Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

УДК 621.391

Со Пьае Пьио Паинг

Алгоритмы быстрых спектральных преобразований в базисе функций Уолша

АВТОРЕФЕРАТ
на соискание степени магистра технических наук
по специальности 7–06-0713-03 «Радиосистемы радиотехнологии»
профилизация: «Радиотехника, в том числе системы и устройства радионавигации, радиолокации и телевидения»

____

Со Пьае Пьио Паинг

____

Научный руководитель

Будько Анатолий Антонович

кандидат технических наук, доцент

Минск 2025

ВВЕДЕНИЕ

Известно большое количество систем ортогональных функций. Однако применение той или иной системы ортогональных функций в радиотехнике и в других отраслях науки и техники зависит от ряда причин и в первую очередь от имеющейся элементной базы. Так синусоидальные и косинусоидальные функции и понятия гармонического анализа, введенные Фурье в 1822 году стали широко использоваться с появлением ламп, индуктивностей и конденсаторов. Появление интегральных схем явилось стимулом и обязательным условием использования системы ортогональных функций Уолша, которая была введена американским математиком Дж. Уолшем в 1923 году, хотя и известна и использовалась еще в конце XIX века [4-6].

Кроме элементной базы, обеспечивающей практическое применение определенной системы ортогональных функций, необходимыми условиями является, чтобы эти функции обладали определенными структурными и другими свойствами.

Проведенные к настоящему времени исследования показывают, что функции Уолша позволяют:

- в области телевидения осуществить сжатие передаваемой информации и повысить помехоустойчивость [2 - 7];
- в области электромагнитного излучения уменьшить размеры антенн, упростить передающие устройства и обеспечить высокое отношение сигнал/шум [4-5,10];
- в области радиолокации повысить разрешающую способность, улучшить характеристики обнаружения и идентификации целей [5];
- в области уплотнения каналов связи обеспечить в определенных приложениях преимущества как частотного, так и временного уплотнения [4];
- в области обработки данных ускорить процессы кодирования и декодирования, более удобнее и экономичнее осуществлять накопление и обработку информации [3- 8, 10 - 15];
- в области радиотелефонной связи создать более простые, компактные, дешевые, эффективные и надежные средства связи, а также уменьшить полосу занимаемых частот [3-5, 1-0];
- в системах распознавания быстро и автоматически распознавать различные особенности объектов.

Основным критерием применимости ортогональных систем является простота генерирования и спектральных преобразований. Генераторы функций Уолша используется в системах передачи информации в качестве генераторов сигналов, в цифровых фильтрах, анализаторах и синтезаторах, при непосредственном изучении таких сигналов и т.д. [3].

При разработке генераторов функций Уолша возникают такие противоречивые требования, как простота реализации и быстродействие. Для построения генераторов функций можно использовать определение функций Уолша через функции Радемахера, которые легко генерируются двоичными счетчиками, но поскольку функции не могут генерироваться быстрее, чем счетчик получает приращение, то минимальный интервал аргумента ограничен. Более быстрые схемы генераторов функций Уолша используют регистры сдвига. В таких генераторах полностью используется быстродействие интегральных схем, однако плата за повышение быстродействия чрезмерна высока поскольку для формирования любой функции $W(k,x), 0 < x < 2^n - 1$ предлагалось использовать 2^n разрядный регистр. Используя свойства симметрии функций Уолша и взаимосвязь между одномерными и многомерными функциями можно построит где $n = 2^{n_{r-1}} + 2^{n_{r-2}} + ... 2^{n_0}$ ь программированные и параллельные генераторы, требующие значительно меньших аппаратурных затрат не в ущерб быстродействию.

Интересной особенностью функций Уолша является то, что они имеют в настоящее время четыре системы упорядочения.

Одной из основных операций при обработке информации в базисе функций Уолша является вычисление коэффициентов преобразования. Вычисление коэффициентов преобразования в базисе функций Уолша осуществляется с помощью алгоритмов БПУ и выполняется с помощью вычислительных машин или используя специализированные процессоры БПУ. К настоящему времени известен ряд алгоритмов БПУ. Все эти алгоритмы требуют одно и то же количество операций, а именно $N.\log_2 N$. Особое место занимают так называемые “замечательные” алгоритмы, это алгоритмы типа «бабочка» позволяющие осуществлять вычисления на местах экономя память, алгоритмы имеющее одинаковый вид на каждой итерации и др. Выбор того или иного алгоритма зависит от решаемой задачи, от возможностей практической реализации.

Процессоры БПУ делятся на три типа: параллельные, у которых входные значения сигнала поступают в параллельном виде и значения выходных коэффициентов преобразования также получаются в параллельном виде; последовательные, у которых входные значения сигнала поступают в последовательном виде и значения выходных коэффициентов преобразования также получаются в последовательном виде; последовательно-параллельные, у которых входные значения сигнала поступают в последовательном виде, а значения выходных коэффициентов преобразования получаются в параллельном виде. Для построения процессоров параллельного типа используются алгоритмы БПУ, которые позволяют производить вычисления «на местах», чтобы сократить аппаратурные затраты, однако и в этом случае затраты велики. Существенно меньшие аппаратурные затраты при реализации процессоров БПУ последовательного типа [11-14], однако в этом случае коэффициенты преобразования на выходе процессора получаются в последовательном виде.

Преобразование Уолша осуществляется с помощью быстрых алгоритмов. К настоящему времени имеется определенное количество таких алгоритмов, которые получены в основном используя факторизации матриц Уолша в различных упорядочениях. Существует четыре системы упорядочений: Уолша-

Адамара, Уолша-Пэли, Уолша-Качмажа и Уолша-Трахтмана. Однако свойства, а также вопросы генерирования и преобразования в различных системах упорядочения изучены не в одинаковой степени [2-14].

Все алгоритмы быстрого преобразования Уолша требуют одинаковое количество арифметических операций, однако решение об использовании для конкретного применения того или иного алгоритма принимается на основе сравнения, особое значение имеют так называемые «замечательные» алгоритмы быстрого преобразования Уолша, которые обладают свойствами симметрии, их граф для любой размерности может быть легко получен. Применяемые «замечательные» графы, имеющие симметрию, одинаковые итерации позволяют осуществлять вычисления на местах. Известно, что алгоритмы Кули-Туки и Сэнди не требуют дополнительной памяти, поскольку вычисления осуществляются на местах. В то время алгоритм Кроузера-Радера-Рошфора не позволяет осуществить вычисления на местах и требует дополнительной памяти. Граф быстрого преобразования Уолша (алгоритм Гротера-Рейдера) имеет все одинаковые итерации, что дает определенное преимущество при осуществлении вычислений мгновенного спектра по Уолшу [14].

В магистерской работе исследуется метод получения алгоритмов быстрого преобразования Уолша в различных системах упорядочения, основанный на представлении элементов матриц Уолша в экспоненциальной или показательной форме и мультипликативные итерационные уравнения для преобразования Уолша.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Функции Уолша находят применение в различных областях передачи и обработки цифровой информации. Преобразование Уолша осуществляется с помощью быстрых алгоритмов.

Целью магистерской работы является разработка метода получения алгоритмов быстрых спектральных преобразований в базисе функций Уолша для различных упорядочения функций.

Задачи исследования – разработка метода извлечения алгоритмов быстрых преобразований Уолша (БПУ) и получения новых алгоритмов БПУ.

В главе 1 рассмотрены используемые определения функций Уолша, свойства функций Уолша и взаимосвязь между различными упорядочениями Уолша.

В главе 2 изучены спектры по Уолшу и взаимосвязь одномерного и многомерного преобразований. Данные определения спектров на составных интервалах и мгновенного спектра.

