УДК: 519.872

Об одном методе исследования многоканальной системы массового обслуживания с повторными вызовами

И.И. Хомичков

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
220013, ул. П.Бровки, 6, Минск, Беларусь,

iv_hom@tut.by

Аннотация

В работе рассматривается экспоненциальная многоканальная система массового обслуживания с повторными вызовами. На примере двухканальной системы массовой обслуживания рассматривается метод нахождения производящих функций стационарных вероятностей состояний системы. Он состоит в сведении системы дифференциальных уравнений относительно производящих функций к однородному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами, имеющего вид уравнения Гаусса. Решение этого уравнения известно в виде гипергеометрических функций.

Ключевые слова: Многоканальная система обслуживания, повторные вызовы, дифференциальные уравнение Гаусса.

1. Введение

Системы массового обслуживания (СМО) с повторными вызовами являются адекватными моделями распределенных компьютерных и телекоммуникационных систем. В случае одноканальных СМО с повторными вызовами задача нахождения производящих функций стационарных вероятностей, как правило, сводится к решению некоторых дифференциальных уравнений первого порядка. В случае многоканальных СМО с повторными вызовами задача усложняется, приходится иметь дело с дифференциальными уравнения более высоких порядков, что существенно усложняет ее решение. В данной работе на примере двухканальной системы массового обслуживания рассматривается способ решения задачи нахождения производящих функций путем сведения ее к решению однородного дифференциального уравнения Гаусса.

2. Рассматриваемая система массового обслуживания

Многоканальная экспоненциальная система массового обслуживания с повторными вызовами, как модель коммуникационной системы, была предложена в работе [1]. Рассматривается СМО M/M/N с повторными вызовами. СМО состоит из N обслуживающих приборов на каждом из которых заявки обслуживаются случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром μ. В СМО поступают в случайные промежутки времени заявки (вызовы), образующие пуассоновский поток с параметром λ. Если при этом обнаруживается свободный прибор (один из N), то заявка поступает на любой свободный прибор для обслуживания. После завершения обслуживания заявка покидает систему. Если все приборы заняты, то заявка не теряется, а поступает на обслуживание через случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром ν. Такие заявки называются повторными. Повторные заявки поступают на обслуживание до тех пор, пока не будут обслужены. Одной из основных характеристик такой СМО является стационарное распределение вероятностей состояний системы:

$$p_k(n) = \lim_{t\to\infty} P\{k(t), n(t)\}, k = \overline{0, N}, n = \overline{0, \infty}, \tag{1}$$

где $k(t)$-число занятых приборов, а $n(t)$ – число повторных вызовов в СМО в момент времени t. Случайный процесс $(k(t), n(t))$ является марковским и для него не составляет труда составить уравнения стохастического равновесия и соответствующие уравнения для их производящих функций.

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_k(n)x^n, k = \overline{0, N}, |x| < 1. \tag{2}$$

В случае произвольного числа приборов обслуживания N, решение задачи нахождения производящих функций стационарных вероятностей $P_k(x), k = \overline{0, N}$ вызывает большую математическую трудность, т.к. задача сводится к решению однородного дифференциального уравнения N порядка (N- число каналов) с переменными коэффициентами и особой иррегулярной точкой в нуле. Численные методы нахождения стационарных вероятностей данной системы были развиты в работе [2].

3. Пример решение задачи для случая двухлинейной системы

В случае, когда $N = 2$ стационарные вероятности (1) были получены в [3]. В работе [4] эти стационарные вероятности путем математических преобразований были преобразованы в производящие функции. В данной работе предлагается непосредственный метод нахождения производящих функций стационарных вероятностей системы.

