РЕДУКТИВНЫЕ ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Можей Н.П.
БГУИР
+375 (29) 315-43-88, mozheynatalya@mail.ru

В работе проводится локальное описание четырехмерных редуктивных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором. Отличительной чертой используемых методов является применение чисто алгебраического подхода для исследования однородных пространств.

Ключевые слова: группа преобразований, однородное пространство, редуктивное пространство, почти симплектическая структура.

Reductive almost symplectic homogeneous spaces. Mozhey N.P. BSUIR.

The paper presents a local description of four-dimensional reductive homogeneous spaces with an invariant non-degenerate almost symplectic structure and an insoluble stabilizer. A distinctive feature of the methods used is the application of a purely algebraic approach to the study of homogeneous spaces.

Keywords: group of transformations, homogeneous space, reductive space, almost symplectic structure.

Введение

Рассматривается проблема описания четырехмерных редуктивных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и неразрешимым стабилизатором.

Пусть $(\overline{G}, M)$ – четномерное однородное пространство, где $\overline{G}$ – группа Ли на многообразии M, а $G = \overline{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Обозначим через $\bar{\mathfrak{g}}$ алгебру Ли группы $\overline{G}$, а через $\mathfrak{g}$ – подалгебру $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующую подгруппе G. Используя линеаризацию, проблему классификации однородных пространств $(\overline{G}, M)$ можно свести к классификации эффективных пар алгебр Ли $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ с точностью до эквивалентности пар [1].

Изотропный $\mathfrak{g}$-модуль $\mathfrak{m}$ – это $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ такой, что $x.(y+\mathfrak{g})=[x, y]+\mathfrak{g}$, пространство $B(\mathfrak{m})$ билинейных форм на $\mathfrak{m}$ естественным образом становится $\mathfrak{g}$-модулем, если положить $(x.b)(v_1, v_2) = -b(x.v_1, v_2) - b(v_1, x.v_2)$, где $x \in \mathfrak{g}$, $v_1, v_2 \in \mathfrak{m}$, $b \in B(\mathfrak{m})$. Невырожденная кососимметрическая билинейная форма $b \in B(\mathfrak{m})$, такая, что $x.b = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, называется *почти симплектической структурой на* $\mathfrak{g}$*-модуле* $\mathfrak{m}$.

Однородное пространство $\overline{G}/G$ *редуктивно*, если $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $ad(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, такое разложение называется каноническим. Если $\overline{G}/G$ редуктивно, то линейное представление изотропии для G всегда точное, поэтому для нахождения редуктивных пространств можно ограничиться изотропно-точными парами.

Через $\{e_1, \ldots, e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Полагаем, что подалгебра $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, \ldots, e_{n-4}$, а $\{u_1 = e_{n-3}, u_2 = e_{n-2}, u_3 = e_{n-1}, u_4 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$, пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ будем определять таблицей умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$.

Основная часть

Проведем описание четырехмерных редуктивных пар с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и неразрешимой подалгеброй изотропии. Сначала проводится классификация с точностью до сопряженности всех неразрешимых подалгебр $\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$, а для каждой найденной подалгебры $\mathfrak{g}$ – классификация (с точностью до эквивалентности) редуктивных пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, у которых изотропное представление сопряжено подалгебре $\mathfrak{g}$. Алгоритм нахождения таких пар подробнее описан в работе [2], также в ней приведено обоснование применяемых методов.

Теорема. *Любая пара* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$*, такая, что* $\mathfrak{g}$ *неразрешима, локально задающая четырехмерное редуктивное несимметрическое однородное пространство с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой, эквивалентна одной и только одной из следующих пар:*

3.11.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_3$	0	u_1	0	0
u_2	0	0	0	$-u_1$	0	$-u_3$	αu_4
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	u_3	0	0
u_4	0	0	0	0	$-\alpha u_4$	0	0

,

3.11.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0	0	u_2
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_4	0	0	0	0	$-u_2$	0	0

,

3.11.4	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0	u_2	0
u_2	0	0	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0
u_4	0	0	0	0	0	0	0

,

3.11.5	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_3$	0	u_1	u_4	0
u_2	0	0	0	$-u_1$	0	$-u_3$	$-u_4$
u_3	u_3	$-u_1$	0	$-u_4$	u_3	0	0
u_4	0	0	0	0	u_4	0	0

,

4.10.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	u_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0	u_3
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-u_1$	0	$-u_3$	0

,

4.10.3	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	γu_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	u_2
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0	γu_3
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-\gamma u_1$	$-u_2$	$-\gamma u_3$	0

,

4.10.4	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	u_2	0
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	$-u_2$	0	0	0
u_4	0	0	$-u_2$	0	0	0	0	0