В главе 3 исследованный метод получения алгоритмов БПУ в различных системах упорядочения функций, основанные на преставлении элементов матриц Уолша в экспоненциальной или показательной форме и свойства мультипликативных итерационных уравнений для преобразований Уолша.

Используя разработанный метод извлечения алгоритмов БПУ получены новые «замечательные» алгоритмы в системах упорядочения Уолша-Адамара, Уолша-Пэли, Уолша-Качмажа и Уолша-Трахтмана.

По результатам работы сделано заключение.

Полученные алгоритмы БПУ могут найти практическое применение и на основе разработанного метода могут быть получены и другие «замечательные» алгоритмы БПУ.

Результаты работы были опубликованы в 61-й научной конференции аспирантов, магистрантов и студентов БГУЙР «Информационные радиотехнологии» БГУИР, 2025.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

ГЛАВА 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ УОЛША

Функции Уолша находят применение в различных областях передачи и обработки информации. Однако, несмотря на многочисленные работы математиков и работы, в которых рассматриваются вопросы об инженерном использовании функций Уолша, для более широкого их применения необходимы дополнительные исследования, направленные на изучение свойств этих функций.

Функции Уолша являются кусочнопостоянными функциями с нормированным интервалом определения [0,1) или [-0.5, +0.5) и интервалом изменения аргумента, который зависит от порядка системы функций Уолша и равен $\frac{1}{2^n}$, где n = 1, 2,… . Известны определения функций Уолша через разностное уравнение [14], функции Радемахера, тригонометрические функции и в виде матриц.

Как разностное уравнение функции Уолша определяются следующим выражением

$$\mathrm{W}(2j+p,\theta)=(-1)^{\lfloor j/2\rfloor}\left\{\mathrm{W}\left[j,2\left(\theta+\frac{1}{4}\right)\right]+(-1)^{j+p}\,\mathrm{W}\left[n,2\left(\theta-\frac{1}{4}\right)\right]\right\}, \tag{1.1}$$

где $\lfloor\cdot\rfloor$ – обозначает целую часть числа

p = 0 или 1;

j = 0, 1, 2, ... ;

$\mathrm{W}(0,\theta)=1$ для $-\frac{1}{2}\le\theta<\frac{1}{2}$;

$\mathrm{W}(0,\theta)=0$ для $\theta<-\frac{1}{2}$; $\theta\ge\frac{1}{2}$

$W[0,2(\theta+1/4)]$ и $W[0,2(\theta-1/4)]$ переносят $W(0,2\,\theta)$ влево и вправо на 1/4. После того как $W(1,\theta)$ найдена, функция $W(1,\theta)$ может быть сгенерирована, установив *j*=1, *p*=0. $W(3,\theta)$ …и т.д.

Основным преимуществом определения функций Уолша через разностное уравнение является то, что она дает упорядочение функций по числу смен знака.

Определение функций Уолша через функции Радемахера является более распространенным и удобным. Функции Радемахера на интервале определения [0,1) описываются следующими соотношениями:

$$R(0,\theta)=\begin{cases}1 \text{ при } 0\le\theta<1/2\\ -1 \text{ при } 1/2\le\theta<1\end{cases}, \tag{1.2}$$

Вне интервала [0,1) функции Радемахера повторяются периодически.

Функция Радемахера $R(n,\theta)$ с номером n получается путем сжатия $R(0,\theta)$ в 2^n раз. Функции Уолша через функции Радемахера определяются следующим образом:

$$W(0,\theta) = 1,$$

$$W(n,\theta) = R(n_{r-1},\theta),R(n_{r-2},\theta)...R(n_0,\theta), \tag{1.3}$$

где $n=2^{n_{r-1}}+2^{n_{r-2}}+...2^{n_0}$

Например, для N=8 и n записанного в двоичном коде, получаем:

$$\begin{aligned}
&W(000,\theta)=W(0,\theta)=1,\\
&W(001,\theta)=R(0,\theta),\\
&W(010,\theta)=R(1,\theta),\\
&W(011,\theta)=R(1,\theta)R(0,\theta),\\
&W(100,\theta)=R(2,\theta),\\
&W(101,\theta)=R(2,\theta)R(0,\theta),\\
&W(110,\theta)=R(2,\theta)R(1,\theta),\\
&W(111,\theta)=R(2,\theta)R(1,\theta)R(0,\theta).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Упорядочение функций Уолша может проводиться различными способами. В системе, полученной через разностное уравнение (1.1), функции Уолша упорядочены по числу смен знака функции. Такая система функций Уолша называется системой Уолша-Качмажа. В системе, полученной как произведение функций Радемахера, функции упорядочены в соответствии с двоичным расположением их номеров. Такая система называется системой Уолша-Пэли. Если записать функции Уолша как строки матрицы, то при определенном упорядочении строк получается матрица специального вида матрица Адамара. Матрицы Адамара могут строиться рекуррентно.

ГЛАВА 2
СПЕКТРЫ ПО УОЛШУ

В теории преобразований Уолша в настоящее время установилось следующие понятия спектров. Спектр по Уолшу-это коэффициенты преобразования в той или такой системе упорядочения от последовательности значений входного сигнала. При этом преобразования осуществляются со значениями входного сигнала $0 \div N-1, N \div 2N-1, 2N \div 3N-1,$ и.т.д., т.е. на составных интервалах.

Другое понятие спектра -спектр мощности.

Третье понятие спектр-полный спектр мощности инвариантный к циклическому сдвигу.

Во многих практических приложениях важно производить оценку спектра по Уолшу на скользящем интервале, т.е. осуществлять вычисление коэффициентов преобразования от последовательностей составленных из N значений входного сигнала, получаемых после каждого нового значения входного сигнала. Таким образом осуществляются преобразования по Уолшу от последовательностей составленных, из $0 \div N-1,\ 1 \div N,\ 2 \div N+1,$ и.т.д. значений входного сигнала.

В области гармонических спектров А.А.Харкевичем введена понятие мгновенного спектра, т.е. спектра отражающего свойства процесса в данным момент времени. Это понятие соответствует спектру на скользящем интервале и поэтому такой спектр называется мгновенным спектром по Уолшу.

ГЛАВА 3

Метод извлечения алгоритмов БПУ

Одной из основных операций при обработке информации в базисе функций Уолша является вычисление коэффициентов преобразования. Вычисление коэффициентов преобразования в базисе функций Уолша осуществляется с помощью алгоритмов БПУ. К настоящему времени известен ряд алгоритмов БПУ. Все эти алгоритмы требуют одно и то же количество операций, а именно $N{\cdot}log_2N$. Особое место занимают так называемые “замечательные” алгоритмы, это алгоритмы типа «бабочка» позволяющие осуществлять вычисления на местах экономя память, алгоритмы имеющее одинаковый вид на каждой итерации и др. Выбор того или иного алгоритма зависит от решаемой задачи, от возможностей практической реализации. В базисе функций Уолша используются четыре системы упорядочения функций: Уолша-Адамара, Уолша-Пэли, Уолша-Качмажа и Уолша-Трахтмана. Для каждой системы упорядочения известны выражения в экспоненциальной форме для определения элементов матриц Уолша. На базе этих выражений можно записать мультипликативные итерационные уравнения для преобразований Уолша .

Вычисление коэффициентов преобразования по этим уравнениям может быть выполнен в виде набора итераций.

Благодаря свойствам этого уравнения порядок выполнения итераций при вычислении коэффициентов преобразования может быть различным произвольным, а это позволяет получать различные алгоритмы БПУ, в том числе ‘замечательные”.

