Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет информационной безопасности

Кафедра информационно-измерительных систем

А. В. Гусинский, Н. А. Певнева

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия для специальности 6-05-0611-06 «Системы и сети инфокоммуникаций»

Минск БГУИР 2025

УДК 621.317(075.8)
ББК 30.10я73
Г96

Р е ц е н з е н т ы:

4-е управление государственного учреждения «Научно-исследовательский институт Вооруженных Сил Республики Беларусь»
(протокол № 2 от 26.02.2025);

директор ООО «МилитСофт Солюшенс»
кандидат технических наук, доцент С. А. Горшков

Гусинский, А. В.

Г96 Теоретическая метрология. Лабораторный практикум : учеб.-метод. пособие / А. В. Гусинский, Н. А. Певнева. – Минск : БГУИР, 2025. – 66 с. : ил.
ISBN 978-985-543-853-4.

Включает в себя четыре лабораторные работы: обработка исправленных результатов прямых равнорассеянных измерений; обработка результатов косвенных измерений; обработка результатов совокупных измерений; обработка результатов совместных измерений. Указаны цели работ, даны краткие теоретические сведения о функциях, реализуемых в программных обеспечениях работ, описание подготовки к работам, лабораторные задания, рекомендации по их выполнению, а также указания по оформлению отчетов, контрольные вопросы для проверки знаний и список рекомендуемой литературы. Рассмотрены алгоритмы обработки информации при прямых равнорассеянных измерениях, косвенных, совокупных и совместных измерениях.

УДК 621.317(075.8)
ББК 30.10я73

ISBN 978-985-543-853-4

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В эпоху больших данных и аналитики возрастает важность теоретических основ метрологии для обеспечения корректного сбора, хранения и интерпретации информации. Внедрение новых методов и технологий измерений в производственные процессы может привести к повышению эффективности и снижению себестоимости.

Теоретическая метрология обеспечивает единые стандарты измерений, что особенно важно для междисциплинарного взаимодействия и глобальной торговли. Это позволяет поддерживать качество продукции и услуг. Теоретическая метрология помогает обеспечивать воспроизводимость и достоверность экспериментальных данных.

Метрологическая обработка результатов измерений является одним из важных разделов теоретической метрологии. Она имеет критически важное значение в различных сферах науки, техники и производства. Метрологическая обработка позволяет корректировать и оценивать погрешности измерений, что в конечном итоге повышает точность получаемых данных. Это особенно важно в научных исследованиях и технических приложениях. Увеличение точности измерений позволяет снизить затраты на корректировки, брак продукции и другие дополнительные расходы, связанные с неправильными данными.

Понимание принципов метрологической обработки результатов измерений формирует квалификацию и компетенции специалистов, что улучшает качество работы и повышает уровень научной и технической деятельности.

В рамках лабораторного практикума рассмотрены методы обработки исправленных результатов прямых равнорассеянных измерений, косвенных, совокупных и совместных измерений. Обработка исправленных результатов прямых равнорассеянных измерений позволяет получить более точные и достоверные данные о рассматриваемом объекте и оценить при этом возможные систематические ошибки. Обработка результатов косвенных измерений включает в себя цикл действий, направленных на получение итоговых значений физической величины на основе измерений других величин, которые взаимосвязаны между собой. Косвенные измерения используются, когда невозможно или нецелесообразно провести прямое измерение требуемой величины. Обработка результатов совокупных измерений позволяет объединять данные, полученные из разных измерений, для извлечения более точной и надежной информации о характеристиках исследуемого объекта. Обработка результатов совместных измерений касается ситуации, когда несколько величин измеряются одновременно и эти измерения имеют взаимосвязь. Это может быть полезно для улучшения точности и надежности получаемых данных, а также для понимания взаимосвязей между разными физическими величинами.

Лабораторная работа № 1
«Обработка исправленных результатов прямых равнорассеянных измерений»

1.1 Краткие теоретические сведения

Метрология – наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности [1].

Теоретическая метрология – раздел метрологии, предметом которого является разработка фундаментальных основ метрологии.

Измерение (величины) – процесс экспериментального получения одного или более значений величины, которые могут быть обоснованно приписаны величине.

Измерение подразумевает сравнение величин или включает счет объектов. Измерение предусматривает описание величины в соответствии с предполагаемым использованием результата измерения, методику измерений и средство измерений, функционирующее в соответствии с регламентированной методикой измерений и с учетом условий измерений.

Измеряемая величина – величина, подлежащая измерению.

