Геаметрыя

УДК 514.765

Н. П. Можей

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ РЕДУКТИВНЫЕ НЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА С ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Во введении указан объект исследования – редуктивные почти симплектические пространства. Научная новизна работы заключена в изучении и классификации выбранных типов однородных пространств с различными структурами. Рассматриваемые пространства обладают почти симплектической структурой, т.е. невырожденной кососимметрической билинейной формой, не обязательно замкнутой. Одной из важных задач является классификация редуктивных однородных пространств, соответствующих пар алгебр Ли и их изотропных представлений, а также описание почти симплектических структур на данных пространствах. Целью данной работы является изучение четырехмерных редуктивных однородных пространств с почти симплектической структурой и их вещественных форм, выделен класс пространств, которые не являются симметрическими. В данной работе рассмотрен случай, когда стабилизатор неразрешим. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, почти симплектическая структура, антиинволюция, комплексификация пары алгебр Ли, вещественная форма пары алгебр Ли, редуктивное пространство, симметрическое пространство. В основной части работы получена локальная классификация четырехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором, найдены вещественные формы указанных пространств. Отличительной чертой представленных в работе методов является использование чисто алгебраического подхода для описания однородных пространств. В заключении изложены полученные в работе результаты, которые являются новыми и могут найти применение в теории представлений, теории динамических систем, квантовой механике, теоретической и математической физике и других областях науки.

Ключевые слова: группа преобразований, однородное пространство, редуктивное пространство, почти симплектическая структура, вещественная форма алгебры Ли.

Введение. На однородных пространствах можно задать различные инвариантные структуры, например комплексные или симплектические, которые используются в теории струн и других областях физики. Симплектическая структура является естественной геометрической структурой фазовых пространств гамильтоновых систем, симплектическая геометрия играет фундаментальную роль в классической, статистической и квантовой механике. Геометрию почти симплектических многообразий изучали Ли Хуа-чжун [1], П. Либерманн [2], И. Вайсман, В. Г. Лемлейн, Ф. Тондер и др. В данной работе исследован класс однородных пространств аффинной связности с кручением, получивших название редуктивных, у которых при параллельном переносе сохраняется как тензор кривизны, так и тензор кручения, рассмотрена проблема описания четырехмерных редуктивных несимметрических пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и их вещественных форм. Нас будет интересовать случай, когда стабилизатор не является разрешимым.

Пусть $(\overline{G},M)$ – четырехмерное однородное пространство, где $\overline{G}$ – группа Ли на многообразии M, а $G=\overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x\in M$. Пусть далее $\overline{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра $\overline{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе G. Изотропный $\mathfrak{g}$-модуль $\mathfrak{m}$ – это $\mathfrak{g}$-модуль $\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ такой, что $x.(y+\mathfrak{g})=[x,y]+\mathfrak{g}$, а соответствующее представление $\lambda:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ – изотропное представление пары $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Пара $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется изотропно-точной, если ее изотропное представление – инъекция. Проблема классификации однородных пространств $(\overline{G},M)$ равносильна классификации (с точностью

Можей Наталья Павловна, канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. программного обеспечения информационных технологий БГУИР (Беларусь).

Адрес для корреспонденции: ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Беларусь; e-mail: mozheynatalya@mail.ru

до эквивалентности) пар групп Ли $(\overline{G},G)$ таких, что $G\subset\overline{G}$ (см., например, [3]). Используя линеаризацию, эту проблему можно свести к классификации эффективных пар алгебр Ли $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ с точностью до эквивалентности пар [4].

Пространство $B(\mathfrak{m})$ билинейных форм на $\mathfrak{m}$ естественным образом становится $\mathfrak{g}$-модулем, если положить $(x.b)(v_1,v_2)=-b(x.v_1,v_2)-b(v_1,x.v_2)$, где $x\in\mathfrak{g}$, $v_1,v_2\in\mathfrak{m}$, $b\in B(\mathfrak{m})$. Почти симплектической структурой на $\mathfrak{g}$-модуле $\mathfrak{m}$ называется невырожденная кососимметрическая билинейная форма $b\in B(\mathfrak{m})$ такая, что $x.b=0$ для всех $x\in\mathfrak{g}$. Другими словами, $b\in B(\mathfrak{m})^{\mathfrak{g}}$. Не ограничивая общности, можно считать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является подалгеброй в линейной алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$.

