

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.В. Цегельник

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
tsegvv@bsuir.by

Аннотация. Получены формулы связи между решениями третьего уравнения Пенлеве при специальных значениях параметров. Также получены формулы соответствия между решениями третьего и пятого уравнений Пенлеве при определенных условиях на параметры указанных уравнений.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений; третье уравнение Пенлеве; пятое уравнение Пенлеве.

1. Рассмотрим эквивалентную пятому уравнению Пенлеве

$$w'' = \frac{3w-1}{2w(w-1)}w'^2 - \frac{1}{z}w' + \frac{(w-1)^2}{z^2} \left(\alpha w + \frac{\beta}{w} \right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1} \quad (1)$$

с постоянными параметрами α , β , γ , δ систему дифференциальных уравнений [1]

$$zu' = -\mu - (\mu + \nu)u - uv - u^2v, \quad (2)$$

$$zv' = \delta z^2 - \gamma z + (\mu + \nu)v + 2\delta z^2u + \frac{1}{2}v^2 + uv^2, \quad (3)$$

где $2\alpha = \nu^2$, $2\beta = -\mu^2$, а функция $u(z)$ связана с $w(z)$ преобразованием

$$u = \frac{w}{1-w}. \quad (4)$$

Будем считать $\mu + \nu = 1$, $\gamma = 0$. Тогда относительно неизвестных v , w система (2), (3), с учетом (4) принимает вид

$$-\frac{zw'}{w} - \mu \frac{(w-1)^2}{w} + w - 1 = v, \quad (5)$$

$$\frac{2(v - zv')}{v^2 + 2\delta z^2} = \frac{w + 1}{w - 1}. \quad (6)$$

Будем также считать $\delta \neq 0$, так как при $\gamma = \delta = 0$ уравнение (1) интегрируется в элементарных функциях [1]. Система (5), (6) в случае $\mu = 0$, $\delta = 8$ приведена в [2]. Относительно функции v система (5), (6) эквивалентна уравнению

$$v'' = \frac{v}{v^2 + 2\delta z^2} v'^2 - \frac{1}{z} \frac{v^2 - 2\delta z^2}{v^2 + 2\delta z^2} v' - \frac{2\delta v}{v^2 + 2\delta z^2} + \frac{2 - 4\mu + \nu}{4z^2} (v^2 + 2\delta z^2).$$

Заменой $v = \kappa z V$, $\kappa^2 + 2\delta = 0$ относительно V получаем уравнение

$$V'' = \frac{V \cdot V'^2}{V^2 - 1} - \frac{V'}{z} + \frac{\kappa(1 - 2\mu)}{2z} (V^2 - 1) + \frac{\kappa^2}{4} V (V^2 - 1). \quad (7)$$

Подстановкой [2]

$$V = -\frac{i}{2} \left(T - \frac{1}{T} \right), \quad i^2 + 1 = 0$$

уравнение (7) преобразуется в уравнение

$$T'' = \frac{T'^2}{T} - \frac{T'}{z} + \frac{\kappa(1 - 2\mu)}{4iz} (T^2 + 1) + \frac{\delta}{8} \left(T^3 - \frac{1}{T} \right), \quad (9)$$

т.е. в третье уравнение Пенлеве

$$p'' = \frac{p'^2}{p} - \frac{p'}{z} + \frac{1}{z} (ap^2 + b)p + cp^3 + \frac{d}{p} \quad (10)$$

с параметрами $a = b = \frac{\kappa(1 - 2\mu)}{4i}$, $c = -d = \frac{\delta}{8}$, где $\kappa = \varepsilon\sqrt{-2\delta}$, $\varepsilon^2 = 1$.

