



Матэматыка

Геаметрыя

УДК 514.765

Н. П. Можей

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФОРМЫ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ С ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ И НЕРАЗРЕШИМЫМ СТАБИЛИЗАТОРОМ

Во введении указан объект исследования – симметрические пространства с почти симплектической структурой. Научная новизна работы заключена в изучении и классификации выбранных типов однородных пространств над полями вещественных и комплексных чисел. Многообразие, снабженное 2-формой, невырожденной в каждой точке, называется почти симплектическим. Симплектическая геометрия дает систематическое и наглядное толкование конструкций дифференциального исчисления, используемых в классической механике. Цель работы – описание четырехмерных симметрических пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и их вещественных форм. Рассмотрены пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований с неразрешимым стабилизатором. В работе определены основные понятия: изотропный модуль, изотропное представление, изотропно-точная пара, эффективная пара, редуктивное пространство, симметрическое пространство, почти симплектическая структура, антиинволюция, комплексификация алгебры Ли, вещественная форма алгебры Ли. В основной части работы получено локальное описание четырехмерных симметрических однородных пространств с почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором, выписаны вещественные формы указанных пространств. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств. В заключении изложены полученные результаты, которые являются новыми и могут найти применение в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, в других разделах математики, а также в таких областях физики, как классическая механика, геометрическая оптика, термодинамика и др.

Ключевые слова: группа преобразований, однородное пространство, симметрическое пространство, почти симплектическая структура, вещественная форма алгебры Ли.

Введение. Если на гладком четномерном многообразии задана невырожденная 2-форма, то эта форма называется почти симплектической структурой, а многообразие в этом случае называется почти симплектическим, соответственно, для замкнутой формы многообразие называют симплектическим. Роль симплектических структур важна для таких областей физики, как классическая механика, геометрическая оптика, термодинамика и др. Предположение о невырожденности тензора структуры связано с уравнениями У. Р. Гамильтона, симплектическая геометрия упрощает формальный аппарат гамильтоновой динамики и вариационного исчисления. Широко известны приложения симплектической геометрии в небесной механике и динамике твердого тела, где фазовые пространства интегрируемых гамильтоновых систем являются симплектическими многообразиями (см., например, [1] и др.). Случай почти симплектических структур также содержателен и интересен во многих отношениях, например, при описании гамильтоновых векторных полей на почти симплектических многообразиях (см., например, [2]).

Можей Наталья Павловна, канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. программного обеспечения информационных технологий БГУИР (Беларусь).

Адрес для корреспонденции: ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Беларусь; e-mail: mozheynatalya@mail.ru

Симметрические римановы пространства впервые исследовал П. А. Широков [3]. Э. Картан показал важность симметрических пространств в теории полупростых групп Ли, им же была получена классификация римановых симметрических пространств и локальная классификация симметрических однородных пространств с простыми компактными основными группами. Найдена также классификация симметрических пространств с простыми некомпактными основными группами [4].

Рассмотрим проблемы классификации четырехмерных симметрических однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и нахождения их вещественных форм. В данной работе ограничимся случаем, когда стабилизатор не является разрешимым.

Пусть $(\bar{G}, M)$ – четырехмерное однородное пространство, где $\bar{G}$ – группа Ли на многообразии M . Зафиксируем произвольную точку $x \in M$ и обозначим через $G = \bar{G}_x$ ее стабилизатор. Поставим в соответствие $(\bar{G}, M)$ пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли, где $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе G . Изотропный $\mathfrak{g}$ -модуль $\mathfrak{m}$ – это $\mathfrak{g}$ -модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ такой, что $x.(y + \mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$. Соответствующее представление $\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ является изотропным представлением пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется изотропно-точной, если ее изотропное представление – инъекция. Назовем пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эффективной, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит ненулевых идеалов алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Проблема классификации однородных пространств $(\bar{G}, M)$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\bar{G}, G)$ таких, что $G \subset \bar{G}$. Используя линеаризацию, эту проблему можно свести к классификации эффективных пар алгебр Ли $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ с точностью до эквивалентности пар [5].

