

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДВУХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ХАОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ

Цегельник В. В.

Кафедра высшей математики,

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Минск, Республика Беларусь

E-mail: tsegvv@bsuir.by

Исследован характер возможных подвижных точек решений двух динамических систем, обладающих (при определенных значениях входящих в них постоянных параметров) сложным хаотическим поведением.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] выполнено качественное исследование решений двух динамических систем. Численное моделирование показало, что каждая из рассмотренных систем при определенных значениях входящих в них постоянных параметров обладает сложным хаотическим поведением.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью настоящей работы является исследование характера подвижных точек (т.е. точек, положение которых зависит от начальных условий) решений систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -ax + yz, \quad (1)$$

$$\dot{y} = -bx + zx, \quad (2)$$

$$\dot{z} = z - xy \quad (3)$$

и

$$\dot{x} = p, \quad (4)$$

$$\dot{p} = -x - \alpha(u^2 + v^2)x - \beta p. \quad (5)$$

$$\dot{u} = -(\delta - x^2)v - \frac{\kappa}{2}u + l, \quad (6)$$

$$\dot{v} = (\delta - x^2)u - \frac{\kappa}{2}v. \quad (7)$$

В системах (1)-(3), (4)-(7) a, b и $\alpha, \beta, \delta, \kappa, l$ – произвольные постоянные параметры; x, y, z, p, u, v – функции независимой переменной t .

Система (1)-(3) принадлежит [1] к классу трехмерных диссипативных систем с квадратичной нелинейностью, обладающих кристаллографической точечной симметрией. При определенных значениях $a < 0, b < 0$ в (1)-(3) наблюдаются хаотические аттракторы.

Характерной особенностью системы (4)-(7) с качественной точки зрения является наличие в ней гиперхаоса при определенных значениях параметров, в частности при $l = \frac{1}{2}$ [2].

Гиперхаос – это более сильная форма хаоса, при которой несколько степеней свободы одновременно способствуют экспоненциальному расхождению малых изменений. В [2] гиперхаос рассматривался в контексте резонаторной оптомеханики, в которой свет внутри оптического резонатора взаимодействует с подвешенной колеблющейся массой.

II. АЛГОРИТМ

Для решения поставленной задачи (в предположении, что неизвестные функции, входящие в системы (1)-(3), (4)-(7), являются функциями комплексной переменной t) использован тест Пенлеве [3], представляющий набор условий, необходимых для отсутствия у общего решения системы дифференциальных уравнений подвижных критических особых точек (свойство Пенлеве).

Выводы

1. Применение первого шага теста Пенлеве показывает, что все 3 компоненты решения системы (1)-(3) могут иметь простые подвижные полюсы, в окрестности которых справедливы формальные разложения

$$x = \frac{x_{-1}}{\tau} + x_0 + x_1\tau + \dots, \quad (8)$$

$$y = \frac{y_{-1}}{\tau} + y_0 + y_1\tau + \dots, \quad (9)$$

$$z = \frac{z_{-1}}{\tau} + z_0 + z_1\tau + \dots, \quad (10)$$

где $\tau = t - t_0, t_0$ – произвольное.

Подстановка разложений (8)-(10) в каждое из уравнений системы (1)-(3) и приравнение коэффициентов при наинизшей степени t позволяет установить, что а) $x_{-1} = y_{-1}, z_{-1} = 1$ либо б) $x_{-1} = y_{-1}, z_{-1} = -1$.

Применение второго шага теста Пенлеве позволяет получить резонансное уравнение с корнями $r_1 = -1, r_2 = r_3 = 2$.

Применение третьего шага теста Пенлеве показывает, что для наличия в разложениях (8)-(10) трех произвольных постоянных необходимо, чтобы $a = b$.

Легко проверить, что при $a = b$ система (1)-(3) имеет первый интеграл

$$x^2 - y^2 = C^2 e^{-2at}, \quad (11)$$

где C – произвольная постоянная.

С помощью преобразований

$$x = \frac{C}{2} e^{-at} \left(u + \frac{1}{u} \right), \quad y = \frac{C}{2} e^{-at} \left(u - \frac{1}{u} \right) \quad (12)$$

для определения функции u получим уравнение

$$u\ddot{u} = \dot{u}^2 + u\dot{u} - \frac{C^2}{4} e^{-2at} (u^4 - 1). \quad (13)$$

Поскольку $a \neq 0$, то согласно [4] уравнение (13) не является уравнением Пенлеве-типа.