Для упорядочения Уолша-Адамара элементы матрицы Уолша представляются в виде:

$$\mathrm{h}_{ij} = \prod_{k=1}^{n}(-1)^{i_k j_k} = (-1)^{\sum_{k=1}^{n} i_k j_k} \tag{3.1}$$

где i_k, j_k – разряды в двоичных представлениях чисел i, j соответственно.

Итерационное уравнение для определения коэффициентов преобразования в общем виде запишется как:

$$\overline{Y}(i_n,...,i_2,i_1) = \sum_{i_n=0}^{1}(-1)^{i_n j_n}...\sum_{i_2=0}^{1}(-1)^{i_2 j_2},\sum_{i_1=0}^{1}(-1)^{i_1 j_1}\overline{y}(j_n,...,j_2,j_1) \tag{3.2}$$

Вычисление коэффициентов преобразования выполняются в виде последовательности итераций. На первой итерации вычисляются компоненты вектора $\bar{y}_1$по соотношению.

$$\overline{y_1}(i_1\,, j_n \dots j_2) = \sum_{j_1=0}^{1}(-1)^{i_1 j_1}\,\bar{y}\big(j_n\,, \dots, j_2, j_0\big) \tag{3.3}$$

На второй итерации компоненты вектора $\bar{y}_2$.

$$\overline{y_2}\big(i_2\,, i_1 j_n \dots j_3\big) = \sum_{j_2=0}^{1}(-1)^{i_2 j_2}\,\bar{y}\big(i_1\,, j_n\,, \dots, j_2\big) \tag{3.4}$$

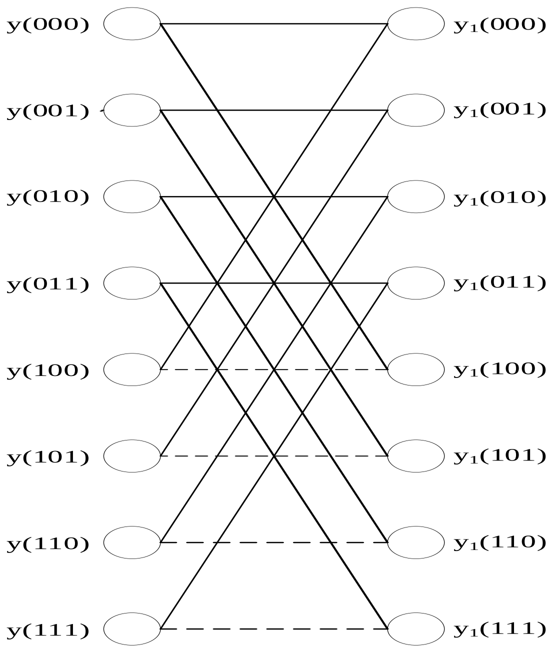
После выполнения и итераций получается вектор коэффициентов преобразования. Последовательность выполнения итераций может быть различным что приводит к различным алгоритмом БПУ. Посмотрим случай для N=8(n=3).

$$\bar{Y}(i_3\,, i_2, i_1) = \sum_{j_1=0}^{1}(-1)^{i_1 j_1}\sum_{j_2=0}^{1}(-1)^{i_2 j_2}\sum_{j_3=0}^{1}(-1)^{i_3 j_3}\,\bar{y}(j_3\, j_2 j_1) \tag{3.5}$$

На первой итерации вычисляем компоненты вектора y_1 по формуле.

$$\overline{y_1}(i_3\, j_2 j_1) = \sum_{j_3=0}^{1}(-1)^{i_3 j_3}\,\bar{y}(j_3\, j_2 j_1) \tag{3.6}$$

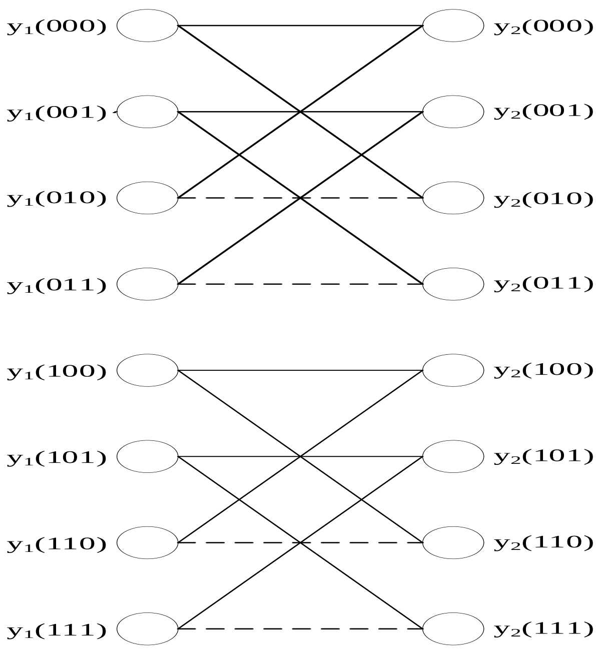
$y_1(000) = (-1)^{0.0}y(000) + (-1)^{0.1}y(100);$
$y_1(001) = (-1)^{0.0}y(001) + (-1)^{0.1}y(101);$
$y_1(010) = (-1)^{0.0}y(010) + (-1)^{0.1}y(110);$
$y_1(011) = (-1)^{0.0}y(011) + (-1)^{0.1}y(111);$
$y_1(100) = (-1)^{1.0}y(000) + (-1)^{1.1}y(100);$
$y_1(101) = (-1)^{1.0}y(001) + (-1)^{1.1}y(101);$
$y_1(110) = (-1)^{1.0}y(010) + (-1)^{1.1}y(110);$
$y_1(111) = (-1)^{1.0}y(011) + (-1)^{1.1}y(111);$



На второй итерации вычисляем компоненты вектора y_2 по формуле.

$$\overline{y_2}(i_3\, i_2 j_1) = \sum_{j_2=0}^{1}(-1)^{i_2 j_2}\, \bar{y}(i_3\, j_2 j_1) \quad (3.7)$$

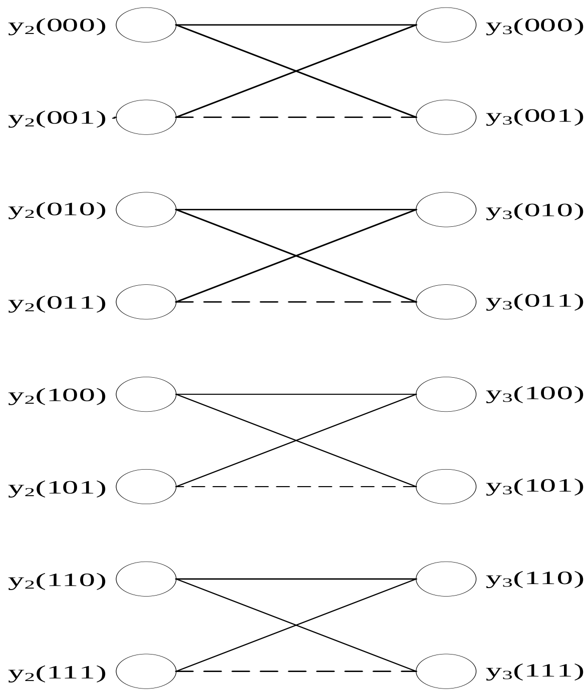
$y_2(000) = (-1)^{0.0}y_1(000) + (-1)^{0.1}y_1(010);$
$y_2(001) = (-1)^{0.0}y_1(001) + (-1)^{0.1}y_1(011);$
$y_2(010) = (-1)^{1.0}y_1(000) + (-1)^{1.1}y_1(010);$
$y_2(011) = (-1)^{1.0}y_1(001) + (-1)^{1.1}y_1(011);$
$y_2(100) = (-1)^{0.0}y_1(100) + (-1)^{0.1}y_1(110);$
$y_2(101) = (-1)^{0.0}y_1(101) + (-1)^{0.1}y_1(111);$
$y_2(110) = (-1)^{1.0}y_1(100) + (-1)^{1.1}y_1(110);$
$y_2(111) = (-1)^{1.0}y_1(101) + (-1)^{1.1}y_1(111);$



