МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНХРОНИЗИРОВАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ ЛОРЕНЦА

Шилин Л. Ю., Хаджинова К. А.
Кафедра информационных технологий и управления,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектороники
Минск, Республика Беларусь
E-mail: {leonidchilin, kseniyakhadzhynava}@gmail.com

В статье рассмотрено численное исследование синхронизации двух генераторов Лоренца с и без обратной связи. В работе анализируется механизм и условия достижения устойчивой полной синхронизации, подтвержденные анализом фаз и траекторий системы.

Введение

Изучение синхронизации хаотических систем, таких как генераторы Лоренца, представляет особую актуальность в области нелинейной динамики и современных технологий защищенной коммуникации. Такие системы применяются для генерации хаотических сигналов, используемых в криптографических алгоритмах и системах шифрования, где важна устойчивость и надежность передачи информации [1]. Предыдущие исследования показывают, что наличие обратной связи способствует стабилизации синхронных состояний, что подтверждает потенциал использования таких моделей на практике [2].

Цель работы – провести численные эксперименты по моделированию двух взаимодействующих генераторов Лоренца, реализовать критерии оценки их синхронности и количественно определить роль токовой обратной связи с задержкой в процессе перехода систем к устойчивой синхронизации.

I. Математическая модель

Генератор Лоренца описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma\ (y_1 - x_1) - R(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 = x_1(\rho\ - z_1) - y_1, \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta\ z_1, \\ \dot{x}_2 = \sigma\ (y_2 - x_2) - R(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_2 = x_2(\rho\ - z_2) - y_2, \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2. \end{cases}$$

где параметры $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$ задают хаотический режим динамики [3].

При моделировании взаимодействия вводится параметр сопротивления R обратной связи с задержкой τ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) - R(x_1 - x_2(t-\tau)), \\ \dot{y}_1 = x_1(\rho - z_1) - y_1, \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1, \\ \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) - R(x_2 - x_1(t-\tau)), \\ \dot{y}_2 = x_2(\rho - z_2) - y_2, \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2, \end{cases}$$

Такая модель отражает двунаправленное взаимодействие с учетом временной задержки, влияющей на динамику синхронизации.

II. Методика определения синхронизации

Для оценки синхронности каждого генератора вычисляются его фазовые траектории как угол:

$$\varphi_i(t) = \arctan 2(y_i(t), z_i(t)), \quad i = 1,2.$$

После чего определяется фазовая разность с учётом модуля 2π:

$$\Delta\varphi(t) = \min\left(|\varphi_1 - \varphi_2| \bmod 2\pi,\ 2\pi - |\varphi_1 - \varphi_2| \bmod 2\pi\right).$$

Синхронизация считается устойчивой, если в скользящем окне длиной 2 секунды среднее евклидово расстояние между траекториями и средняя фазовая разница не превышают порогов 1.0 и 0.05 соответственно [4].

Момент полной синхронизации – первый момент во времени, с которого эти условия стабильно выполняются, указывая на согласование генераторов по фазе и амплитуде.

III. Результаты моделирования

Для решения системы использовался классический метод Рунге-Кутта 4 порядка с шагом интегрирования 0.01 секунды [5]. Моделирование проводилось на интервале до 260 секунд. Этот метод обеспечивает высокую точность расчётов и стабильность при моделировании нелинейных хаотических систем с задержкой.

Для наглядного представления моделирования ниже представлены графики аттракторов и фазовых траекторий генераторов как в режиме обратной связи, так и без нее. На рисунках генератор 1 показан оранжевым цветом, а генератор 2 – синим.

На рис. 1 изображены аттракторы генераторов без обратной связи за 40 секунд. Явно проявляется хаотичное поведение систем с отсутствием схожести их траекторий.

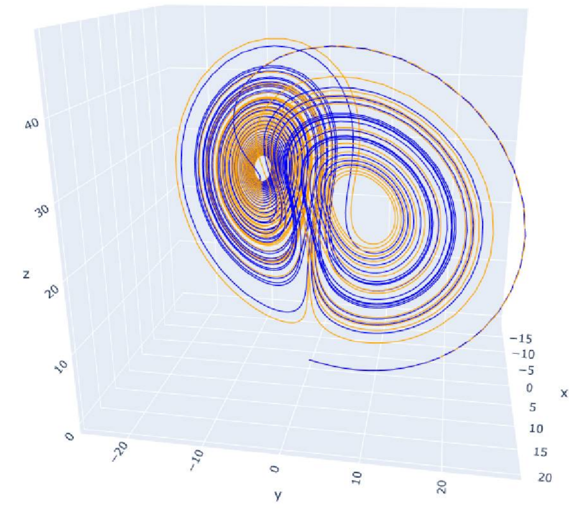

Рис. 1 – Аттракторы без синхронизации

Рис. 2 демонстрирует соответствующие фазовые траектории, где чётко видны значительные расхождения фаз, подтверждающие отсутствие синхронизации в данное время.