,

4.10.5	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	u_2	u_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	$2u_2$
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	$-u_2$	0	0	u_3
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-u_1$	$-2u_2$	$-u_3$	0

,

$4.10.6(\gamma \neq 0)$	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	γu_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	e_3
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0	γu_3
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-\gamma u_1$	$-e_3$	$-\gamma u_3$	0

, γ : $-\gamma$,

4.10.7	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	0	γu_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	$\alpha e_3 - u_2$
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	0	0	0	γu_3
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-\gamma u_1$	$-\alpha e_3 - u_2$	$-\gamma u_3$	0

, $\alpha \neq 0$

,

4.10.8	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	u_2+e_3	$u_1/2$
u_2	0	0	0	0	0	0	0	αe_3
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	$-u_2-e_3$	0	0	$u_3/2$
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-u_1/2$	$-\alpha e_3$	$-u_3/2$	0

,

4.10.9	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$2e_2$	0	$-2e_4$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	$-2e_2$	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_3	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_4	$2e_4$	$-e_1$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	0	0	$-u_3$	0	0	$(2\gamma-1)e_3+u_2$	γu_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	$2\gamma(2\gamma-1)e_3+u_2$
u_3	u_3	$-u_1$	0	0	$-(2\gamma-1)e_3-u_2$	0	0	γu_3
u_4	0	0	$-u_2$	0	$-\gamma u_1$	$-2\gamma(2\gamma-1)e_3-u_2$	$-\gamma u_3$	0

, $\gamma \neq 1/2$,

6.3.4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-e_2$	$2e_3$	e_4	0	$-2e_5$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	e_2	0	e_4	$2e_5$	0	0	u_2	0	0	$-u_3$
e_3	$-2e_3$	$-e_4$	0	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-2e_5$	0	0	0	e_2	0	0	u_2	u_1
e_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_6	$2e_6$	0	$-e_1$	$-e_2$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	$-u_2$	0	0	0	$-u_3$	0	0	$2\alpha e_5+u_2$	αe_4+u_1
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$4\alpha e_5+2u_2$
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	0	$-2\alpha e_5-u_2$	0	0	$-\alpha e_2+u_3$
u_4	0	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	$-\alpha e_4-u_1$	$-4\alpha e_5-2u_2$	αe_2-u_3	0

6.3.5	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-e_2$	$2e_3$	e_4	0	$-2e_6$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	e_2	0	e_4	$2e_5$	0	0	u_2	0	0	$-u_3$
e_3	$-2e_3$	$-e_4$	0	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-2e_5$	0	0	0	e_2	0	0	u_2	u_1
e_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_6	$2e_6$	0	$-e_1$	$-e_2$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	$-u_2$	0	0	0	$-u_3$	0	0	$-\frac{1}{2}e_5+u_2$	$\frac{3}{2}e_4-u_1$
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	e_5
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	0	$\frac{1}{2}e_5-u_2$	0	0	$-\frac{3}{2}e_2-u_3$
u_4	0	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	$-\frac{3}{2}e_4+u_1$	$-e_5$	$\frac{3}{2}e_2+u_3$	0

6.3.6	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	$-e_2$	$2e_3$	e_4	0	$-2e_6$	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	e_2	0	e_4	$2e_5$	0	0	u_2	0	0	$-u_3$
e_3	$-2e_3$	$-e_4$	0	0	0	e_1	0	0	u_1	0
e_4	$-e_4$	$-2e_5$	0	0	0	e_2	0	0	u_2	u_1
e_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	u_2
e_6	$2e_6$	0	$-e_1$	$-e_2$	0	0	u_3	0	0	0
u_1	$-u_1$	$-u_2$	0	0	0	$-u_3$	0	0	$-\frac{\beta^2}{2}e_5+\beta u_2$	$-S$
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\beta(\beta-1)e_5+u_2$
u_3	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	0	$\frac{\beta^2}{2}e_5-\beta u_2$	0	0	$-P$
u_4	0	u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0	S	$-\beta(\beta-1)e_5-u_2$	P	0

,

$$\beta \neq 1/2, \quad S - -\left(\frac{3}{4}\beta-\frac{1}{2}\right)\beta e_4-(1-\beta)u_1, \quad P - -\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\beta\right)\beta e_2-(1-\beta)u_3.$$

Полученные результаты могут найти применение в теории представлений, теории динамических систем, квантовой механике, теоретической физике и других областях науки.

Литература

1. Mostow G. D. The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces / Annals of Mathematics. – 1950. – Vol. 52, No. 3. – P. 606–636
2. Можей Н. П. Четырехмерные однородные пространства с почти симплектической структурой. Комплексный случай / Труды БГТУ. Серия 3. Физико-математические науки и информатика. – 2021. – № 1 (242). – С. 13–18.