Объект измерения – материальный объект или явление, которое характеризуется одной или несколькими измеряемыми и влияющими величинами.

Например, вал, у которого измеряют диаметр; технологический процесс, во время которого измеряют температуру; спутник Земли, координаты которого измеряются или с помощью которого измеряют координаты местоположения объекта на Земле, – это все объекты измерения.

Принцип измерений – явление материального мира, положенное в основу измерения. Например:

- применение эффекта Джозефсона для измерения электрического напряжения;
- применение эффекта Пельтье для измерения поглощенной энергии ионизирующих излучений;
- применение эффекта Доплера для измерения скорости;
- использование гравитационного притяжения при измерении массы взвешиванием;
- энергия абсорбции, которая служит для измерения молярной концентрации.

Метод измерений – прием или совокупность приемов сравнения измеряемой величины с ее единицей или соотнесения со шкалой в соответствии с реализованным принципом измерений.

Метод сравнения (с мерой) – метод измерений, в котором измеряемую величину сравнивают с величиной, воспроизводимой мерой.

Например, измерение массы на рычажных весах с уравновешиванием гирями (мерами массы с известными значениями).

Нулевой метод (измерений) – метод сравнения с мерой, в котором результирующий эффект воздействия измеряемой величины и меры на средство сравнения доводят до нуля.

Например, измерение электрического сопротивления мостом с полным его уравновешиванием.

Метод замещения – метод сравнения с мерой, в котором измеряемую величину замещают мерой с известным значением величины.

Например, взвешивание с поочередным помещением измеряемой массы и гирь на одну и ту же чашку весов (метод Борда).

Метод дополнения – метод сравнения с мерой, в котором значение измеряемой величины дополняется мерой этой же величины с таким расчетом, чтобы на прибор сравнения воздействовала их сумма, равная заранее заданному значению.

Дифференциальный метод измерений – метод измерений, при котором измеряемая величина сравнивается с однородной величиной, имеющей известное значение, незначительно отличающееся от значения измеряемой величины, при котором измеряется разность между этими двумя величинами.

Например, измерения, выполняемые при поверке мер длины сравнением с эталонной мерой на компараторе.

Методика измерений – установленная логическая последовательность операций и правил при измерении, выполнение которых обеспечивает получение результатов измерений в соответствии с принятым методом измерений. Обычно методика измерений регламентируется каким-либо нормативным документом.

Референтная методика измерений – методика измерений, принятая для получения результатов измерений, которые могут быть использованы для оценки правильности измеренных значений величины, полученных по другим методикам измерений величин того же рода, а также для калибровки или для определения характеристик стандартных образцов. Методику измерений необходимо отличать от методики калибровки.

Первичная референтная методика измерений – референтная методика измерений, которая используется для получения результата измерения без сравнения с эталоном единицы величины того же рода.

Статическое измерение – измерение величины, принимаемой в соответствии с конкретной измерительной задачей за неизменную на протяжении времени измерения.

Динамический режим (использования средства измерений) – режим использования средства измерений, связанный с изменениями условий (факторов) за время проведения измерительного эксперимента, которые влияют на результат измерения (оценку измеряемой величины), в т. ч. изменение измеряемой величины за время измерения.

Динамическое измерение – измерение, при котором средства измерений используют в динамическом режиме.

Абсолютное измерение – измерение, основанное на прямых измерениях одной или нескольких основных величин и (или) использовании значений физических констант.

Например, измерение силы $F = mg$ основано на измерении основной величины – массы m – и использовании физической постоянной g (в точке измерения массы).

Относительное измерение – измерение отношения одноименных величин или функций этого отношения.

Например, измерение активности радионуклида в источнике по отношению к активности радионуклида в однотипном источнике, аттестованном в качестве эталонной меры активности.

Прямое измерение – измерение, при котором искомое значение величины получают непосредственно от средства измерений.

Обработка результатов прямых измерений – это важный этап в научных исследованиях и инженерной практике, который включает в себя анализ, интерпретацию и представление данных, полученных в результате измерений. Этот процесс может включать несколько ключевых шагов:

1 Сбор данных. Первоначально необходимо провести измерения с использованием соответствующих инструментов и методов. Важно обеспечить точность и надежность получаемых данных.

2 Калибровка инструментов. Перед началом измерений инструменты должны быть откалиброваны для обеспечения точности. Это может включать проверку на стандартных образцах.