Однородное пространство $\bar{G}/G$ редутивно, если $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $ad(G)$ -инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т.е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $ad(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Симметрические однородные пространства – частный случай редутивных однородных пространств. Если $\bar{G}/G$ является симметрическим, то $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Редутивное однородное пространство всегда допускает инвариантную связность, если же существует хотя бы одна инвариантная связность, то пространство является изотропно-точным.

Пространство $B(\mathfrak{m})$ билинейных форм на $\mathfrak{m}$ естественным образом становится $\mathfrak{g}$ -модулем, если положить $(x.b)(v_1, v_2) = -b(x.v_1, v_2) - b(v_1, x.v_2)$, где $x \in \mathfrak{g}$, $v_1, v_2 \in \mathfrak{m}$, $b \in B(\mathfrak{m})$. Почти симплектической структурой на $\mathfrak{g}$ -модуле $\mathfrak{m}$ называется невырожденная кососимметрическая билинейная форма $b \in B(\mathfrak{m})$ такая, что $x.b = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Другими словами, $b \in B(\mathfrak{m})^{\mathfrak{g}}$. Не ограничивая общности, можно считать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является подалгеброй в линейной алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$.

Пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ назовем тривиальной, если существует подмодуль V $\mathfrak{g}$ -модуля $\bar{\mathfrak{g}}$ такой, что $\bar{\mathfrak{g}} = V \oplus \mathfrak{g}$. Тривиальные пары однозначно определяются подалгебрами $\mathfrak{g}$ (список таких пар приведен в [6]), поэтому достаточно описать только нетривиальные пары. Будем определять пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \dots, e_n\}$ будем обозначать базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Полагаем, что подалгебра $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, \dots, e_{n-4}$, а $\{u_1 = e_{n-3}, u_2 = e_{n-2}, u_3 = e_{n-1}, u_4 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для ссылки на подалгебры будем использовать следующее обозначение: $d.n$, где d – размерность подалгебры, а n – ее порядковый номер, соответствующие приведенным в [6].

Основная часть. Проведем классификацию симметрических пар с почти симплектической структурой и выберем из них нетривиальные. Ограничимся случаем неразрешимой подалгебры изотропии. Всякая симметрическая пара является изотропно-точной. Решение задачи классификации изотропно-точных пар разобьем на следующие этапы: классификация с точностью до сопряженности всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$, для каждой найденной подалгебры $\mathfrak{g}$ – классификация (с точностью до эквивалентности) симметрических пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, у которых изотропное представление сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}$. Алгоритм нахождения почти симплектических изотропно-точных пар подробнее описан в работе [6], там же даны основные

определения и приведено обоснование применяемых методов. Далее по классификации над полем $\mathbb{C}$, можно получить классификацию над полем $\mathbb{R}$. Пространство $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ называется комплексификацией вещественного векторного пространства V . Если на V задана структура вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то она продолжается до структуры комплексной алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$:

$$[g_1 \otimes z_1, g_2 \otimes z_2] = [g_1, g_2] \otimes z_1 z_2, g_1, g_2 \in \mathfrak{g}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Алгебра $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ называется комплексификацией алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{a}$ – вещественная подалгебра в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (алгебру над $\mathbb{C}$ можно рассматривать как алгебру над $\mathbb{R}$ вдвое большей размерности). Подалгебра $\mathfrak{a}$ называется вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если $\mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \cap i\mathfrak{a} = 0$ (тогда $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$). Сопряжением относительно $\mathfrak{a}$ называется отображение $\sigma: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $\sigma(x + iy) = x - iy \quad \forall x, y \in \mathfrak{a}$, отображение называется антиинволюцией, если оно обладает следующими свойствами:

$$\sigma^2 = id_{\mathfrak{g}}, [\sigma(x), \sigma(y)] = \sigma([x, y]), \sigma(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda}\sigma(x) + \bar{\mu}\sigma(y), \quad x, y \in \mathfrak{g}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