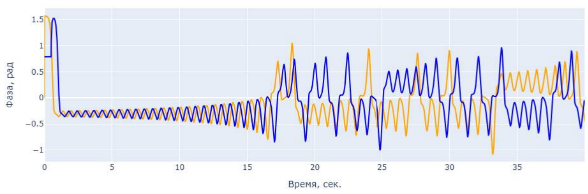

Рис. 2 – Фазовый портрет без синхронизации

Включение обратной связи приводит к принципиально иному поведению систем. На рис. 3 показаны аттракторы за интервал 260 секунд, на которых после 239.9 секунды начинается устойчивое совпадение траекторий, свидетельствующее о полной синхронизации генераторов.

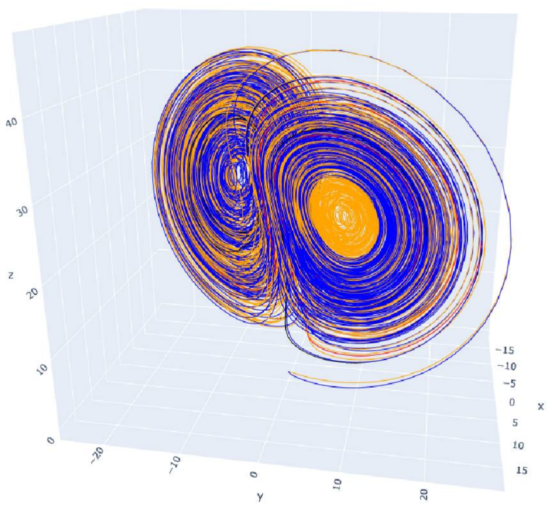

Рис. 3 – Аттракторы с синхронизацией

Рис. 4 иллюстрирует фазовые траектории, указывающие на устойчивое согласование фаз после указанного момента времени.

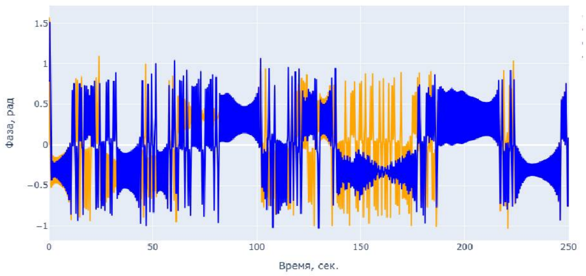

Рис. 4 – Фазовый портрет с синхронизацией

Представленные графики демонстрируют значительную роль обратной связи, обеспечивающей устойчивую синхронизацию генераторов Лоренца и подтверждают возможность практического управления хаотическими системами в целях защищённых коммуникаций [1,5].

Данная модель не учитывает внешние шумы и искажения. Параметр сопротивления R обеспечивает взаимное влияние двух генераторов, способствуя синхронизации.

Заключение

Проведённые исследования подтвердили, что токовая обратная связь с параметрами $R = 1.2$ и задержкой $\tau = 0.5$ обеспечивает устойчивую и полную синхронизацию генераторов Лоренца через примерно 239.(9) секунд. Отсутствие обратной связи приводит к независимой хаотической динамике. Результаты имеют важное значение для применения в системах защищённой связи и криптографии, расширяя возможности использования хаотических систем в управляемых сетях [1,4,5].

1. Шилин, Л. Ю., Навроцкий, А. А. Система шифрования данных на основе устройств фазовой синхронизации // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2024. – № 3(144). – С. 84–89.
2. Хаджинова, К. А., Петруша, А. Д. Исследование хаотического поведения генератора Лоренца / К. А. Хаджинова, А. Д. Петруша // Сборник БГУИР 2025. – 2025.
3. E. N. Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963.
4. A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, 2001.
5. Кузнецов, С. П. Простые электрические генераторы хаоса / С. П. Кузнецов // Система Лоренца. – 2018. – № 1. – С. 46-47.