3 Обработка данных:

- фильтрация: удаление шумов и выбросов из данных;

- сглаживание: применение методов сглаживания для уменьшения колебаний в данных;

- статистический анализ: вычисление средних значений, стандартных отклонений и других статистических показателей для оценки надежности результатов.

4 Интерпретация результатов. На этом этапе данные анализируются с точки зрения их физического смысла и соответствия теоретическим ожиданиям.

5 Визуализация данных. Графики, диаграммы и таблицы помогают лучше понять результаты и выявить закономерности.

6 Оценка погрешностей. Необходимо оценить возможные источники ошибок в измерениях (систематические и случайные) и рассчитать общую погрешность результата.

7 Документация. Все этапы обработки должны быть задокументированы, чтобы обеспечить возможность воспроизведения эксперимента другими исследователями.

8 Выводы и рекомендации. На основе обработанных данных формулируются выводы, которые могут быть использованы для дальнейших исследований или практических приложений.

Эти шаги могут варьироваться в зависимости от специфики области исследования, типа измеряемых величин и используемых методов анализа.

Обработка данных должна проводиться честно и прозрачно. Необходимо избегать манипуляций с данными для получения желаемых результатов.

Исправленный результат измерений величины – результат измерений величины, полученный после введения поправки в целях устранения систематических погрешностей в неисправленный результат измерений величины [2]. Исправленные результаты $x_1, ..., x_n$, полученные при прямых измерениях постоянной физической величины x, называются ***равнорассеянными***, если они являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами. Равнорассеянные результаты получают при измерениях, проводимых одним наблюдателем или группой наблюдателей с помощью одних и тех же средств в неизменных условиях внешней среды.

При статистической обработке группы результатов прямых многократных независимых измерений выполняют следующие операции:

- исключают известные систематические погрешности из результатов измерений;
- вычисляют оценку измеряемой величины;
- вычисляют среднее квадратическое отклонение результатов измерений;
- проверяют наличие грубых погрешностей и при необходимости исключают их;
- проверяют гипотезу о принадлежности результатов измерений нормальному распределению;
- вычисляют доверительные границы случайной погрешности (доверительную случайную погрешность) оценки измеряемой величины;
- вычисляют доверительные границы неисключенной систематической погрешности оценки измеряемой величины;
- вычисляют доверительные границы погрешности оценки измеряемой величины.

Проверку гипотезы о том, что результаты измерений принадлежат нормальному распределению, проводят с уровнем значимости от 10 до 2 %. Конкретные значения уровней значимости должны быть указаны в конкретной методике измерений.

Для определения доверительных границ погрешности оценки измеряемой величины доверительную вероятность принимают равной 0,95.

В случаях, когда измерение не представляется возможным повторить, помимо границ, соответствующих доверительной вероятности 0,95, допускается указывать границы для доверительной вероятности 0,99.

В особых случаях, например, при измерениях, результаты которых имеют значение для здоровья людей, допускается кроме доверительной вероятности 0,99 указывать более высокую доверительную вероятность.

Алгоритм обработки исправленных результатов прямых равнорассеянных измерений при количестве наблюдений $n \leq 40$ приведен на рисунке 1.1 и заключается в следующем [3].