В частности, сопряжение является антиинволюцией. Вещественные формы алгебры Ли – неподвижные точки антиинволюций. Действительно, если $\mathfrak{a}$ – вещественная форма, то множество $\{g \mid \sigma(g) = g\}$ есть алгебра $\mathfrak{a}: x + iy = \sigma(x + iy) = x - iy, y = 0, x \in \mathfrak{a}$. Если же σ – антиинволюция, то пусть $P_+(\mathfrak{g})$ – множество неподвижных точек σ , тогда $\mathfrak{g} = P_+(\mathfrak{g}) \oplus P_-(\mathfrak{g})$, где $P_{\pm} = \frac{1 \pm \sigma}{2}, P^2 = P$.

Две вещественные формы переводятся друг в друга автоморфизмом тогда и только тогда, когда соответствующие антиинволюции сопряжены, так как если σ – антиинволюция, φ – автоморфизм $\mathfrak{g}$, то $\tilde{\sigma} = \varphi\sigma\varphi^{-1}$ – тоже антиинволюция, причем если $\sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, то $\tilde{\sigma}(\varphi(\mathfrak{a})) = \varphi(\mathfrak{a})$. Чтобы классифицировать вещественные формы абстрактной алгебры Ли, нужно классифицировать (с точностью до группы автоморфизмов) все антиинволюции.

Пару $(\bar{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ будем называть комплексификацией пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, а пару $(\bar{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a})$ – вещественной формой пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, если $\bar{\mathfrak{a}}$ – вещественная форма алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, а $\mathfrak{a}$ – вещественная форма подалгебры $\mathfrak{g}$. Множество всех вещественных форм пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством таких антиинволюций σ алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, что $\sigma(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

В дальнейшем для обозначения подалгебры вида

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & u & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ z & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{pmatrix} \mid x, y, z, u \in \mathbb{C} \right\} \text{ будем использовать запись } \begin{bmatrix} x & & u & \\ & y & & \\ z & & -x & \\ & & & -y \end{bmatrix}.$$

Вернемся к классификации изотропно-точных пар. Любая неразрешимая подалгебра $\mathfrak{g}$ в алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$ сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:

$$\dim \mathfrak{g} = 3$$

$$11. \begin{bmatrix} x & & y & \\ & & & \\ z & & -x & \end{bmatrix}; \quad 12. \begin{bmatrix} x & & y & \\ & x & & \\ z & & -x & \\ & & & -x \end{bmatrix}; \quad 13. \begin{bmatrix} 3x & y & & \\ 3z & x & & -2y \\ & & -3x & -3z \\ & -2z & -y & -x \end{bmatrix};$$

$$\begin{array}{c}
\dim \mathfrak{g} = 4 \\
4. \begin{array}{|c|c|} \hline x & z \\ \hline t & y \\ \hline & -x & -t \\ & -z & -y \\ \hline \end{array}; \quad 10. \begin{array}{|c|c|} \hline x & u \\ \hline & w \\ \hline z & -x \\ \hline \end{array}; \quad 11. \begin{array}{|c|c|} \hline x & u \\ \hline & y \\ \hline z & -x \\ \hline & -y \\ \hline \end{array}; \\
\dim \mathfrak{g} = 5 & \dim \mathfrak{g} = 6 \\
5. \begin{array}{|c|c|} \hline x & u \\ \hline & y & w \\ \hline z & -x \\ \hline & -y \\ \hline \end{array}; \quad 2. \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline & t & u \\ \hline z & -x \\ \hline & v & -t \\ \hline \end{array}; \quad 3. \begin{array}{|c|c|} \hline x & u & v \\ \hline t & v & w \\ \hline s & -x & -t \\ \hline \end{array}; \quad 4. \begin{array}{|c|c|} \hline x & y & u & v \\ \hline z & -x & v & w \\ \hline & & -x & -z \\ \hline & & -y & x \\ \hline \end{array}; \\
\dim \mathfrak{g} = 7 & \dim \mathfrak{g} = 10 \\
1. \begin{array}{|c|c|} \hline x & u & v \\ \hline t & y & v & w \\ \hline s & & -x & -t \\ \hline & & & -y \\ \hline \end{array}; \quad 2. \begin{array}{|c|c|} \hline x & z & u & v \\ \hline t & y & v & w \\ \hline & & -x & -t \\ \hline & & -z & -y \\ \hline \end{array}; \quad 1. \begin{array}{|c|c|} \hline x & y & u & w \\ \hline z & t & w & v \\ \hline s & p & -x & -z \\ \hline p & r & -y & -t \\ \hline \end{array} = \mathfrak{sp}(4, \mathbb{C}).
\end{array}$$