На третьей итерации вычисляем компоненты вектора $y_3 = \bar{Y}$ по формуле.

$$\overline{y_3}(i_3\, i_2 i_1) = \sum_{j_1=0}^{1}(-1)^{i_1 j_1}\, \bar{y}(i_3\, i_2 j_1) \tag{3.8}$$

$y_3(000) = (-1)^{0.0} y_2(000) + (-1)^{0.1} y_2(001);$
$y_3(001) = (-1)^{1.0} y_2(000) + (-1)^{1.1} y_2(001);$
$y_3(010) = (-1)^{0.0} y_2(010) + (-1)^{0.1} y_2(011);$
$y_3(011) = (-1)^{1.0} y_2(010) + (-1)^{1.1} y_2(011);$
$y_3(100) = (-1)^{0.0} y_2(100) + (-1)^{0.1} y_2(101);$
$y_3(101) = (-1)^{1.0} y_2(100) + (-1)^{1.1} y_2(101);$
$y_3(110) = (-1)^{0.0} y_2(110) + (-1)^{0.1} y_2(111);$
$y_3(111) = (-1)^{1.0} y_2(110) + (-1)^{1.1} y_2(111);$



Общий вид графа вычисления коэффициентов преобразования по Уолшу будет иметь следующий вид.

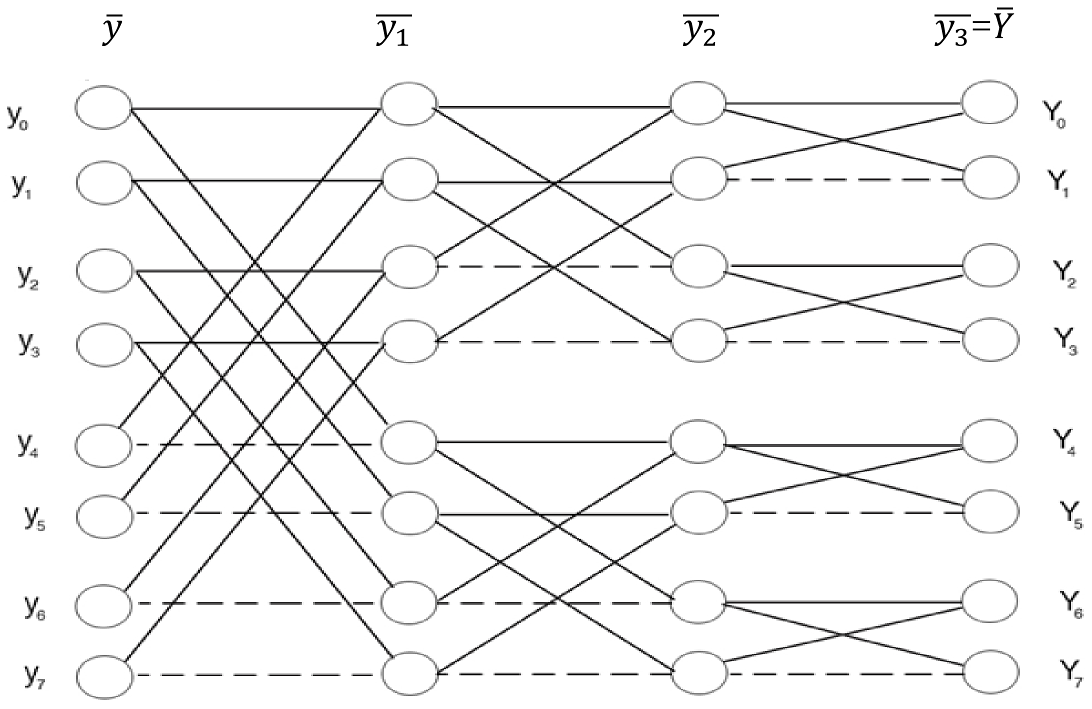


Рис.3.1 Граф БПУ для N=8, алгоритм Сэнди

Рассмотрим использование этого метода и его улучшения для получения алгоритма БПУ в системе упорядочений Уолша-Пэли. Уравнение для преобразования Уолша-Пэли могут быть выражены в виде итерации, используя выражение для любого элемента функции Уолша.

$$\bar{Y}(u_n \dots u_2, u_1) = \sum_{v_n=0}^{1} (-1)^{u_1 v_n} \sum_{v_{n-1}=0}^{1} (-1)^{u_2 v_{n-1}} \dots$$

$$\dots \textstyle\sum_{v_1=0}^{1} (-1)^{u_n v_1} \bar{y}(v_n \dots v_1) \qquad (3.9)$$

Расчет уравнения может быть выполнен в виде набора итераций. На первой итерации составляющие вектора $\overline{y_1}$ могут быть рассчитаны как:

$$\overline{y_1}(u_n, v_{n-1} \dots v_1) = \sum_{v_1=0}^{1} (-1)^{u_n v_1} \bar{y}(v_n \dots v_1) \qquad (3.10)$$

На второй итерации составляющие вектора $\overline{y_2}$ могут быть вычислены как:

$$\overline{y_2}(u_n, u_{n-1}, v_{n-2} \dots v_1) = \sum_{v_2=0}^{1} (-1)^{u_{n-1} v_2} \overline{y_1}(u_n, v_{n-1} \dots v_1) \qquad (3.11)$$

Расчет преобразований Уолша будет закончен после n итераций.

Теперь рассмотрим вывод алгоритма БПУ для случая где, n=3. Уравнение для преобразования Уолша:

$$\bar{Y}(u_3, u_2, u_1) = \sum_{v_3=0}^{1} (-1)^{u_1 v_3} \sum_{v_2=0}^{1} (-1)^{u_2 v_2} \sum_{v_1=0}^{1} (-1)^{u_3 v_1} \bar{y}(v_3\, v_2 v_1) \qquad (3.12)$$

Составляющие вектора $\overline{y_2}$ для второй итерации могут быть рассчитаны как:

$$\overline{y}_1(u_3, v_3, v_2) = \sum_{v_1=0}^{1} (-1)^{u_3 v_1} \overline{y}(v_3, v_2, v_1) \qquad (3.13)$$

Составляющие вектора $\overline{y_1}$ могут быть рассчитаны как:

$u_3 v_3 v_2$

$y_1(000) = (-1)^{0.0}\, y(000) + (-1)^{0.1}\, y(001);$

$y_1(001) = (-1)^{0.0}\, y(010) + (-1)^{0.1}\, y(011);$

$y_1(010) = (-1)^{0.0}\, y(100) + (-1)^{0.1}\, y(101);$

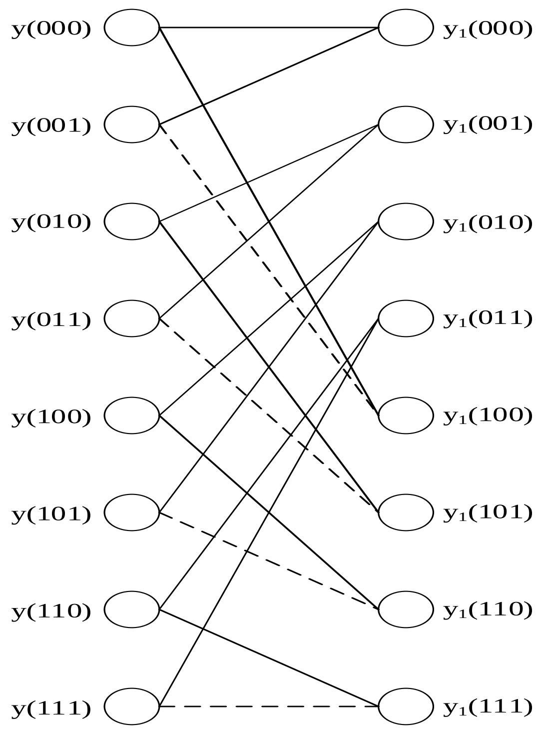
$y_1(011) = (-1)^{0.0}\, y(110) + (-1)^{0.1}\, y(111);$