Отметим, что обратная замена

$$T = iV + \varepsilon_1 \sqrt{1 - V^2}, \quad \varepsilon_1^2 = 1,$$

приводит к уравнению (7). Итак, система (5), (6) преобразуется в

$$T - \frac{1}{T} = \frac{2i}{\varepsilon\sqrt{-2\delta}} \left(w - 1 - \frac{\mu(w - 1)^2}{w} - \frac{zw'}{w} \right), \quad (11)$$

$$\frac{w + 1}{w - 1} = -\frac{4i}{\varepsilon\sqrt{-2\delta}} \frac{T'}{T^2 + 1}. \quad (12)$$

Согласно [1] все решения уравнения

$$R(z, \kappa) = zw' - (1 - \mu)w^2 + (1 - 2\mu + \kappa z)w + \mu = 0$$

или $R(z, -\kappa) = 0$ являются одновременно решениями уравнения (1), если $\mu + \nu = 1$, $\gamma = 0$. При этом, если $w(z) \not\equiv 0$ – решение уравнения (1) при $\mu + \nu = 1$, $\gamma = 0$, которое также является решением уравнения $R(z, \kappa) = 0$ ($R(z, -\kappa) = 0$), то оно порождает по формуле (11) решение $T = i$ и $T = -i$ уравнения (10). Будем считать, что в (11), (12)

$$T^2(z) + 1 \not\equiv 0, \quad w(z) \not\equiv 0, \quad R(z, \kappa) \not\equiv 0, \quad (R(z, -\kappa) \not\equiv 0).$$

Теорема 1. Пусть $w(z) \neq 0$ – решение уравнения (1) при $\alpha = \gamma^2/2$, $\beta = -\mu^2/2$, $\nu + \mu = 1$, $\gamma = 0$, δ ($\delta \neq 0$) такое, что $R(z, \kappa) \neq 0$ ($R(z, -\kappa) \neq 0$). Тогда функция $T(z)$, где $T(z)$ – один из корней квадратного уравнения (11), является решением уравнения (10) при $a = b = \varepsilon\sqrt{-2\delta}(1 - 2\mu)/(4i)$, $c = -d = \delta/8$.

Теорема 2. Пусть $T(z)$ ($T^2(z) + 1 \neq 0$) – решение уравнения (10) при значениях $a = b$, $c = -d \neq 0$. Тогда функция w , определяемая формулой

$$\frac{w+1}{w-1} = -\frac{4i}{\varepsilon\sqrt{-16c}} \frac{T'}{T^2+1} \quad (13)$$

является решением уравнения (1) при

$$\alpha = \frac{\nu^2}{2}, \quad \beta = -\frac{\mu^2}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4ai}{\varepsilon\sqrt{-16c}} \right), \quad \nu = 1 - \mu, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 8c.$$

Пример. Решение $w = -1$ уравнения (1) при $\alpha = \nu^2/2 = 1/8$, $\beta = -\mu^2/2 = -1/8$ ($\nu = \mu = 1/2$), $\gamma = 0$, $\delta \neq 0$ порождает по формуле (11) 2 решения $T = 1$ и $T = -1$ уравнения (9), в котором $\mu = 1/2$. И наоборот, из (13) при $T = 1$ и $T = -1$ получаем $w = -1$.

Замечание. Система (2), (3) с точностью до обозначений совпадает с системой в работе [3], если в последней независимую переменную x заменить на $-z$ или параметр γ заменить на $-\gamma$. В работе [4] с помощью системы (2) получено преобразование Беклунда решений уравнения (1) в случае $\delta \neq 0$.

2. Система дифференциальных уравнений

$$zq' = q + zr + \sigma zq^2, \quad (14)$$

$$qr' = -1 + r^2, \quad (15)$$

в которой $\sigma^2 = 1$, относительно неизвестной функции q эквивалентна уравнению

$$zqq'' = zq'^2 - qq' + 2\sigma q^3 + zq^4 - z,$$

т.е. уравнению (10) с параметрами $a = 2\sigma$, $b = 0$, $c = 1$, $d = -1$. Система (14), (15) есть частный случай системы [1, 4, 5], эквивалентной уравнению (10) в случае $c = -d = 1$.

Подстановкой $r = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{1}{R^2} \right)$ в (14), (15) получены формулы связи между решениями уравнения (10) с параметрами $a = 2\sigma$, $b = 0$, $c = 1$, $d = -1$ и $a = b = 0$, $c = -d = -\sigma/4$.

Библиографические ссылки

1. Громак В. И., Лукашевич Н. А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн.: Университетское, 1990.
2. Метя М. Л. Случайные матрицы. М.: МЦНМО, 2012.
3. Лукашевич Н. А. О функциях, определяемых одной системой дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 2. С. 379–381.
4. Громак В. И. О решениях пятого уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 4. С. 740–742.
5. Лукашевич Н. А. К теории третьего уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 11. С. 1913–1923.