Указанный результат непосредственно следует из работы [6], поскольку там приведены все подалгебры в $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$, достаточно выбрать из них неразрешимые.

Посмотрим, как связаны между собой классификации в вещественном и комплексном случаях. Можно классифицировать линейные алгебры Ли над полем $\mathbb{R}$, используя классификацию над полем $\mathbb{C}$. Основная идея способа – нахождение всех вещественных форм комплексной линейной алгебры Ли.

Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ – вещественная линейная алгебра Ли, V – вещественное векторное пространство. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ может быть естественным образом рассмотрена как алгебра Ли эндоморфизмов комплексного векторного пространства $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$:

$$(\alpha \otimes \alpha).(\nu \otimes \beta) = (\alpha.\nu) \otimes (\alpha\beta), \alpha, \beta \in \mathfrak{g}, \nu \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Полученную линейную алгебру $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}(V^{\mathbb{C}})$, будем называть комплексификацией линейной алгебры Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$. И наоборот, пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(W)$ – комплексная линейная алгебра Ли, W – комплексное векторное пространство. Вещественной формой линейной алгебры Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(W)$ называется пара $(\mathfrak{g}, V)$, где $\mathfrak{g}$ – вещественная форма алгебры Ли $\mathfrak{h}$, V – вещественная форма пространства W , причем $\mathfrak{g}(V) \subset V$. В этом случае $\mathfrak{g}$ может быть рассмотрена как подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, т.е. как вещественная линейная алгебра Ли, действующая на вещественном векторном пространстве V , ведь если $x.V = \{0\}$ для некоторого $x \in \mathfrak{g}$, то $x.(iV) = i(x.V) = \{0\}$, следовательно, $x.W = \{0\}$ и $x = 0$. Множество всех вещественных форм линейной алгебры Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(W)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством таких антиинволюций σ пространства W , что $\sigma \circ \mathfrak{h} \circ \sigma = \mathfrak{h}$. Действительно, пусть σ – такая антиинволюция, что $\sigma \circ \mathfrak{h} \circ \sigma = \mathfrak{h}$, и $\tilde{\sigma} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ – антиинволюция алгебры Ли $\mathfrak{h}$, определенная как $\tilde{\sigma}(y) = \sigma \circ y \circ \sigma$. Тогда, как нетрудно проверить, пара $(\mathfrak{h}^{\tilde{\sigma}}, W^{\sigma})$ является вещественной формой линейной алгебры Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(W)$ и σ – антиинволюция пространства W , соответствующая вещественной форме V , $\sigma : v_1 + iv_2 \mapsto v_1 - iv_2, v_1, v_2 \in V$. Соответственно, для любого элемента $y \in \mathfrak{h}$, однозначно представимого в виде $y = x_1 + ix_2, x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$, имеем

$$\begin{aligned}
\sigma \circ (x_1 + ix_2) \circ \sigma.(v_1 + iv_2) &= \sigma \circ (x_1 + ix_2).(v_1 - iv_2) = \sigma.((x_1.v_1 + x_2.v_2) - \\
&- i(x_1.v_2 - x_2.v_1)) = (x_1.v_1 + x_2.v_2) + i(x_1.v_2 - x_2.v_1) = (x_1 - ix_2).(v_1 + iv_2)
\end{aligned}$$

для любых $v_1, v_2 \in V$. То есть $\sigma \circ (x_1 + ix_2) \circ \sigma = x_1 - ix_2$ и отображение $\bar{\sigma}: y \mapsto \sigma \circ y \circ \sigma$ ($y \in \mathfrak{h}$) является антиинволюцией алгебры Ли $\mathfrak{h}$, соответствующей вещественной форме $\mathfrak{g}$.