Из уравнения стохастического равновесия для стационарных вероятностей состояний СМО следует следующая система дифференциальных уравнений относительно производящих функций $P_k(x), k = \overline{0,2}$:

$$\begin{cases} \nu P_0'(x) = -\lambda P_0(x) + \mu P_1(x) \\ \nu P_1'(x) = -\lambda P_1(x) + (\lambda - \lambda x + 2\mu) P_2(x) \\ \nu P_0'(x) + \nu P_1(x) = \lambda P_2(x) \end{cases} \tag{3}$$

Исключая из этой системы функции $P_1(x)$, $P_2(x)$, получим дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами относительно производящей функции $P_0(x)$:

$$x\left(\frac{\lambda x}{2\mu} - 1\right) P_0''(x) + \left(\frac{(2\lambda + \nu + \mu)\lambda}{2\mu\nu} x - \frac{3\lambda + 2\nu + 2\mu}{2\nu}\right) P_0'(x) + \frac{\lambda^3}{2\mu\nu^2} P_0(x) = 0, |x| < 1. \tag{4}$$

По условию стационарности системы $\frac{\lambda}{2\mu} < 1$, [3], это дифференциальное уравнение имеет только одну особую точку x $= 0$ на интервале $|x| < 1$.

После замены $P_0(x) = W(z)$, где $x = z\frac{2\mu}{\lambda}$ это уравнение сводится к уравнению вида:

$$z(z-1)W''(z) + (-\gamma + (1 + \alpha + \beta)z)W'(z) + \alpha\beta W(z) = 0, \tag{5}$$

где

$$\alpha = \frac{2\lambda + \mu - \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2\nu}, \beta = \frac{2\lambda + \mu + \sqrt{\mu^2 + 4\lambda\mu}}{2\nu}, \gamma = \frac{3\lambda + 2\nu + 2\mu}{2\nu}. \tag{6}$$

Это уравнение Гаусса [5]. В окрестности точки z$=$0 уравнение (5) имеет два независимых решения:

$$W_1(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z), \tag{7}$$

$$W_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, z), \tag{8}$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$-гипергеометрическая функция [5], которая является аналитической в круге $|z| < 1$ комплексной плоскости. Таким образом для искомой производящей функции $P_0(x)$ имеем два независимых решения:

1) $P_0(x) = F(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\lambda}{2\mu} x)$,

2) $P_0(x) = (\frac{\lambda}{2\mu}x)^{-\frac{3\lambda+2\mu}{2\nu}} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, \frac{\lambda}{2\mu}x)$

Очевидно, производящая функция $P_0(x)$ при x=0 принимает конечное значение $P_0(0) = p_0(0)$, поэтому второе решение нам не подходит, так как в x=0 оно не ограничено. Окончательно имеем единственное решение уравнения (4)

$$P_0(x) = C \cdot F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{\lambda}{2\mu}x\right), \tag{9}$$

где С-произвольная константа.

Далее, функции $P_1(x)$, $P_2(x)$ находятся из системы дифференциальных уравнений (3), а произвольная константа С находится из условия нормировки:

$$P_0(1) + P_1(1) + P_2(1) = 1 \tag{10}$$

4. Заключение

В данной работе на примере двухканальной системы массового обслуживания с повторными вызовами предложен метод, по которому нахождение производящих функций стационарных вероятностей систем с повторными вызовами сводится к решению соответствующих дифференциальных уравнений с особенностями в нуле. Эта особенность позволяет из множества решений выбрать только единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cohen J.W. Basic problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls // Philips Telecommunication Review. 1957. V. 28. № 2. P. 49-100.
2. Степанов С.Н. Численные методы расчета систем с повторными вызовами. М. Наука. 1983. 228 с.
3. Ионин Г.Л., Седол Я.Я. Таблицы вероятностных характеристик полнодоступного пучка при повторных вызовах. – М.: Наука, 1970.-156 с.
4. Фалин Г.И. Двухканальная систем с повторными вызовами. / Ред. ж. "Изв. АН СССР. Техническая кибернетика". М., 1984. – 18 с. Деп. в ВИНИТИ №4221-84.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М. Наука. 1957. Т. III. ч.2. 674 с.