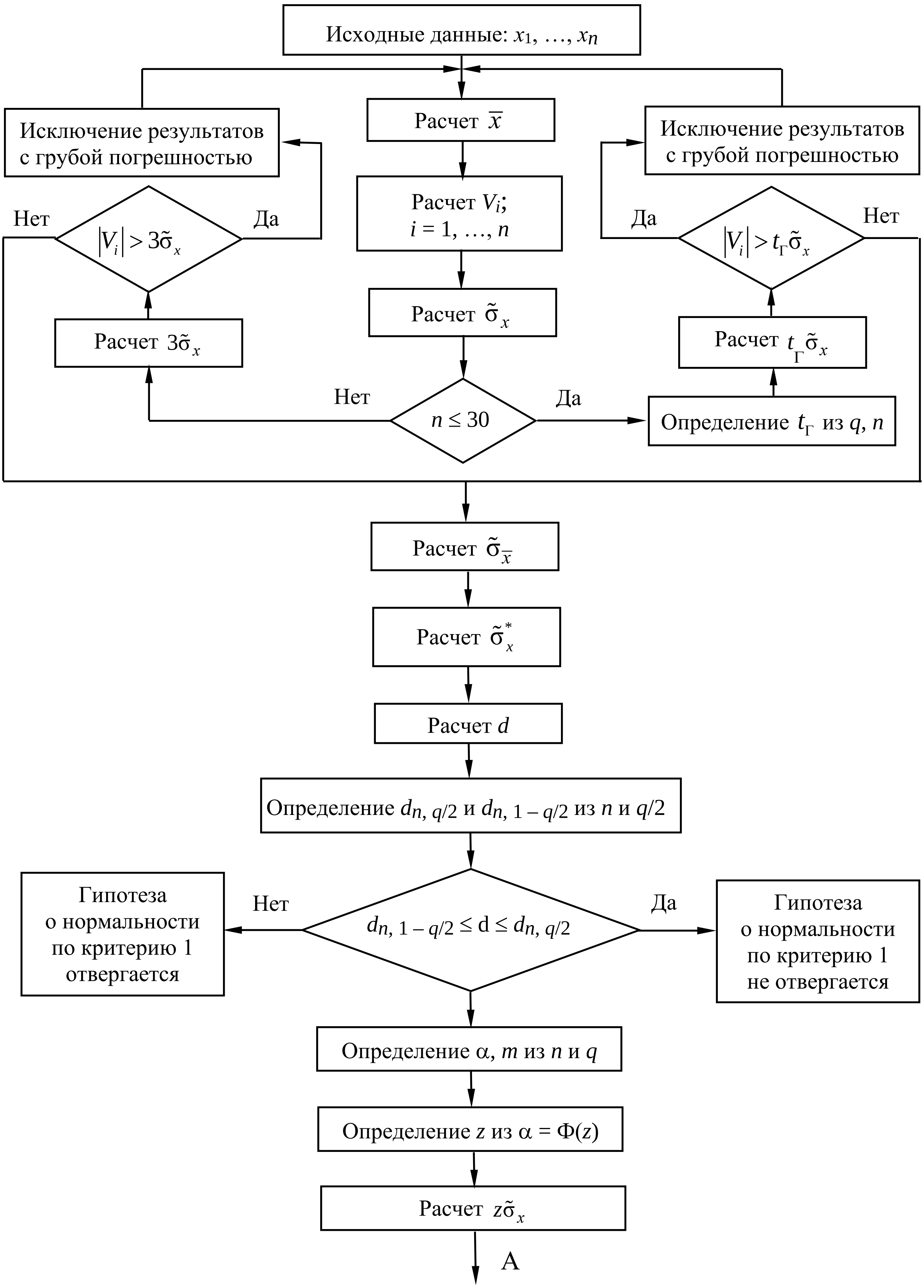


Рисунок 1.1 – Алгоритм обработки исправленных результатов прямых равнорассеянных измерений