В качестве примера проведем классификацию вещественных форм линейной алгебры Ли типа 4.11. Каждая антиинволюция σ векторного пространства $\mathbb{C}^4$ порождается матрицей $A: \sigma_A: v \mapsto A\bar{v}$, $A\bar{A} = E$. Соответственно, $\bar{\sigma}_A: \mathfrak{gl}(4, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, $X \mapsto A\bar{X}A$, $A\bar{A} = E$. Требование $\bar{\sigma}_A(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ дает ограничение на вид матрицы A .

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k \mid abcd \neq 0, k \in \{0, 1\}, A\bar{A} = E \right\}.$$

Классифицируем все такие A (соответственно σ_A) с точностью до группы автоморфизмов. Если $f \cdot \sigma = f \circ \sigma \circ f^{-1}$, $f \in A(\mathfrak{g})$, то $f \cdot \sigma$ и σ сопряжены. В матрицах это имеет вид: $A \mapsto FA\bar{F}^{-1}$. Условие $f \in A(\mathfrak{g})$ в нашем случае дает

$$f \in \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k \mid pqrs \neq 0, k \in \{0, 1\} \right\}.$$

Рассмотрим случаи, несопряженные относительно $A(\mathfrak{g})$: $k=0$ и $k=1$. Если $k=0$, то $a\bar{a}=1, b\bar{b}=1, c\bar{c}=1, d\bar{d}=1$. Автоморфизм переводит $a \mapsto pa\bar{p}^{-1}$, $b \mapsto qb\bar{q}^{-1}$, $c \mapsto rc\bar{r}^{-1}$, $d \mapsto sd\bar{s}^{-1}$, F можно выбрать так, чтобы $pa\bar{p}^{-1}, qb\bar{q}^{-1}, rc\bar{r}^{-1}, sd\bar{s}^{-1}$ стали единицами. Тогда $A = E$ и $V^{\sigma_A} = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$,

$$\mathfrak{g}^{\sigma_A} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & u & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ z & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{pmatrix} \mid x, y, z, u \in \mathbb{C} \right\}.$$

Если $k=1$, то аналогично F можно выбрать так, чтобы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что

$$\mathfrak{g}^{\sigma_A} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ z & 0 & -x & 0 \\ 0 & -y & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z, u \in \mathbb{C} \right\}.$$

Таким образом, любая вещественная форма алгебры Ли типа 4.11 сопряжена одной и только одной из следующих линейных алгебр Ли:

$$4.11 \quad \begin{pmatrix} x & & & u \\ & y & & \\ z & & -x & \\ & & & -y \end{pmatrix}; 4.11' \quad \begin{pmatrix} x & & & u \\ & & & y \\ z & & -x & \\ & & & -y \end{pmatrix}.$$

Проведем теперь классификацию пар с заданным изотропным представлением. Любая пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 4.11 над полем $\mathbb{C}$ эквивалентна одной и только одной из следующих:

4.11.1	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
e_3	$-2e_3$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$2e_4$	0	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0	0	0
u_3	u_3	0	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0	0	0

4.11.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
e_3	$-2e_3$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$2e_4$	0	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0	0	e_2
u_3	u_3	0	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	$-e_2$	0	0

Действительно, пусть $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ – базис в $\mathfrak{g}$,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ – базис дополнительного пространства U . Пусть $\mathfrak{h} = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2$ – нильпотентная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Из того, что