Пространство $V^{\mathbb{C}}=V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ называется комплексификацией вещественного векторного пространства V. Если на V задана структура вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то она продолжается до структуры комплексной алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$: $[g_1\otimes z_1, g_2\otimes z_2]=[g_1,g_2]\otimes z_1z_2, g_1,g_2\in\mathfrak{g}, z_1,z_2\in\mathbb{C}$. Алгебра $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ называется комплексификацией алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{a}$ – вещественная подалгебра в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (алгебру над $\mathbb{C}$ можно рассматривать как алгебру над $\mathbb{R}$ вдвое большей размерности). Подалгебра $\mathfrak{a}$ называется вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если $\mathfrak{a}\oplus i\mathfrak{a}=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}\cap i\mathfrak{a}=0$ (тогда $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}$). Сопряжением относительно $\mathfrak{a}$ называется отображение $\sigma:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, $\sigma(x+iy)=x-iy$ $\forall x,y\in\mathfrak{a}$, отображение называется антиинволюцией, если оно обладает следующими свойствами:

$$\sigma^2=id_{\mathfrak{g}}, [\sigma(x),\sigma(y)]=\sigma([x,y]), \sigma(\lambda x+\mu y)=\overline{\lambda}\sigma(x)+\overline{\mu}\sigma(y) \quad x,y\in\mathfrak{g},\lambda,\mu\in\mathbb{C}.$$

В частности, сопряжение является антиинволюцией. Вещественные формы алгебры Ли – неподвижные точки антиинволюций. Две вещественные формы переводятся друг в друга автоморфизмом тогда и только тогда, когда соответствующие антиинволюции сопряжены, так как если σ – антиинволюция, φ – автоморфизм $\mathfrak{g}$, то $\tilde{\sigma}=\varphi\sigma\varphi^{-1}$ – тоже антиинволюция, причем если $\sigma(\mathfrak{a})=\mathfrak{a}$, то $\tilde{\sigma}(\varphi(\mathfrak{a}))=\varphi(\mathfrak{a})$. Чтобы классифицировать вещественные формы абстрактной алгебры Ли, нужно классифицировать (с точностью до группы автоморфизмов) все антиинволюции.

Пару $(\overline{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}},\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ будем называть комплексификацией пары $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, а пару $(\overline{\mathfrak{a}},\mathfrak{a})$ – вещественной формой пары $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, если $\overline{\mathfrak{a}}$ – вещественная форма алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$, а $\mathfrak{a}$ – вещественная форма подалгебры $\mathfrak{g}$. Множество всех вещественных форм пары $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством таких антиинволюций σ алгебры $\overline{\mathfrak{g}}$, что $\sigma(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$.

Однородное пространство $\overline{G}/G$ редуктивно, если $\overline{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{a}d(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т.е. если $\overline{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}\bigcap\mathfrak{m}=0$; $\mathrm{a}d(G)\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна. Такое разложение называется каноническим. Если $\overline{G}/G$ редуктивно, то линейное представление изотропии для G всегда точное, поэтому для нахождения редуктивных пространств можно ограничиться изотропно-точными парами. Симметрические однородные пространства – частный случай редуктивных однородных пространств. Если $\overline{G}/G$ является симметрическим, то $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$ и $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{g}$. В данной работе нас интересуют пространства, которые являются редуктивными, но не являются симметрическими.

В дальнейшем через $\{e_1,\ldots,e_n\}$ будем обозначать базис $\overline{\mathfrak{g}}$ ($n=\dim\overline{\mathfrak{g}}$). Полагаем, что подалгебра $\mathfrak{g}$ порождается $e_1,\ldots,e_{n-4}$, а $\{u_1=e_{n-3},u_2=e_{n-2},u_3=e_{n-1},u_4=e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Пару $(\overline{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ будем определять таблицей умножения алгебры Ли $\overline{\mathfrak{g}}$. Отношение изоморфизма алгебр является отношением эквивалентности на множестве параметров (при их наличии), данное отношение эквивалентности в дальнейшем указывается после таблицы умножения алгебры Ли. Для ссылки на подалгебры будем использовать следующее обозначение: d.n, где d – размерность подалгебры, а n – ее порядковый номер, соответствующие приведенным в [5].