$y_1(100) = (-1)^{1.0}\, y(000) + (-1)^{1.1}\, y(001);$

$y_1(101) = (-1)^{1.0}\, y(010) + (-1)^{1.1}\, y(011);$

$y_1(110) = (-1)^{1.0}\, y(100) + (-1)^{1.1}\, y(101);$

$y_1(111) = (-1)^{1.0}\, y(110) + (-1)^{1.1}\, y(111);$



$$\overline{y_2}(u_3,u_2,v_3) = \sum_{v_2=0}^{1} (-1)^{u_2 v_2}\, \overline{y_1}(u_3,v_3,v_2) \qquad (3.14)$$

$u_3 u_2 v_3$

$y_2(000) = (-1)^{0.0} y_1(000) + (-1)^{0.1} y_1(001);$

$y_2(001) = (-1)^{0.0} y_1(010) + (-1)^{0.1} y_1(011);$

$y_2(010) = (-1)^{1.0} y_1(000) + (-1)^{1.1} y_1(001);$

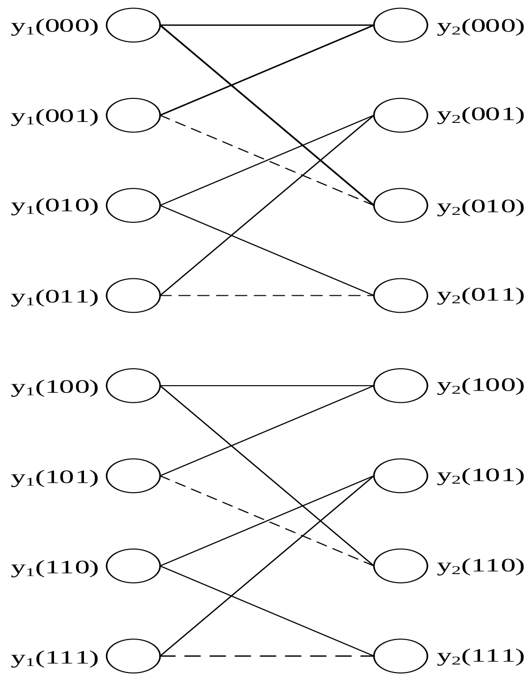
$y_2(011) = (-1)^{1.0} y_1(010) + (-1)^{1.1} y_1(011);$

$y_2(100) = (-1)^{0.0} y_1(100) + (-1)^{1.1} y_1(101);$

$y_2(101) = (-1)^{0.0} y_1(110) + (-1)^{0.1} y_1(111);$

$y_2(110) = (-1)^{1.0} y_1(100) + (-1)^{0.1} y_1(101);$

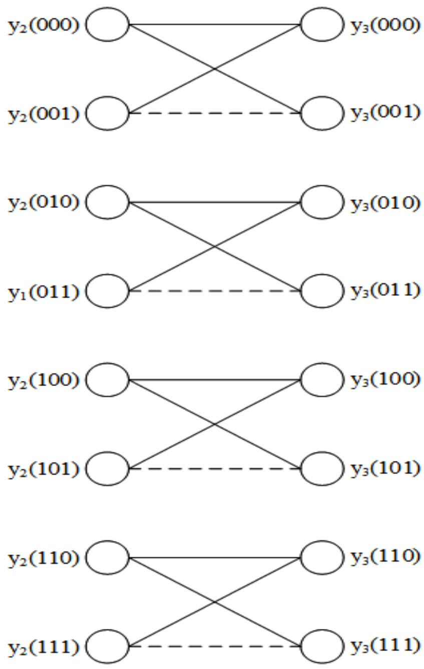
$y_2(111) = (-1)^{1.0} y_1(110) + (-1)^{1.1} y_1(111);$



Составляющие вектора $\overline{y_3} = \overline{Y}$ для третьей итерации могут быть рассчитаны как:

$$\overline{y_3}(u_3, u_2, u_1) = \sum_{v3=0}^{1} (-1)^{u_1 v_3} \overline{y_2}(u_3, u_2, v_3); \overline{Y} = \overline{y_3} \tag{3.15}$$

$$y_3(000) = (-1)^{0.0} y_2(000) + (-1)^{0.1} f_1(001);$$
$$y_3(001) = (-1)^{1.0} y_2(000) + (-1)^{1.1} f_1(001);$$
$$y_3(010) = (-1)^{0.0} y_2(010) + (-1)^{0.1} f_1(011);$$
$$y_3(011) = (-1)^{1.0} y_2(010) + (-1)^{1.1} f_1(011);$$
$$y_3(100) = (-1)^{0.0} y_2(100) + (-1)^{0.1} f_1(101);$$
$$y_3(101) = (-1)^{1.0} y_2(100) + (-1)^{1.1} f_1(101);$$
$$y_3(110) = (-1)^{0.0} y_2(110) + (-1)^{0.1} f_1(111);$$
$$y_3(111) = (-1)^{1.0} y_2(110) + (-1)^{1.1} f_1(111);$$



Полученный граф быстрого преобразования Уолша-Пэли показан на рисунке 3.5.

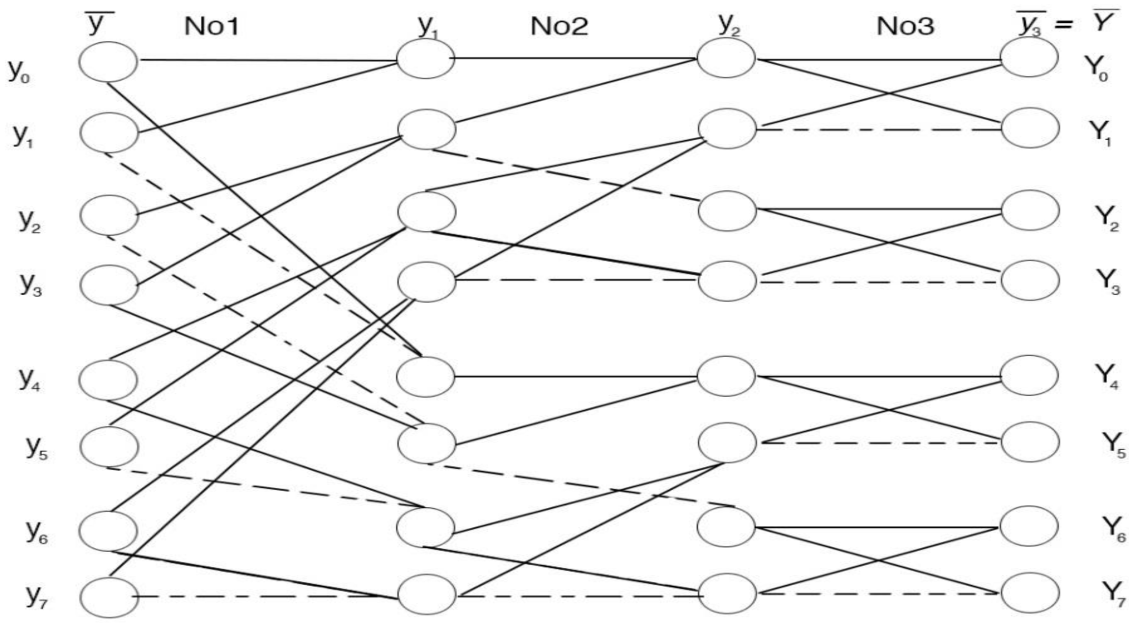


Рисунок 3.2 - Граф быстрого преобразования Уолша-Пэли.