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h}) &= \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2, \bar{\mathfrak{g}}^{(2,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}e_3, \bar{\mathfrak{g}}^{(-2,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}e_4, \\ \bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h}) &= \mathbb{C}u_1, \bar{\mathfrak{g}}^{(0,1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_2, \bar{\mathfrak{g}}^{(-1,0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_3, \bar{\mathfrak{g}}^{(0,-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}u_4, \end{aligned}$$

следует

$$[u_1, u_2] = [u_2, u_3] = [u_1, u_4] = [u_3, u_4] = 0, [u_1, u_3] = b_1 e_1 + b_2 e_2, [u_2, u_4] = f_1 e_1 + f_2 e_2.$$

Проверяя тождества Якоби на векторах e_i, u_j, u_k ($1 \leq i \leq 4, 1 \leq j < k \leq 4$) и u_i, u_j, u_k ($1 \leq i < j < k \leq 4$), получаем, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
e_3	$-2e_3$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$2e_4$	0	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0	0	$f_2 e_2$
u_3	u_3	0	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	$-f_2 e_2$	0	0

Рассмотрим следующие случаи:

1° $f_2 = 0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре 4.11.1.

2° $f_2 \neq 0$. Тогда пара эквивалентна паре 4.11.2 при помощи отображения $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_2 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ такого, что $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(e_2) = e_2$, $\pi(e_3) = e_3$, $\pi(e_4) = e_4$, $\pi(u_1) = \frac{1}{f_2}u_1$, $\pi(u_2) = \frac{1}{f_2}u_2$, $\pi(u_3) = u_3$, $\pi(u_4) = u_4$.

Так как $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_2$, пары 4.11.1 и 4.11.2 не эквивалентны. Пара 4.11.1 является тривиальной, а 4.11.2 – нетривиальной симметрической.

Найдем вещественные формы полученных пар. Для пары 4.11.1 дополнительно появляется вещественная форма

4.11.1'	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	0	0	u_4	0	$-u_2$
e_3	$-2e_3$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$2e_4$	0	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_4$	0	0	0	0	0	0
u_3	u_3	0	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_4	0	u_2	0	0	0	0	0	0

В случае 4.11.2 дополнительно появляются следующие вещественные формы:

4.11.2'	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	0	0	u_4	0	$-u_2$
e_3	$-2e_3$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$2e_4$	0	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_4$	0	0	0	0	0	$2e_2$
u_3	u_3	0	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_4	0	u_2	0	0	0	$-2e_2$	0	0

4.11.2''	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	0	0	u_4	0	$-u_2$
e_3	$-2e_3$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$2e_4$	0	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_4$	0	0	0	0	0	$-2e_2$
u_3	u_3	0	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_4	0	u_2	0	0	0	$2e_2$	0	0

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Все тривиальные симметрические пары однозначно определяются подалгебрами $\mathfrak{g}$, список которых приведен ранее. Окончательный результат классификации нетривиальных симметрических пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ представлен в следующей теореме.

Теорема 1. Любое нетривиальное четырехмерное симметрическое однородное пространство над полем $\mathbb{C}$ с инвариантной невырожденной почти симплектической

структурой, задаваемое парой $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ такой, что $\mathfrak{g}$ неразрешима, локально эквивалентно одной и только одной из следующих пар:

4.4.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	e_3	$-e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	$-e_3$	e_4	0	u_2	0	$-u_4$
e_3	$-e_3$	e_3	0	$e_1 - e_2$	0	u_1	$-u_4$	0
e_4	e_4	$-e_4$	$-e_1 + e_2$	0	u_2	0	0	$-u_3$
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_2$	0	0	$2e_1 + e_2$	e_3
u_2	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	e_4	$e_1 + 2e_2$
u_3	u_3	0	u_4	0	$-2e_1 - e_2$	$-e_4$	0	0
u_4	0	u_4	0	u_3	$-e_3$	$-e_1 - 2e_2$	0	0

