlgebras, QuotientAlgebra, SimpleLieAlgebraData, SemiDirectSum и др. Общую структуру алгебры Ли можно исследовать с помощью команд Decompose, Query, Series, Nilradical, Radical и др., а структуру полупростой алгебры Ли – с помощью команд CartanDecomposition, CartanSubalgebra, CartanMatrix, CompactRoots, PositiveRoots, RootSpaceDecomposition, RestrictedRootSpaceDecomposition. Подпакет GroupActions предоставляет базовые возможности для работы с группами Ли, важную геометрическую информацию дают подалгебры изотропии, а также представления в касательном пространстве, их можно рассчитать с помощью этого подпакета. Подпакет Tensor содержит набор команд для работы с тензорами на касательном расслоении многообразия (или на любом векторном расслоении), он дает возможность использования команд для стандартных алгебраических операций над тензорами, для вычисления ковариантного дифференцирования, кривизны и др.

Для того, чтобы задать алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, вводятся ее структурные константы и используется команда DGsetup для инициализации алгебры, то есть для определения базисных элементов алгебры, и для сохранения структурных констант алгебры Ли в памяти. Команда LieAlgebraData, в общем случае, преобразует различные реализации алгебры Ли, например, алгебру векторных полей на многообразии в абстрактную алгебру Ли, ее таблицу умножения можно посмотреть с использованием команды MultiplicationTable. Команда LieAlgebraData находит структурные константы для правоинвариантных векторных полей, совпадающие со структурными константами алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. После инициализации можно проводить любые вычисления и проверки. Для подалгебры $\mathfrak{g}$ указывается базис. Команда LieGroup пакета GroupActions непосредственно строит глобальную группу Ли $\bar{G}$ по заданной алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. С помощью команды LeftMultiplication можно получить явную формулу для левого умножения элементов группы в координатах. Лево- и правоинвариантные векторные поля на $\bar{G}$ вычисляются командой InvariantVectorsAndForms. Фактор группы $\bar{G}$ по подгруппе G является четырехмерным многообразием. Действие группы Ли $\bar{G}$ на многообразии M является композицией проекции, левого умножения (dotLeft) группы $\bar{G}$ на $\bar{G}$ и сечения. Локальное действие $\bar{G}$ на M вычисляется с использованием команды InfinitesimalTransformation. Результат можно проверить, поскольку структурные константы получаемой алгебры Ли векторных полей совпадают со структурными константами алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Единица группы $\bar{G}$ проектируется в точку на многообразии M и позволяет найти стабилизатор (подгруппу G), используя команду IsotropySubalgebra. В дальнейшем будем использовать указанные команды для получения искомой классификации.

2. Описание четырехмерных симметрических однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой

Пусть $(\overline{G},M)$ – четырехмерное однородное пространство и $G=\overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x\in M$. Паре $(\overline{G},G)$ поставим в соответствие пару $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, где $\overline{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$ и $\mathfrak{g}$ – подалгебра в $\overline{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе Ли G. Назовем пару $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эффективной, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит ненулевых идеалов алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$. Проблема классификации однородных пространств $(\overline{G},M)$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\overline{G},G)$. Используя линеаризацию, эту проблему можно свести к классификации эффективных пар алгебр Ли $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ с точностью до эквивалентности пар [1].

Пара $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется изотропно-точной, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. Однородное пространство $\overline{G}/G$ редуктивно, если $\overline{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и a$d(G)$-инвариантного подпространства V, т. е. если $\overline{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+V$, $\mathfrak{g}\bigcap V=0$; a$d(G)V\subset V$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g},V]\subset V$ и наоборот, если G связна. Такое разложение называется каноническим. Если $\overline{G}/G$ редуктивно, то линейное представление изотропии для G всегда точное. Симметрические однородные пространства – частный случай редуктивных однородных пространств. Если $\overline{G}/G$ является симметрическим, то $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g},V]\subset V$ и $[V,V]\subset\mathfrak{g}$.

Пусть $V=\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ – $\mathfrak{g}$-модуль, соответствующий изотропному представлению. Пространство $B(V)$ билинейных форм на V естественным образом становится $\mathfrak{g}$-модулем, если положить $(x.b)(v_1,v_2)=-b(x.v_1,v_2)-b(v_1,x.v_2)$, где $x\in\mathfrak{g}$, $v_1,v_2\in V$, $b\in B(V)$. Почти симплектической структурой на $\mathfrak{g}$-модуле V называется невырожденная, кососимметрическая билинейная форма $b\in B(V)$ такая, что $x.b=0$ для всех $x\in\mathfrak{g}$. Другими словами, $b\in B(V)^{\mathfrak{g}}$. Не ограничивая общности, можно считать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является подалгеброй в линейной алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$.

Решение задачи классификации изотропно-точных пар разбивается на следующие этапы: классификация с точностью до сопряженности всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$, для каждой найденной подалгебры $\mathfrak{g}$ – классификация (с точностью до эквивалентности) изотропно-точных пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, у которых изотропное представление сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}$. В работе [2] приведены подалгебры в $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$, описан алгоритм нахождения почти симплектических изотропно-точных пар, там же даны основные определения и более подробное обоснование применяемых методов. Применяя алгоритм для подалгебр $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ и указанные выше команды пакета Maple, находим соответствующие изотропно-точные почти симплектические однородные пространства. Выбирая из полученных пар симметрические, получаем локальное описание четырехмерных симметрических однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой.

Заключение

Таким образом, приведены специализированные команды и функции пакета Maple, оказывающие существенную помощь в проведении научных исследований по дифференциальной геометрии, в частности, описано их применение для исследования четырехмерных симметрических однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой.

Список литературы

1. Mostow, G. D. The Extensibility of Local Lie Groups of Transformations and Groups on Surfaces / G. D. Mostow // Ann. Math. – 1950. – Vol. 52. No.3. – P. 606–636.
2. Mozhey, N. P. Four-dimensional homogeneous spaces with almost symplectic structure. The complex case / N. P. Mozhey // Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics. – 2021. – Vol. 242. No.1. – P. 13–18.