Основная часть. Проведем классификацию четырехмерных редуктивных несимметрических пар с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и неразрешимой подалгеброй изотропии. Решение задачи классификации таких пар разобьем на следующие этапы: классификация с точностью до сопряженности всех неразрешимых подалгебр $\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$, для каждой найденной подалгебры $\mathfrak{g}$ – классификация (с точностью до эквивалентности) редуктивных несимметрических изотропно-точных пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, у которых изотропное представление сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}$, а для каждой полученной пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ – нахождение всех ее вещественных форм. Алгоритм нахождения изотропно-точных пар с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой подробнее описан в работе [5], там же даны основные определения и приведено обоснование применяемых методов.

В дальнейшем для обозначения подалгебры вида

$$\mathfrak{g}=\left\{\left.\begin{pmatrix} x & 0 & u & 0\\ 0 & y & 0 & 0\\ z & 0 & -x & 0\\ 0 & 0 & 0 & -y\end{pmatrix}\right| x,y,z,u\in\mathbb{C}\right\}$$

будет использоваться запись

$$\boxed{\begin{array}{cccc} x & & u & \\ & y & & \\ z & & -x & \\ & & & -y\end{array}}\,.$$

Теорема. *Любое четырехмерное редуктивное однородное пространство, не являющееся симметрическим, с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой, задаваемое парой* $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ *такой, что* $\mathfrak{g}$ *неразрешима, локально эквивалентно одной и только одной из следующих пар:*

3.11.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_3$	0	u_1	0	0
u_2	0	0	0	$-u_1$	0	$-u_3$	αu_4
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	u_3	0	0
u_4	0	0	0	0	$-\alpha u_4$	0	0

,

3.11.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0	0	u_2
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_4	0	0	0	0	$-u_2$	0	0

,

3.11.4	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0	u_2	0
u_2	0	0	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0
u_4	0	0	0	0	0	0	0

,

3.11.5	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_3$	0	u_1	u_4	0
u_2	0	0	0	$-u_1$	0	$-u_3$	$-u_4$
u_3	u_3	$-u_1$	0	$-u_4$	u_3	0	0
u_4	0	0	0	0	u_4	0	0

,

4.10.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	u_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0	u_3
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-u_1$	0	$-u_3$	0

,

4.10.3	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	γu_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	u_2
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0	γu_3
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-\gamma u_1$	$-u_2$	$-\gamma u_3$	0

,

4.10.4	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	u_2	0
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	$-u_2$	0	0	0
u_4	0	0	$-u_2$	0	0	0	0	0

,

4.10.5	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	u_2	u_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	$2u_2$
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	$-u_2$	0	0	u_3
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-u_1$	$-2u_2$	$-u_3$	0

,

4.10.6 $(\gamma \neq 0)$	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	γu_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	e_3
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0	γu_3
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-\gamma u_1$	$-e_3$	$-\gamma u_3$	0

$, \gamma \sim -\gamma,$

4.10.7	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	γu_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	$\alpha e_3 + u_2$
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0	γu_3
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-\gamma u_1$	$-\alpha e_3 - u_2$	$-\gamma u_3$	0

$, \alpha \neq 0,$

4.10.8	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	u_2+e_3	$u_1/2$
u_2	0	0	0	0	0	0	0	αe_3
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	$-u_2-e_3$	0	0	$u_3/2$
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-u_1/2$	$-\alpha e_3$	$-u_3/2$	0

,

4.10.9	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	$(2\gamma-1)e_3+u_2$	γu_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	$2\gamma(2\gamma-1)e_3+\iota$
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	$-(2\gamma-1)e_3-u_2$	0	0	γu_3
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-\gamma u_1$	$-2\gamma(2\gamma-1)e_3-u_2$	$-\gamma u_3$	0

