О СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА В ТРЁХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

С.С. Каянович

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
kayanovichs@gmail.com

Аннотация. Исследуется вопрос о разрешимости краевой задачи для уравнений Навье–Стокса в трубе прямоугольного сечения со сглаженными углами. Исследование выполняется

на временных слоях. На нулевом временном слое условия для компонент скорости ставятся таким образом, что обеспечивается справедливость уравнения неразрывности. Для нахождения давления используется уравнение Пуассона, доказательство разрешимости которого приводит к привлечению абстрактных уравнений в банаховых пространствах.

Ключевые слова: временно́й слой; краевая задача; сглаживание поверхности; теорема Шаудера; уравнение Пуассона.

Исследуется разрешимость задачи для уравнений Навье–Стокса. Область, в которой рассматриваются уравнения, представляет собой прямоугольный параллелепипед Ω сграницей S, $\Omega\bigcup S=\overline{\Omega}$. Для получения гладкой поверхности сглаживаются все углы этого параллелепипеда. Сглаживание производится так, чтобы сглаженная поверхность при x_1, удовлетворяющих неравенствам: $0\leqslant x_1<\delta$ и $L-\delta<$ $<x_1\leqslant L$, не содержала плоских частей и была выпуклой гладкой поверхностью (плоскость $x_1=0$ касается ее в точке $x^0(0,0.5H_2,0.5H_3)$, а плоскость $x_1=L$ – в точке $x^L(L,0.5H_2,0.5H_3)$. Здесь L – длина трубы, H_2,H_3 – ее поперечные размеры [1].

Обозначим через $\tilde{S}$ поверхность, полученную после сглаживания, $\tilde{\Omega}$ – область, ограниченную поверхностью $\tilde{S}$, $\overline{\tilde{\Omega}}=\tilde{\Omega}\bigcup\tilde{S},\tilde{\Omega}_T=\tilde{\Omega}\times[0,T]$, $\tilde{S}_T=\tilde{S}\times[0,T],\overline{\tilde{\Omega}}_T=\overline{\tilde{\Omega}}\times$ $\times[0,T]$. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\nu\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_i},\tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0,\quad (x,t)\in\tilde{\Omega}_T,\quad i=\overline{1,3};\tag{2}$$

$$u_1|_{t=0}=\overline{b}_1(x),\quad x\in\overline{\Omega},\quad u_1|_{\tilde{S}_T}=\tilde{\psi}_1(s,t),\quad (s,t)\in\tilde{S}_T.\tag{3}$$

Переходим к постановке начальных условий для компонент скорости u_2 и u_3.

1. Решаем уравнение $\partial u_1/\partial x_1+\partial u_2/\partial x_2=0$ относительно u_2. При любом x_3, $0\leqslant$ $\leqslant x_3\leqslant H_3$, оно решается так же, как в [2]. Получаемое решение, которое обозначим $\tilde{u}$, удовлетворяет и уравнению, и условиям прилипания. Найдя решение $\tilde{u}$, в области $\tilde{\Omega}$ рассматриваем уравнение

$$\nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_k^2}-u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\tilde{u}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0,$$

которое, согласно теореме Шаудера, имеет единственное гладкое решение (при любом $x_3=x_3^{(0)}$, $0<x_3^{(0)}<H_3$). Это решение обозначим $\bar{u}_2$. Аналогично решению уравнения $\partial u_1/\partial x_1+\partial u_2/\partial x_2=0$, оно решалось выше относительно u_2, решаем $\partial u_1/\partial x_1+$ $+\partial\bar{u}_2/\partial x_2+\partial u_3/\partial x_3=0$ относительно u_3 с известными u_1, $\bar{u}_2$ и получаем решение $\bar{u}_3$, которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\bar{u}_3}{\partial x_3}=0.\tag{4}$$