Теорема 1. Система (1)-(3) в случае $a = b \neq 0$ не является системой Пенлеве-типа.

Теорема 2. Система (1)-(3) в случае $a \neq b$ не проходит тест Пенлеве.

2. Система (4)-(7) в случае $l = 0$ принимает вид

$$\dot{x} = p, \quad (14)$$

$$\dot{p} = -x - \alpha(u^2 + v^2)x - \beta p, \quad (15)$$

$$\dot{u} = -(\delta - x^2)v - \frac{\kappa}{2}u, \quad (16)$$

$$\dot{v} = (\delta - x^2)u - \frac{\kappa}{2}v \quad (17)$$

и имеет первый интеграл

$$u^2 + v^2 = H e^{-\kappa t}, \quad (18)$$

где H – произвольная постоянная.

Второе уравнение системы (14)-(17) с учетом (18) принимает вид

$$\dot{p} = -(1 + \alpha H e^{-\kappa t})x - \beta p.$$

Поскольку $p = \dot{x}$, то относительно x имеет уравнение

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + (1 + \alpha H e^{-\kappa t})x = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19), как линейное, вообще не имеет подвижных особых точек. Кроме того, заменой $e^{-\kappa t} = \rho$ оно сводится к уравнению (1.а) из [5, стр. 401], решения которого в общем случае выражаются через бесселевы функции первого и второго рода, а при $\alpha = 0$ оно интегрируется в элементарных функциях.

Из уравнения (16) следует, что $v = \frac{-\kappa \rho u' + \frac{\kappa}{2}u}{x^2 - \delta}$, где $u' = \frac{du}{d\rho}$. Тогда из (17) находим уравнение для функции u :

$$\kappa^2 \rho^2 u'^2 - \kappa^2 \rho u u' + \left((x^2 - \delta)^2 + \frac{\kappa^2}{4} \right) u^2 - H \rho = 0. \quad (20)$$

Интегрирование уравнения (20) согласно [5, стр. 346] связано с интегрированием уравнения

Абеля, общее решение которого содержит подвижные критические особые точки.

Теорема 3. Система (14)-(17) не является системой Пенлеве, хотя компоненты x, p ее общего решения вообще не имеют подвижных особых точек.

3. Рассмотрим систему (4)-(7) в случае $l \neq 0$. Следуя первому шагу алгоритма теста Пенлеве и подставляя формальные разложения

$$x = \frac{x_{-m}}{\tau^m} + \frac{x_{-m+1}}{\tau^{m-1}} + \dots,$$

$$p = \frac{p_{-n}}{\tau^n} + \frac{p_{-n+1}}{\tau^{n-1}} + \dots,$$

$$u = \frac{u_{-s}}{\tau^s} + \frac{u_{-s+1}}{\tau^{s-1}} + \dots,$$

$$v = \frac{v_{-q}}{\tau^q} + \frac{v_{-q+1}}{\tau^{q-1}} + \dots,$$

где m, n, s, q – неотрицательные целые числа, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, получаем условие $m = \frac{1}{2}, n = \frac{3}{2}, s = q = 1$. Таким образом, справедлива

Теорема 4. Система (4)-(7) в случае $l \neq 0$ не проходит тест Пенлеве.

Замечание. Представляет интерес исследование аналитических свойств решений системы

$$\dot{x} = ac + yz,$$

$$\dot{y} = by + xz,$$

$$\dot{z} = z + xy,$$

в которой, согласно [1], хаотическое поведение невозможно.

III. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никифоров, А. И. Динамический хаос в трехмерной диссипативной системе с группой симметрии D_2 / А. И. Никифоров, Д. С. Рябов, Г. М. Чечин // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2004. – Т. 12, № 6. – С. 28–43.
2. Habol, L. Route to hyperchaos in quadratic optomechanics / L. Habol, I. Shamroni // ArXiv: 2410.11329. – P. 1–10.
3. Грицук, Е. В. К теории нелинейных систем дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2010. – № 3. – С. 25–30.
4. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс // Харьков: ОНТИ, 1939. – 720 с.
5. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке // Москва: Наука, 1971. – 576 с.