$, \gamma \neq 1/2,$

6.3.4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-e_2$	$2e_3$	e_4	0	$-2e_6$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	e_2	0	e_4	$2e_5$	0	0	u_2	0	0	$-u_3$
e_3	$-2e_3$	$-e_4$	0	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-2e_5$	0	0	0	e_2	0	0	u_2	u_1
e_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_6	$2e_6$	0	$-e_1$	$-e_2$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	$-u_2$	0	0	0	$-u_3$	0	0	$2\alpha e_5+u_2$	αe_4+u_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$4\alpha e_5+2u_2$
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	0	$-2\alpha e_5-u_2$	0	0	$-\alpha e_2+u_3$
u_4	0	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	$-\alpha e_4-u_1$	$-4\alpha e_5-2u_2$	αe_2-u_3	0

,

6.3.5	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-e_2$	$2e_3$	e_4	0	$-2e_6$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	e_2	0	e_4	$2e_5$	0	0	u_2	0	0	$-u_3$
e_3	$-2e_3$	$-e_4$	0	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-2e_5$	0	0	0	e_2	0	0	u_2	u_1
e_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_6	$2e_6$	0	$-e_1$	$-e_2$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	$-u_2$	0	0	0	$-u_3$	0	0	$-\frac{1}{2}e_5+u_2$	$\frac{3}{2}e_4-u_1$
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	e_5
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	0	$\frac{1}{2}e_5-u_2$	0	0	$-\frac{3}{2}e_2-u_3$
u_4	0	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	$-\frac{3}{2}e_4+u_1$	$-e_5$	$\frac{3}{2}e_2+u_3$	0

,

6.3.6	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-e_2$	$2e_3$	e_4	0	$-2e_6$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	e_2	0	e_4	$2e_5$	0	0	u_2	0	0	$-u_3$
e_3	$-2e_3$	$-e_4$	0	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-2e_5$	0	0	0	e_2	0	0	u_2	u_1
e_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_6	$2e_6$	0	$-e_1$	$-e_2$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	$-u_2$	0	0	0	$-u_3$	0	0	$-\frac{\beta^2}{2}e_5+\beta u_2$	$-S$
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta(\beta-1)e_5+u_2$
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	0	$\frac{\beta^2}{2}e_5-\beta u_2$	0	0	$-P$
u_4	0	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	S	$-\beta(\beta-1)e_5-u_2$	P	0

,

$$\beta\neq 1/2,\quad S=-\left(\frac{3}{4}\beta-\frac{1}{2}\right)\beta e_4-(1-\beta)u_1,\quad P=-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\beta\right)\beta e_2-(1-\beta)u_3.$$

Для доказательства теоремы выбираем из списка подалгебр в $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$, приведенного в работе [5], неразрешимые. Получаем, что любая неразрешимая подалгебра $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ имеет вид

$$\dim\mathfrak{g}=3$$

$$11.\begin{bmatrix} x & & y & \\ & & & \\ z & & -x & \\ & & & \end{bmatrix};\quad 12.\begin{bmatrix} x & & y & \\ & x & & y \\ z & & -x & \\ & z & & -x \end{bmatrix};\quad 13.\begin{bmatrix} 3x & y & & \\ 3z & x & & -2y \\ & & -3x & -3z \\ & -2z & -y & -x \end{bmatrix};$$

$$\dim\mathfrak{g}=4$$

$$4.\begin{bmatrix} x & z & & \\ t & y & & \\ & & -x & -t \\ & & -z & -y \end{bmatrix};\quad 10.\begin{bmatrix} x & & u & \\ & & & w \\ z & & -x & \\ & & & \end{bmatrix};\quad 11.\begin{bmatrix} x & & u & \\ & y & & \\ z & & -x & \\ & & & -y \end{bmatrix};$$

$$\dim\mathfrak{g}=5$$

$$5.\begin{bmatrix} x & & u & \\ & y & & w \\ z & & -x & \\ & & & -y \end{bmatrix};$$

$$\dim\mathfrak{g}=6$$

$$2.\begin{bmatrix} x & & y & \\ & t & & u \\ z & & -x & \\ & v & & -t \end{bmatrix};\quad 3.\begin{bmatrix} x & & u & v \\ t & & v & w \\ s & & -x & -t \\ & & & \end{bmatrix};\quad 4.\begin{bmatrix} x & y & u & v \\ z & -x & v & w \\ & & -x & -z \\ & & -y & x \end{bmatrix};$$

$$\dim\mathfrak{g}=7$$

$$1.\ \boxed{\begin{array}{cccc} x & & u & v \\ t & y & v & w \\ s & & -x & -t \\ & & & -y \end{array}};\quad 2.\ \boxed{\begin{array}{cccc} x & z & u & v \\ t & y & v & w \\ & & -x & -t \\ & & -z & -y \end{array}};$$

$$\dim \mathfrak{g} = 10\,,\ \ \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})\,.$$