2. В п. 1 найдены поперечные скорости $\bar{u}_2$ и $\bar{u}_3$. В этом пункте, поменяв ролями: функции u_2 и u_3, переменные x_2 и x_3, т.е. $u_2\leftrightarrow u_3$, $x_2\leftrightarrow x_3$, и выполнив действия, аналогичные действиям п. 1, найдем функции $\bar{\bar{u}}_3$ и $\bar{\bar{u}}_2$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\bar{u}}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\bar{u}}_3}{\partial x_3} = 0. \tag{5}$$

Обозначив $u_{2,0} = (\bar{u}_2 + \bar{\bar{u}}_2)/2$, $u_{3,0} = (\bar{u}_3 + \bar{\bar{u}}_3)/2$, $u_1|_{t=0} = \bar{b}_1(x) = u_{1,0}$, сложим (4) и (5):

$$2\frac{\partial u_{1,0}}{\partial x_1} + 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial(\bar{u}_2 + \bar{\bar{u}}_2)}{\partial x_2} + 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial(\bar{u}_3 + \bar{\bar{u}}_3)}{\partial x_3} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_{1,0}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2,0}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{3,0}}{\partial x_3} = 0.$$

Имеем начальные условия для u_1, u_2, u_3, которые удовлетворяют уравнению (2).

В рассматриваемой задаче (1)–(3) присутствует еще одна неизвестная функция, а именно: давление. Для получения замкнутой системы уравнений для нее необходимо дополнительное уравнение [3]. Введя обозначение

$$A_i^{(0)} = \nu \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 u_{i,0}}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{3} u_{k,0}\frac{\partial u_{i,0}}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, 3,$$

придем к уравнению Пуассона

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = f(x),$$

в котором $f(x) = \sum_{i=1}^{3} \partial A_i^{(0)}/\partial x_i$ [4]. Это уравнение рассматриваем с условием

$$Bp \equiv \sum_{i=1}^{3} b_i(x)\frac{\partial p}{\partial x_i} + b(x)p = \varphi(s)$$

на $\tilde{S}$, где $x = s \in \tilde{S}$ [5]. Получаем задачу

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = f(x), \quad Bp|_{\tilde{S}} = \varphi(s).$$

Рассматривая последнюю задачу и обращаясь к теореме о разрешимости абстрактных уравнений в банаховых пространствах, избавляемся от слагаемого $b(x)p$ в граничном операторе B [1, 5], так как в граничных условиях для уравнения Пуассона слагаемое вида $b(x)p$ отсутствует [1]. На временных слоях процесс нахождения решения осуществляется аналогично.

Теорема. *Пусть выполнены условия:* $\tilde{S} \in C^{3+\alpha}$, $\bar{b}_1(x) \in C^{3+\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}})$, $\tilde{\psi}_1 \in C^{3+\alpha}(\tilde{S}_T)$, $f \in C^{\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}})$, $\varphi \in C^{1+\alpha}(\tilde{S})$. *Тогда задача (1)–(3), в которой частные производные* $\partial u_i/\partial t$ *заменены разностными производными, при любом* $t = t_m = m\tau$, $m = \overline{0, M}$, *и достаточно малом* τ *имеет единственное решение, причем* $u_{i,m} \in C^{3+\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}}_m)$, $p_m \in C^{2+\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}}_m)$ [5].

Библиографические ссылки

1. *Kayanovich S.* On the solvability of a differential-difference problem for the Navier–Stokes equations // Proc. Int. Conf. “Scientific research of the SCO Countries”. Beijing, China, December 4, 2024. P. 145–151.

2. *Каянович С.С.* Математические вопросы двумерной гидродинамики. Мн.: Бестпринт, 2024.

3. *Бруяцкий Е.В., Костин А.Г., Никифорович Е.И., Розумнюк Н.В.* Метод численного решения уравнений Навье–Стокса в переменных скорость–давление // Прикл. гидромеханика. 2008. Т. 10. № 2. С. 13–23.

4. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.

5. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.