

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Н.П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск

Ключевые слова: группа преобразований, однородное пространство, почти симплектическая структура, вещественная форма алгебры Ли.

Дифференциально-геометрические методы играют важную роль при исследовании сложных структур, встречающихся в математике и физике. Среди таких структур особое место занимают симплектические и почти симплектические многообразия, они лежат в основе моделей гамильтоновой механики, теоретической физики, а также современных направлений алгебраической и дифференциальной геометрии. Симплектическая геометрия широко представлена как фундаментальный язык классической механики, а почти симплектические структуры существенно расширяют диапазон возможных моделей, сохраняя ключевые черты, но убирая требование замкнутости формы.

Симплектические структуры позволяют описывать как физические, так и геометрические системы в математической форме, они также служат мостом между

классической и квантовой физикой. Почти симплектическое многообразие – это гладкое многообразие четной размерности, наделённое невырожденной дифференциальной 2-формой, оно часто трактуется как промежуточная структура между общим дифференцируемым многообразием и многообразием со строгой симплектической геометрией. Геометрию почти симплектических многообразий изучали Ли Хуа-чжун, П. Либерманн [1], И. Вайсман, В. Г. Лемлейн, Ф. Тондер и др. Понятие почти симплектической структуры связано и с другими структурами, определяемыми невырожденными дифференциальными формами, например, с почти комплексными многообразиями, где основное различие заключается в свойствах тензора структуры, а также с кэлеровыми многообразиями.

Различия между симплектическими и почти симплектическими структурами связаны и с геометрическими инструментами, применимыми при моделировании. В частности, отсутствие замкнутости в почти симплектической структуре означает, что такие многообразия уже не являются фазовыми пространствами классических гамильтоновых систем в строгом смысле, но могут описывать более общие механические и геометрические ситуации, что приводит к появлению новых инвариантов и вычислительных задач, требующих иных методов моделирования и анализа. Почти симплектические структуры могут быть полезны, например, при моделировании систем с локальными симметриями, где нет глобального сохранения симплектического объёма, но есть устойчивость к некоторым локальным деформациям, что важно для фазовых переходов и моделирования сложных систем в физике.

Математические пакеты, такие как Maple, Mathematica и SageMath, предоставляют средства для исследования многообразий, их тензорных полей и дифференциальных форм, что позволяет значительно облегчить описание и анализ соответствующих пространств. Maple с модулем DifferentialGeometry – один из мощнейших инструментов для работы с дифференцируемыми многообразиями, возможности Maple по моделированию почти симплектических структур включают задание многообразия, выбор базиса, ввод и анализ 2-формы, а также геометрические расчёты, позволяющие строить модели, используемые в физике и механике.

Рассмотрим применение математического моделирования для локального описания четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и нахождения их вещественных форм. Пусть $(\bar{G}, M)$ – четырехмерное однородное пространство, где $\bar{G}$ – группа Ли на многообразии M . Зафиксируем произвольную точку $x \in M$ и обозначим через $G = \bar{G}_x$ ее стабилизатор. Поставим в соответствие $(\bar{G}, M)$ пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли, где $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе G . Изотропный $\mathfrak{g}$ -модуль $\mathfrak{m}$ – это $\mathfrak{g}$ -модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ такой, что $x.(y+\mathfrak{g})=[x, y]+\mathfrak{g}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если ее изотропное представление – инъекция.

Пространство $B(\mathfrak{m})$ билинейных форм на $\mathfrak{m}$ естественным образом становится $\mathfrak{g}$ -модулем, если положить $(x.b)(v_1, v_2) = -b(x.v_1, v_2) - b(v_1, x.v_2)$, где $x \in \mathfrak{g}$, $v_1, v_2 \in \mathfrak{m}$, $b \in B(\mathfrak{m})$. Почти симплектической структурой на $\mathfrak{g}$ -модуле $\mathfrak{m}$ называется невырожденная кососимметрическая билинейная форма $b \in B(\mathfrak{m})$ такая, что $x.b = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Не ограничивая общности, можно считать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является подалгеброй в линейной алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$.

Пространство $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ называется комплексификацией вещественного векторного пространства V . Если на V задана структура вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то она продолжается до структуры комплексной алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$: $[g_1 \otimes z_1, g_2 \otimes z_2] = [g_1, g_2] \otimes z_1 z_2$, $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Алгебра $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ называется

комплексификацией алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\mathfrak{a}$ – вещественная подалгебра в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (алгебру над $\mathbb{C}$ можно рассматривать как алгебру над $\mathbb{R}$ вдвое большей размерности). Подалгебра $\mathfrak{a}$ называется *вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{g}$* , если $\mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{a} \cap i\mathfrak{a} = 0$ (тогда $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}$).

Решение задачи классификации четырехмерных изотропно-точных почти симплектических пар разбивается на следующие этапы: классификация с точностью до сопряженности всех подалгебр $\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$, для каждой подалгебры $\mathfrak{g}$ – классификация (с точностью до эквивалентности) всех пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, у которых изотропное представление сопряжено найденной подалгебре $\mathfrak{g}$. Алгоритм нахождения таких пар подробнее описан в работе [2], там же даны основные определения и приведено обоснование применяемых методов. Далее по классификации над полем $\mathbb{C}$ можно получить классификацию над полем $\mathbb{R}$, это требует нахождения вещественных форм полученных пар.

Результаты работы могут найти применение в теории представлений, теории динамических систем, квантовой механике, теоретической и математической физике и других областях науки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Libermann, P. Problèmes d'équivalence et géométrie symplectique [Text] / P. Libermann // Astérisque. – 1983. – Vol. 107–108. – P. 43–68.

2. Можей, Н.П. Четырехмерные однородные пространства с почти симплектической структурой. Комплексный случай [Текст] / Н.П. Можей // Труды БГТУ. Серия 3. Физико-математические науки и информатика. – 2021. – № 1 (248). – С. 15–21.

Можей Наталья Павловна – кандидат физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры «Программное обеспечение информационных технологий», Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, тел. +375(29)3154388, e-mail: mozheynatalya@mail.ru.