Далее находим редуктивные несимметрические пары с заданным изотропным представлением $\mathfrak{g}$. Проиллюстрируем это на примере классификации пар с представлением 4.10. Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ – базис в $\mathfrak{g}$,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ – базис дополнительного пространства U, $\mathfrak{h} = \mathbb{C}e_1$ – нильпотентная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Из того, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ в каноническом разложении (поскольку нас интересуют только редуктивные пары), а также из

$$\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_3 + \mathbb{C}u_2 + \mathbb{C}u_4, \bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}e_2,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}e_4,\ \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_1, \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_3,$$

с учетом тождества Якоби получаем, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	$\alpha(u_2+(2\gamma-\beta)e_3)$	γu_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	$ke_3+\beta u_2$
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	$-\alpha(u_2+(2\gamma-\beta)e_3)$	0	0	γu_3
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-\gamma u_1$	$-ke_3-\beta u_2$	$-\gamma u_3$	0

,

причем $\alpha(2\beta\gamma - 4\gamma^2 + k) = 0$. Рассмотрим следующие случаи:

1° $\alpha = 0$. Если $k = \beta = \gamma = 0$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной и, соответственно, симметрической паре (4.10.1); если $k = \beta = 0, \gamma \neq 0$, то $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 4.10.2; при $\beta = 0, k \neq 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна 4.10.6 (эта пара является несимметрической только при $\gamma \neq 0$); при $\beta \neq 0, k \neq 0$ – эквивалентна 4.10.7, а при $\beta \neq 0, k = 0$ – 4.10.3.

2° $\alpha \neq 0$. Из тождества Якоби следует, что $k = 4\gamma^2 - 2\beta\gamma$. Тогда при $\beta = 2\gamma = 0$ $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 4.10.4, при $\beta = 2\gamma \neq 0$ – паре 4.10.5, при $\beta \neq 2\gamma, \beta \neq 0$ – паре 4.10.9, при $\beta \neq 2\gamma, \beta = 0$ – паре 4.10.8.

Для пар 4.10.2 – 4.10.5 $\dim D\bar{\mathfrak{g}}$ =6 (здесь $D\bar{\mathfrak{g}}$ – коммутант, $Z\bar{\mathfrak{g}}$ – центр алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$), для пар 4.10.6 – 4.10.9 $\dim D\bar{\mathfrak{g}}$ =7. Также у пар 4.10.2 и 4.10.3, 4.10.6 и 4.10.7 $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}}$ =5, у пар 4.10.4 и 4.10.5, 4.10.8 и 4.10.9 $\dim D^2\bar{\mathfrak{g}} = 6$. Далее, рассмотрим матрицы $f(x) = \mathrm{ad}\,|_{Z(D\bar{\mathfrak{g}})}\, x$, поскольку подалгебры $f(\bar{\mathfrak{g}})$ не сопряжены, соответствующие пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ не эквивалентны.

Теперь получим классификацию над полем $\mathbb{R}$. У пары 4.10.6 дополнительно появляется следующая вещественная форма:

$4.10.6'(\gamma \neq 0)$	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	γu_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	$-e_3$
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0	γu_3
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-\gamma u_1$	e_3	$-\gamma u_3$	0