4.10.6	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0	0	0	e_3
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_4	0	0	$-u_2$	0	0	$-e_3$	0	0

4.11.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
e_3	$-2e_3$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$2e_4$	0	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0	0	e_2
u_3	u_3	0	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	$-e_2$	0	0

6.3.3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-e_2$	$2e_3$	e_4	0	$-2e_6$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	e_2	0	e_4	$2e_5$	0	0	u_2	0	0	$-u_3$
e_3	$-2e_3$	$-e_4$	0	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-2e_5$	0	0	0	e_2	0	0	u_2	u_1
e_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_6	$2e_6$	0	$-e_1$	$-e_2$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	$-u_2$	0	0	0	$-u_3$	0	0	$2e_5$	e_4
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$4e_5$
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	0	$-2e_5$	0	0	$-e_2$
u_4	0	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	$-e_4$	$-4e_5$	e_2	0

При нахождении вещественных форм и, соответственно, классификации пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ над полем $\mathbb{R}$, получаем дополнительно следующие симметрические пары (нумерация со значком «'» поясняет, вещественной формой какой пары является указанная пара):

4.10.6'	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0 ,
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0	0	0	$-e_3$
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_4	0	0	$-u_2$	0	0	e_3	0	0

4.11.2'	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	0	0	u_4	0	$-u_2$
e_3	$-2e_3$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$2e_4$	0	$-e_1$	0	u_3	0	0	0 ,
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	$-u_4$	0	0	0	0	0	$2e_2$
u_3	u_3	0	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_4	0	u_2	0	0	0	$-2e_2$	0	0

4.11.2''	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	0	0	u_4	0	$-u_2$
e_3	$-2e_3$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$2e_4$	0	$-e_1$	0	u_3	0	0	0 ,
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	u_4	0	0	0	0	0	$-2e_2$
u_3	u_3	0	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_4	0	u_2	0	0	0	$2e_2$	0	0

6.3.3'	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-e_2$	$2e_3$	e_4	0	$-2e_6$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	e_2	0	e_4	$2e_5$	0	0	u_2	0	0	$-u_3$
e_3	$-2e_3$	$-e_4$	0	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-2e_5$	0	0	0	e_2	0	0	u_2	u_1
e_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_2 .
e_6	$2e_6$	0	$-e_1$	$-e_2$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	$-u_2$	0	0	0	$-u_3$	0	0	$-2e_5$	$-e_4$
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-4e_5$
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	0	$2e_5$	0	0	e_2
u_4	0	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	e_4	$4e_5$	$-e_2$	0

Заключение. Таким образом, локально описаны четырехмерные симметрические однородные пространства с почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором, найдены их вещественные формы. Полученные результаты могут найти применение в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям,

топологии, в других разделах математики, а также в таких областях физики, как классическая механика, геометрическая оптика, термодинамика и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фоменко, А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения / А. Т. Фоменко. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 413 с.
2. Vaisman, I. Hamiltonian vector fields on almost symplectic manifolds / I. Vaisman // Journal of Mathematical Physics. – 2013. – Vol. 54, issue 9. – Art. 092902. – 11 p.
3. Широков, П. А. Симметрические пространства первого класса / П. А. Широков // Избранные работы по геометрии / П. А. Широков. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1966. – С. 366–383.
4. Картан, Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства : сб. ст. / Э. Картан ; пер. с фр. Б. А. Розенфельда ; под. ред. и с примеч. П. К. Рашевского. – М. : Изд-во иностр. лит., 1949. – 384 с.
5. Mostow, G. D. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces / G. D. Mostow // Annals of Mathematics. – 1950. – Vol. 52, No. 3. – P. 606–636.
6. Можей, Н. П. Четырехмерные однородные пространства с почти симплектической структурой. Комплексный случай / Н. П. Можей // Труды БГТУ. Серия 3. Физико-математические науки и информатика. – 2021. – № 1 (242). – С. 15–21.

Поступила в редакцию 08.09.2025.

"Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2.
Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control"
Vol. 15, No. 3, 2025, pp.6–16
© Yanka Kupala State University of Grodno, 2025

Real forms of four-dimensional symmetric spaces with almost symplectic structure and an unsolvable stabilizer

N. Mozhey

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (Belarus)
P. Brovki St., 6, 220013, Minsk, Belarus; e-mail: mozheynatalya@mail.ru

Abstract. The introduction specifies the object of study – symmetric spaces with almost symplectic structure. The scientific novelty of the work lies in the study and classification of the distinguished types of homogeneous spaces over the fields of real and complex numbers. A manifold equipped with a 2-form non-degenerate at each point is called almost symplectic. Symplectic geometry provides a systematic and visual interpretation of the constructions of differential calculus used in classical mechanics. The aim of this paper is to describe four-dimensional symmetric spaces with an invariant non-degenerate almost symplectic structure and their real forms. We consider spaces on which an unsolvable Lie group of transformations with an unsolvable stabilizer acts. The following basic concepts are defined in the work: isotropic module, isotropic representation, isotropically-faithful pair, effective pair, reductive space, symmetric space, almost symplectic structure, antiinvolution, complexification of a Lie algebra, and a real form of a Lie algebra. In the main part of the paper, a local description of four-dimensional symmetric homogeneous spaces with an almost symplectic structure and an insoluble stabilizer is obtained, and the real forms of these spaces are written out. The peculiarity of the methods presented in the work is the use of a purely algebraic approach, as well as a combination of various methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces. In the conclusion, the results obtained in the work are presented, which are new and can find application in works on differential geometry, differential equations, topology, in other sections of mathematics, as well as in such areas of physics as classical mechanics, geometric optics, thermodynamics, etc.

Keywords: group of transformations, homogeneous space, symmetric space, almost symplectic structure, real form of Lie algebra.

References

1. Fomenko A. T. Symplectic geometry. Methods and applications [Simplekticheskaia geometriia. Metody i prilozheniia]. Moscow, 1988, 413 p.
2. Vaisman I. Hamiltonian vector fields on almost symplectic manifolds. *Journal of Mathematical Physics*, 2013, vol. 54, issue 9, art. 092902, 11 p.
3. Shirokov P. A. Symmetric spaces of the first class [Simmetricheskie prostranstva pervogo klassa]. Shirokov P. A. Selected works on geometry [Izbrannye raboty po geometrii]. Kazan, 1966, pp. 366–383.

4. Kartan E. The geometry of Lie groups and symmetric spaces [*Geometriia grupp Li i simmetricheskie prostranstva*] : col. of art. ; transl. from Fr. by B. A. Rosenfeld ; ed. and notes by P. K. Rashevsky. Moscow, 1949, 384 p.

5. Mostow G. D. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces. *Annals of Mathematics*, 1950, vol. 52, No. 3, pp. 606-636.

6. Mozhey N. P. Four-dimensional homogeneous spaces with almost symplectic structure. The complex case [*Chetyrekhmernye odnorodnye prostranstva s pochti simplekticheskoi strukturoi. Kompleksnyi sluchai*]. *Proceedings of BSTU. Issue 3. Physics and Mathematics. Informatics*, 2021, No. 1 (242), pp. 15-21

Вниманию авторов!

В научном журнале

**«Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы.
Серыя 2. Матэматыка. Фізіка.
Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне»**



по научному направлению «математика»
предлагаются следующие рубрики:

теория чисел, алгебра, топология, геометрия, дифференциальная геометрия, математический анализ, теория функций действительного переменного, теория функций комплексных переменных, обыкновенные дифференциальные уравнения, качественная теория дифференциальных уравнений, аналитическая теория дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения с частными производными, интегральные уравнения, дифференциальные и интегральные уравнения математических моделей естественных наук, вариационное исчисление и математическая теория оптимального управления, функциональный анализ, теория вероятностей, математическая статистика, вычислительная математика.