университете и Инженерное образование. 2019. №25. С.82 – 91.

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ И МАГИСТРАНТОВ

М.А. Глецевич[1], **А.П. Шилин**[1]

[1]Белорусский государственный университет,
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь, {gletsevich.marina, a.p.shilin}@gmail.com

Зададим действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, A_k, k = \overline{0, n+2}, n \geqslant 3$, причем $A_0 = A_1 = A_{n+1} = A_{n+2} = 0, A_n = 1, \alpha_1 \neq \alpha_2$. Рассмотрим уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{n} \Big(\big(A_k - (\alpha_1+\alpha_2)A_{k+1} + \alpha_1\alpha_2 A_{k+2}\big)x^2 + \big((\alpha_1+\alpha_2)A_{k+2} - 2A_{k+1}\big)x + 2A_{k+2} \Big) y^{(k)} = f(x). \tag{1}$$

Обозначим $P(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n-2} A_{k+2}\lambda^k$, пусть $P(\alpha_j) \neq 0, j = 1,2$.

Утверждение 1. *Если корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2}$ уравнения $P(\lambda) = 0$ действительные и однократные, то фундаментальную систему решений однородного $(f(x) \equiv 0)$ уравнения (1) образуют функции*

$$e^{\lambda_j x}, j = \overline{1, n-2}; \quad e^{\alpha_j x}\left(x - \frac{P'(\alpha_j)}{P(\alpha_j)}\right), j = 1,2. \tag{2}$$

Доказательство утверждения можно осуществить, например, непосредственной подстановкой функций (2) в уравнение (1).

Утверждение 2. *Если* $f(x) = e^{\beta x} x^3 \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, *где* $\beta \neq \alpha_1, \beta \neq \alpha_2$, *все* $b_j \in \mathbb{R}, b_m \neq 0, m \geqslant 1$, *то уравнение (1) имеет частное решение* y_* *вида* $y_* = e^{\beta x} \sum_{j=0}^{m+1} a_j x^j$, *где все* $a_j \in \mathbb{R}$.

Числа a_j находятся стандартной процедурой метода неопределенных коэффициентов. Для их нахождения будет возникать система $m+4$ уравнений, из которых три окажутся одинаковыми. Из $m+2$ различных уравнений числа a_j, $j = \overline{0, m+1}$, найдутся единственным образом как решение системы линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей.

Пример. Решить уравнение

$$x^2 y''' - \left(9x^2 + 2x\right) y'' + \left(26x^2 + 11x + 2\right) y' - \left(24x^2 + 14x + 4\right) y = e^x x^3 (x+1).$$

Так выглядит уравнение (1) при $n = 3, \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 4, A_2 = -2$; при этом $P(\lambda) = \lambda - 2$. Фундаментальная система решений (2) для однородного уравнения имеет вид

$$e^{2x}, e^{3x}(x-1), e^{4x}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

В согласии с утверждением 2 $y_* = e^x \left(a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right)$. Найдя числа a_0, a_1, a_2 методом неопределенных коэффициентов, получим общее решение

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}(x-1) + C_3 e^{4x}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{e^x}{36}\left(6x^2 + 23x + 23\right).$$

Уравнение (1) можно рекомендовать студентам и магистрантам (в том числе студентам младших курсов), которые изучили тему "Линейные уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами" и хотят попробовать свои силы в научных исследованиях. Это уравнение дает богатые возможности для таких исследований и вместе с тем не требует каких-либо дополнительных знаний сверх программы основного курса дифференциальных уравнений. По способам решения, а также дальнейшим разработкам оно примыкает к уравнениям с постоянными коэффициентами, хотя и содержит переменные коэффициенты специального вида.

Уравнение (1) мы не нашли в известных справочниках по дифференциальным уравнениям. Система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica позволяет отыскать фундаментальную систему решений однородного уравнения (1) с известными числами $\alpha_1, \alpha_2, A_k, k = \overline{0, n+2}$, однако при решении неоднородных уравнений с правой частью, указанной в утверждении 2, дает ответ в громоздком виде, требующем упрощения. Некоторый научный интерес это уравнение может представлять и для специалистов-математиков.