Для получения алгоритмов БПУ в базисе Уолша-Качмажа используем уравнение.

$$\bar{Y}(s_3\, s_2 s_1) = \sum_{t_1=0}^{1}(-1)^{(s_4 \oplus s_3)t_1} \sum_{t_2=0}^{1}(-1)^{(s_3 \oplus s_2)t_2} \ldots$$

$$\ldots \sum_{t_3=0}^{1}(-1)^{(s_2 \oplus s_1)t_3}\, \bar{y}(t_3\, t_2 t_1) \qquad (3.16)$$

На первой итерации:

$$\overline{y_1}(\, t_3\, t_2 s_3) = \sum_{t_1=0}^{1}(-1)^{(s_4 \oplus s_3)t_1}\, \bar{y}(t_3\, t_2 t_1) \qquad (3.17)$$

$t_3 t_2 s_3$

$y_1(000) = (-1)^{(0\oplus0).0} y(000) + (-1)^{(0\oplus0).1} y(001);$

$y_1(001) = (-1)^{(0\oplus1).0} y(000) + (-1)^{(0\oplus1).1} y(001);$

$y_1(010) = (-1)^{(0\oplus0).0} y(010) + (-1)^{(0\oplus0).1} y(011);$

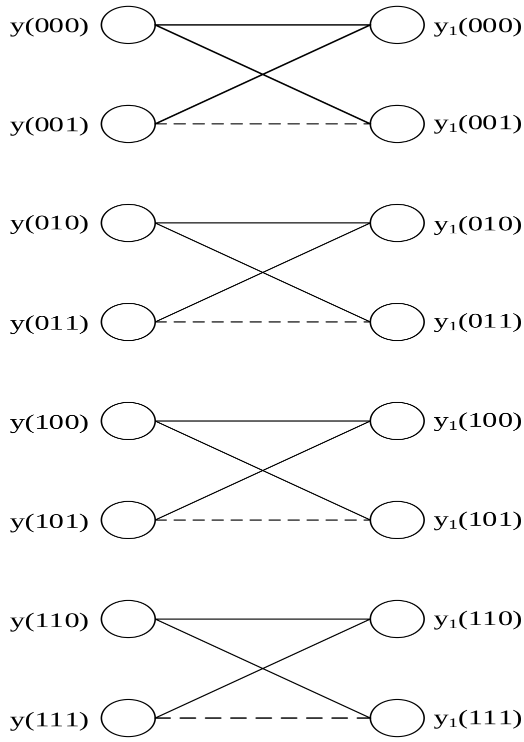
$y_1(011) = (-1)^{(0\oplus1).0} y(010) + (-1)^{(0\oplus1).1} y(011);$

$y_1(100) = (-1)^{(0\oplus0).0} y(100) + (-1)^{(0\oplus0).1} y(101);$

$y_1(101) = (-1)^{(1\oplus0).0} y(100) + (-1)^{(1\oplus0).1} y(101);$

$y_1(110) = (-1)^{(0\oplus0).0} y(110) + (-1)^{(1\oplus0).1} y(111);$

$y_1(111) = (-1)^{(0\oplus1).0} y(110) + (-1)^{(0\oplus1).1} y(111);$



На второй итерации:

$$\overline{y_2}(\, t_3\, s_3 s_2) = \sum_{t_2=0}^{1}(-1)^{(s_3 \oplus s_2)t_2}\, \bar{y}(t_3\, t_2 s_3) \qquad (3.18)$$

$t_3 s_3 s_2$

$y_2(000) = (-1)^{(0\oplus0).0} y_1(000) + (-1)^{(0\oplus0).1} y_1(010);$

$y_2(001) = (-1)^{(0\oplus1).0} y_1(000) + (-1)^{(0\oplus1).1} y_1(010);$

$y_2(010) = (-1)^{(1\oplus0).0} y_1(001) + (-1)^{(1\oplus0).1} y_1(011);$

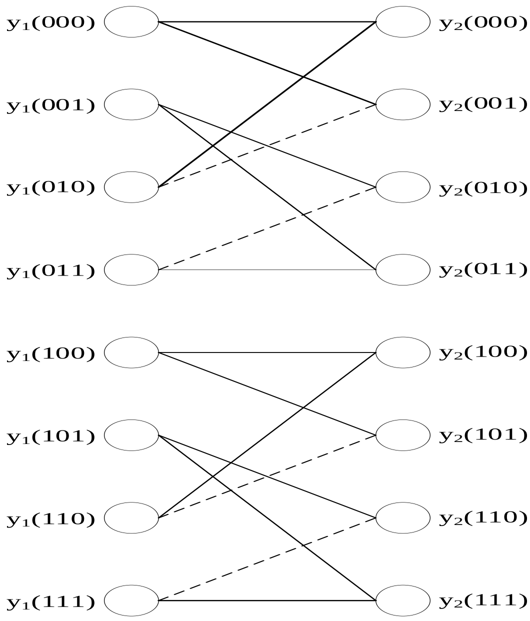
$y_2(011) = (-1)^{(1\oplus1).0} y_1(001) + (-1)^{(1\oplus1).1} y_1(011);$

$y_2(100) = (-1)^{(0\oplus0).0} y_1(100) + (-1)^{(0\oplus0).1} y_1(110);$

$y_2(101) = (-1)^{(0\oplus1).0} y_1(100) + (-1)^{(0\oplus1).1} y_1(110);$

$y_2(110) = (-1)^{(1\oplus0).0} y_1(101) + (-1)^{(1\oplus0).1} y_1(111);$

$y_2(111) = (-1)^{(1\oplus1).0} y_1(101) + (-1)^{(1\oplus1).1} y_1(111);$



На третьей итерации:

$$\overline{y_3}(\, s_3\, s_2 s_1) = \sum_{t_3=0}^{1} (-1)^{(s_2 \oplus s_1) t_3}\, \bar{y}(t_3\, s_3 s_2) \tag{3.19}$$

$s_3 s_2 s_1$

$y_3(000) = (-1)^{(0\oplus0).0} y_2(000) + (-1)^{(0\oplus0).1} y_2(100);$

$y_3(001) = (-1)^{(0\oplus1).0} y_2(000) + (-1)^{(0\oplus1).1} y_2(100);$

$y_3(010) = (-1)^{(1\oplus0).0} y_2(001) + (-1)^{(1\oplus0).1} y_2(101);$

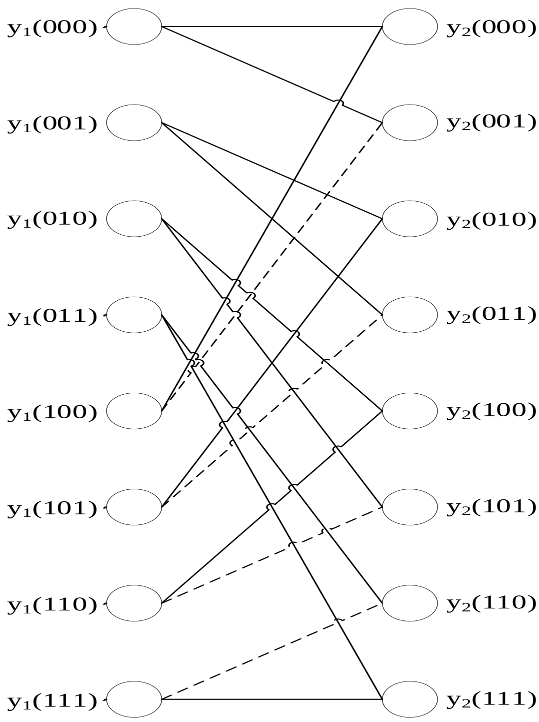
$y_3(011) = (-1)^{(1\oplus1).0} y_2(001) + (-1)^{(1\oplus1).1} y_2(101);$