.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Заключение. Таким образом, локально описаны четырехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором, выписаны вещественные формы указанных пространств. Полученные результаты могут найти применение в теории представлений, теории динамических систем, квантовой механике, теоретической и математической физике и других областях науки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lee, Hwa-Chung.* On even-dimensional skew-metric spaces and their group of transformations / Lee Hwa-Chung // American Journal of Mathematics. – 1945. – Vol. 67, No. 2. – P. 321–328.
2. *Libermann, P.* Problèmes d’équivalence et géométrie symplectique / P. Libermann // Astérisque. – 1983. – T. 107–108. – P. 43–68.
3. *Онищик, А. Л.* Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М. : Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.
4. *Mostow, G. D.* The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces / G. D. Mostow // Annals of Mathematics. – 1950. – Vol. 52, No. 3. – P. 606–636.
5. *Можей, Н. П.* Четырехмерные однородные пространства с почти симплектической структурой. Комплексный случай / Н. П. Можей // Труды БГТУ. Серия 3. Физико-математические науки и информатика. – 2021. – № 1 (242). – С. 13–18.

Поступила в редакцию 10.04.2025.

“Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2.
Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control”
Vol. 15, No. 2, 2025, pp. 20–28

Four-dimensional reductive nonsymmetric spaces with almost symplectic structure

N. Mozhey

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (Belarus)
P. Brovki St., 6, 220013, Minsk, Belarus; e-mail: mozheynatalya@mail.ru

Abstract. The introduction specifies the object of study – reductive almost symplectic spaces. The scientific novelty of the work lies in the study and classification of selected types of homogeneous spaces with different structures. The spaces under consideration have an almost symplectic structure, that is, a non-degenerate skew-symmetric bilinear form, not necessarily closed. One of the important tasks is the classification of reductive homogeneous spaces, the corresponding pairs of Lie algebras and their isotropic representations, as well as the description of almost symplectic structures on these spaces. The aim of this paper is to study four-dimensional reductive homogeneous spaces with an almost symplectic structure and their real forms; a class of spaces that are not symmetric is distinguished. In this paper, the case is considered when the stabilizer is unsolvable. The main concepts are defined: isotropically-faithful pair, almost symplectic structure, anti-involution, complexification of a pair of Lie algebras, real form of a pair of Lie algebras, reductive space, symmetric space. In the main part of the work, a local classification of four-dimensional reductive non-symmetric homogeneous spaces with an invariant non-degenerate almost symplectic structure and an insoluble stabilizer is obtained, and real forms of the indicated spaces are found. A distinctive feature of the methods presented in the paper is the use of a purely algebraic approach to describing homogeneous spaces. In the conclusion, the results obtained in the work are presented,

which are new and can find application in representation theory, the theory of dynamical systems, quantum mechanics, theoretical and mathematical physics and other fields of science.

Keywords: group of transformations, homogeneous space, reductive space, almost symplectic structure, real form of Lie algebra.

References

1. Lee Hwa-Chung. On even-dimensional skew-metric spaces and their group of transformations. *American Journal of Mathematics*, 1945, vol. 67, No. 2, pp. 321-328.

2. Libermann P. Equivalence problems and symplectic geometry [*Problèmes d'équivalence et géométrie symplectique*]. *Astérisque*, 1983, vol. 107-108, pp. 43-68.

3. Onishchik A. L. Topology of transitive transformation Lie groups [*Topologiia tranzitivnykh grupp Li preobrazovanii*]. Moscow, 1995, 384 p.

4. Mostow G. D. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces. *Annals of Mathematics*, 1950, vol. 52, No. 3, pp. 606-636.

5. Mozhey N. P. Four-dimensional homogeneous spaces with almost symplectic structure. The complex case [*Chetyrekhmernye odnorodnye prostranstva s pochti simplekticheskoi strukturoi. Kompleksnyi sluchai*]. *Proceedings of BSTU. Issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, No. 1 (242), pp. 13-18.

Вниманию авторов!

В научном журнале

«Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне»

по научному направлению **«математика»**
предлагаются следующие рубрики:

теория чисел, алгебра, топология, геометрия, дифференциальная геометрия, математический анализ, теория функций действительного переменного, теория функций комплексных переменных, обыкновенные дифференциальные уравнения, качественная теория дифференциальных уравнений, аналитическая теория дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения с частными производными, интегральные уравнения, дифференциальные и интегральные уравнения математических моделей естественных наук, вариационное исчисление и математическая теория оптимального управления, функциональный анализ, теория вероятностей, математическая статистика, вычислительная математика.