$y_3(100) = (-1)^{(0\oplus0).0} y_2(010) + (-1)^{(0\oplus0).1} y_2(110);$

$y_3(101) = (-1)^{(0\oplus1).0} y_2(010) + (-1)^{(0\oplus1).1} y_1(110);$

$y_3(110) = (-1)^{(1\oplus0).0} y_2(011) + (-1)^{(1\oplus0).1} y_2(111);$

$y_3(111) = (-1)^{(1\oplus1).0} y_2(011) + (-1)^{(1\oplus1).1} y_2(111);$



Общий вид графа вычисления коэффициентов преобразования по Уолшу будет иметь следующий вид.

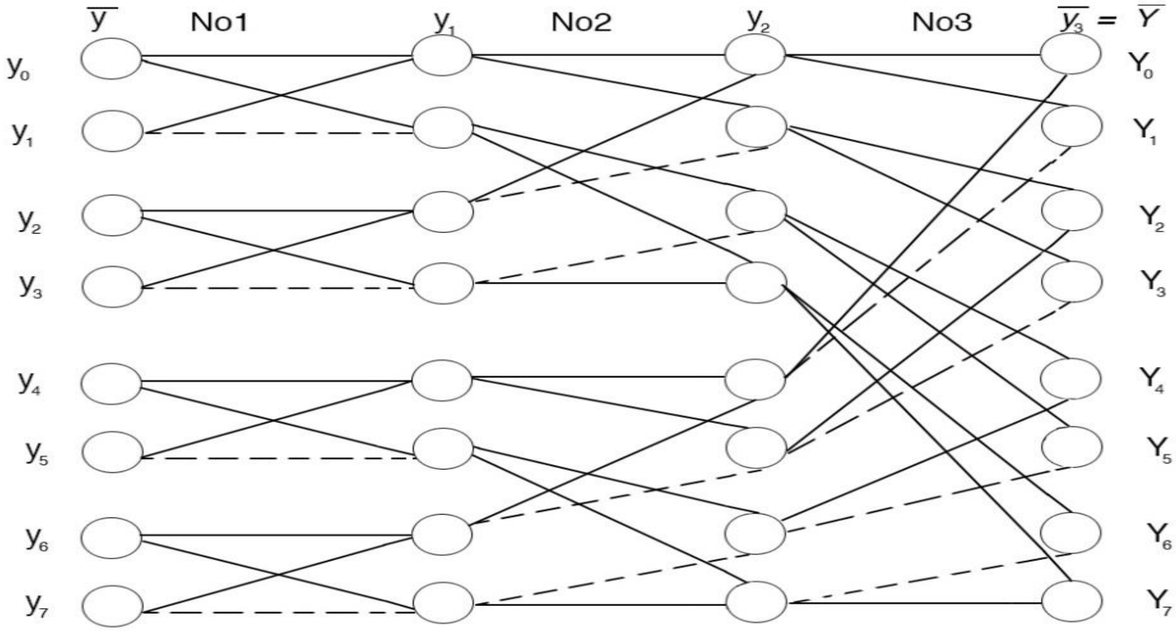


Рисунок 3.3- Второй вариант графа преобразования Уолша-Качмажа в соответствии с алгоритмом Эндрю-Кейн-Пратта.

Полученный граф БПУ в базисе Уолша-Качмажа может интерпретировал как вариант известной алгоритма БПУ Эндрю-Кейна-Пратта с обратным порядком выполнения итераций.

Для упорядочения Уолша-Трахтмана элементы матрицы определяются в следующем виде.

$$t_{rb} = \prod_{k=1}^{n} (-1)^{(r_{n-k+1} \oplus r_{n-k})(b_{n-k+1} \oplus b_{n-k})} \tag{3.20}$$

Мультипликативные итерационные уравнения для извлечения алгоритмов БПУ в базисе Уолша-Трахтмана для N=8 будет следующим.

Рассмотренным методом получения алгоритмов быстрого преобразования Уолша можно получить алгоритм вычисления для быстрого преобразования в системе упорядочений Уолша-Трахтмана, рисунке 3.8 и 3.9.

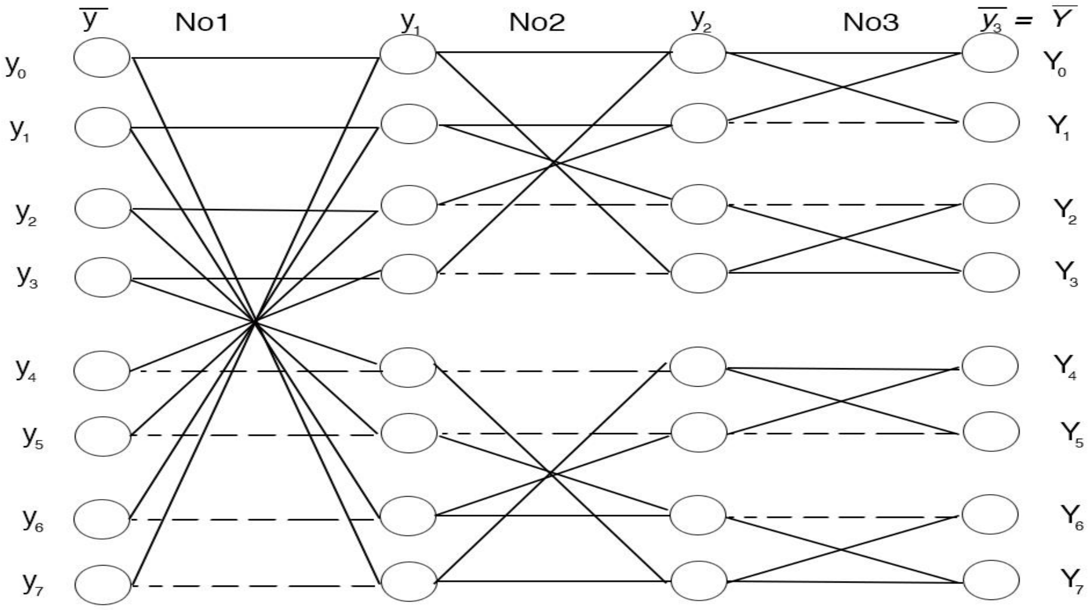


Рисунок 3.4- Граф быстрого преобразования Уолша-Трахтмана для вычисления на местах

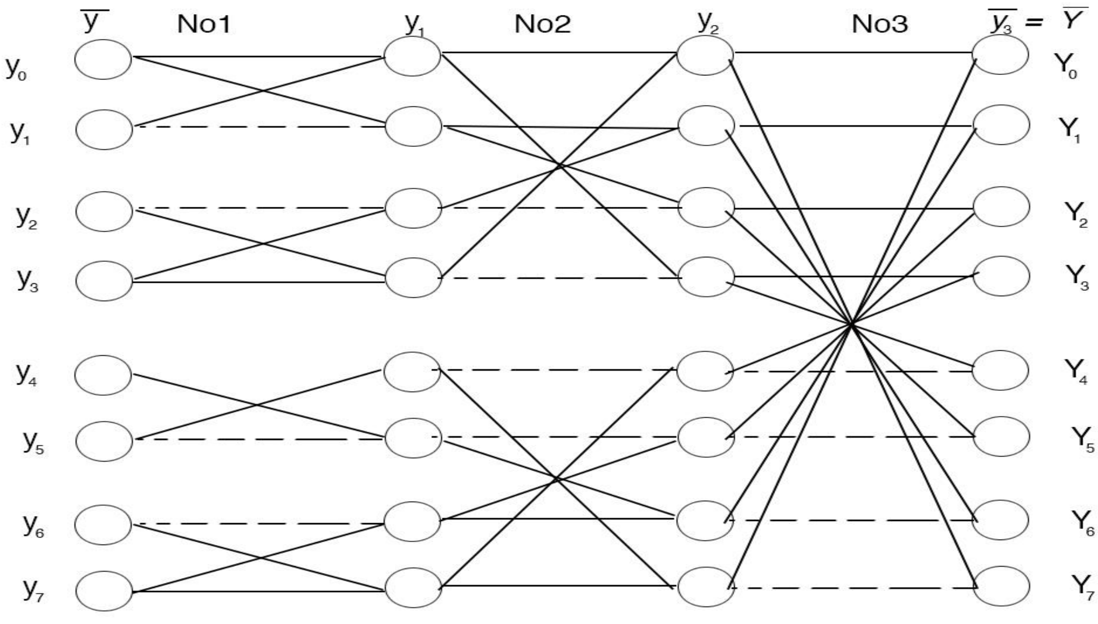


Рисунок 3.5- Граф быстрого преобразования Уолша-Трахтмана для вычисления на местах (второй вариант)

Полученные алгоритмы БПУ рисунок 3.9 и 3.10 являются «замечательными» так имеют вид «бабочки» как известные алгоритмы Кули-Туки и Сэнди.

Разложение матрицы Уолша-Трахтмана в соответствии с быстрым преобразованием Уолша-Трахтмана будет выглядеть:

$$W^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Легко удостовериться, что все коэффициенты разложения матрицы имеют свои ненулевые элементы, расположенные в симметричной структуре.

На основе этого метода получены два варианта алгоритма быстрого преобразования Уолша в системе упорядочений Уолша-Пэли, которые относятся к «замечательным» алгоритмам. Эти алгоритмы быстрого преобразования Уолша обладают свойствами симметрии, их граф для любой размерности может быть легко получен. Используя этот метод можно получить и другие «замечательные» алгоритмы быстрых преобразований Уолша.

Заключение

В ходе выполнения магистерской работы были изучены формы различные определения функций Уолша, основные свойства функций Уолша, системы упорядочения функций Уолша, взаимосвязь между различными системами упорядочения и спектральные преобразования в базисе фу преобразования в базисе функций Уолша.

В результате выполнения работы был разработан метод извлечения алгоритмов быстрых спектральных преобразований в базисе Уолша для различных систем упорядочений, основанный на представлении элементов матриц Уолша в экспоненциальной или показательной форме. На основе этого метода получены новые алгоритмы быстрого преобразования Уолша в различные системы упорядочений, которые относятся к «замечательным» алгоритмам. Полученные графы БПУ обладающие свойствами симметрии позволяют легко получать графы любой размерности и осуществлять вычисления на местах[11,12,14]. Графы быстрого преобразования Уолша имеет все одинаковые итерации, что дает определенное преимущество при осуществлении вычислений мгновенного спектра по Уолшу.

Новые алгоритмы БПУ полученные в работе расширяются практические возможности использования функции Уолша.

Рассмотренный метод получения алгоритмов быстрого преобразования Уолша может быть использован и других алгоритмов БПУ в различных системах упорядочений.

Используя этот метод можно получить и другие замечательные алгоритмы быстрых преобразований Уолша.

Список литературы

Список использованной литературы:

1. *Харкевич А.А.* Спектры и анализ. Физмат, М., 1962.
2. *Трахтман А.М., Трахтман В.А.* Основы теории дискретных сигналов на *конечных* интервалах. М., Сов.радио, 1975.
3. *Лосев В.В.* Микропроцессорные устройства обработки информации. Алгоритмы цифровой обработки. Минск, Вышэйшая школа, 1990.
4. *Хармут Х.Ф.* Передача информации ортогональными функциями. М. Связь, 1975.
5. *Хармут Х.Ф* .Несиносуидальные волны в радиолокации и радиосвязи. М. Радио и связь, 1985.
6. *Хармут Х.Ф.* Теория секвентного анализа. Основы и применения. М. Мир,1980.
7. *Будько А.А., Дворников В.Д.* Взаимосвязь одномерного и многомерного преобразований Уолша-Адамара. Радиотехника и электроника. Вып.7, Минск, 1977.
8. *Будько А.А., Лосев В.В.* Взаимосвязь одномерного и многомерного преобразований Уоша. Методы и средства преобразований сигналов. Рига,1976.
9. *Голубов В.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. М. Наука,1987.
10. *Ахмед Н., Рао К.Р.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М. Связь, 1980.
11. *Лосев В.В, Будько А.А., Дворников В.Д..* Устройство для вычисления коэффициентов преобразования по Уолшу. А.с.744555, 1980, БИ 24.
12. *Лосев В.В, Будько А.А., Дворников В.Д..* Устройство для *ортогонального преобразования цифровых сигналов по Уолшу-Адамару. А.с.* 555404, 1976, БИ 15.
13. *Лосев В.В, Будько А.А., Дворников В.Д..* Устройство преобразования двумерных дискретных фигур методом Уолша-Адамара. А.с. 562816, 1977, БИ 23.
14. *Будько А.А., Лосев В.В, Дворников В.Д..* Устройство ортогонального преобразования по Уолшу. А.с. 620974, 1978, БИ 31.
15. *Дворников В.Д., Лосев В.В., Корякин Ю.Д., Будько А.А*. Устройство определения фазы М-последовательности. А.с. 625314, 1978, БИ 35.
16. *Будько А.А.* Методические указания к лабораторной работе «Быстрое декодирование кодов максимальной длины» по курсу «Специализированные устройства обработки информации», Минск, 1982.
17. *Anatoli A.Budko and Hu Zhengming.* Trahtman System of Walsh Function and the Permutation of Column Order. Journal of China Institute of Communication, №3,1986.

18. *Будько А.А.* Новая система упорядочения функций Уолша. Радиотехника и электроника. Минск, 1985.

19. Shanks I.L. Computation of the Fast Walsh-Fourier transform. – “IEEE Trans.”, May 1969, v.C-18.

20. Трахтман В.А. Факторизация матриц функций Уолша, упорядоченных по Пэли и по частотам следования. “Радиотехника и электроника”, 1973, № 12.

21. Трахтман А.М., Трахтман В.А. О частоте функций Уолша. “Радиотехника и электроника”, 1973, № 12.

22. Kremer H. On the Representation of Walsh Functions and Fast Wals Transform Algorithms. – “Angewandte Informatik Applied Informatics”, 1973, v.15, № 1.

Список собственных публикаций

1. Со Пьае Пьио Паинг. Метод извлечения алгоритмов БПУ / Со Пьае Пьио Паинг // сборник материалов 61-й научной конференции аспирантов, магистрантов и студентов БГУИР (Респ. Беларусь, Минск, 22–23 апр. 2025 г.), Минск, БГУИР, 2025.