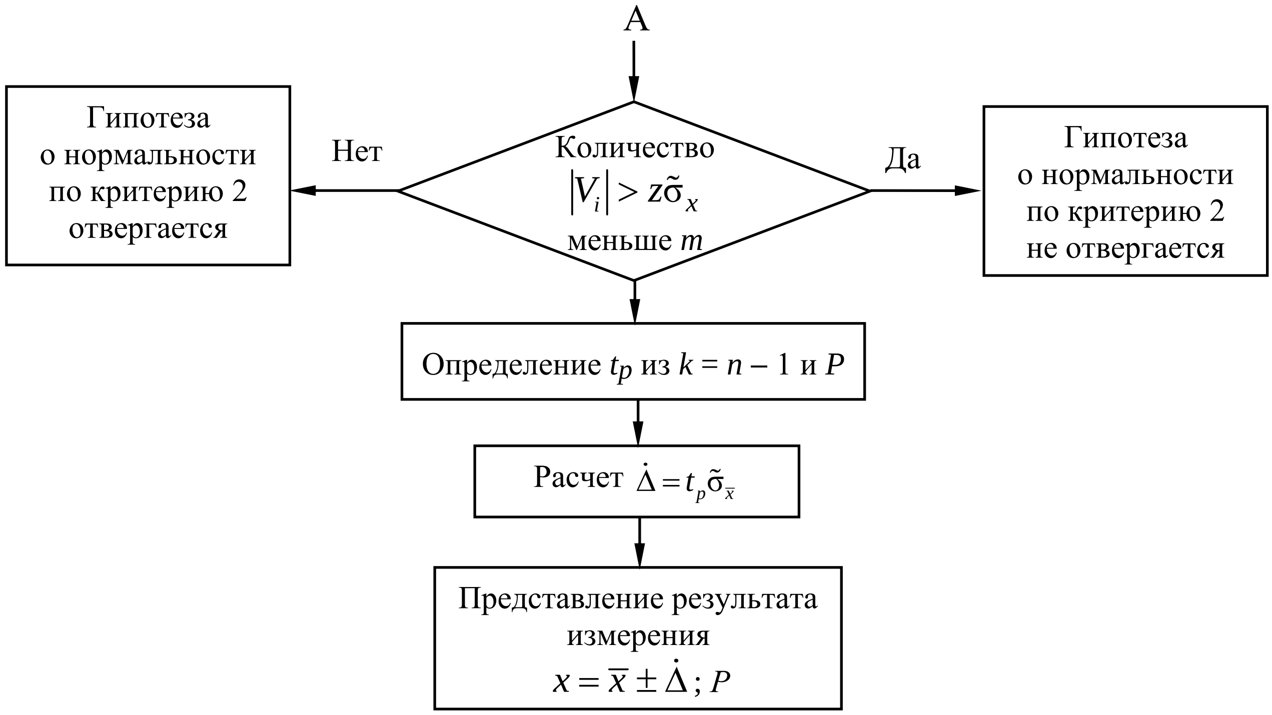


Рисунок 1.1, лист 2

1 Определяют оценку математического ожидания измеряемой величины – среднее арифметическое результатов наблюдений по формуле

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \tag{1.1}$$

где n – количество наблюдений;

X_i – i-е измеренное значение или показание в ряду из n значений.

2 Вычисляют случайные отклонения результатов наблюдений по формуле

$$V_i = X_i - \overline{X}. \tag{1.2}$$

Случайные отклонения результатов наблюдений, как и все промежуточные рассчитываемые величины, обычно округляют до трех-четырех значащих цифр.

3 Определяют выборочное стандартное отклонение, которое является оценкой среднего квадратического отклонения (СКО) по формуле

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} V_i^2}. \tag{1.3}$$

4 Определяют наличие грубых погрешностей и, если последние обнаружены, соответствующие результаты отбрасывают и повторяют вычисления в соответствии с пунктами 1–3.

При количестве наблюдений $n > 30$ используют критерий «трех сигм», суть которого заключается в том, что если

$$|V_i| \geq 3\tilde{\sigma}_x, \tag{1.4}$$

то i-е наблюдение содержит грубую погрешность и должно быть исключено при обработке результатов наблюдений.

Более строгим является критерий, который обычно используется при $n \leq 30$ и заключается в проверке гипотезы, что результат x_i не будет содержать грубой погрешности, если он является одним из значений случайной величины x с нормальным законом распределения при количестве наблюдений n. Ф. Е. Граббсом были табулированы q-процентные точки распределения максимальных по модулю отклонений результатов наблюдений от среднего значения:

$$t_\Gamma = \frac{\max|x_i - \bar{x}|}{\tilde{\sigma}_x}. \tag{1.5}$$

Значения t_Γ в зависимости от n и выбранного уровня значимости q приведены в таблице 1.1. Если

$$|V_i| > t_\Gamma \cdot \tilde{\sigma}_x, \tag{1.6}$$

то такое наблюдение содержит грубую погрешность (для уровня значимости q) и должно быть исключено при обработке результатов наблюдений.

Таблица 1.1 – Значения точек распределения t_Γ

Количество наблюдений n	Уровень значимости q				
	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1
3	1,414	1,414	1,414	1,414	1,412
4	1,732	1,730	1,728	1,710	1,689
5	1,994	1,982	1,972	1,917	1,869
6	2,212	2,183	2,161	2,067	1,996
7	2,395	2,344	2,310	2,182	2,093
8	2,547	2,476	2,431	2,273	2,172
9	2,677	2,586	2,532	2,349	2,238
10	2,788	2,680	2,616	2,414	2,294
11	2,884	2,760	2,689	2,470	2,343
12	2,969	2,830	2,753	2,519	2,387
13	3,044	2,892	2,809	2,563	2,426
14	3,111	2,947	2,859	2,602	2,461

Продолжение таблицы 1.1

15	3,171	2,997	2,905	2,638	2,494
16	3,225	3,042	2,946	2,670	2,523
17	3,274	3,083	2,983	2,701	2,551
18	3,320	3,120	3,017	2,728	2,577
19	3,361	3,155	3,049	2,754	2,601
20	3,400	3,187	3,079	2,779	2,623
21	3,436	3,217	3,106	2,801	2,644
22	3,469	3,245	3,132	2,823	2,664
23	3,500	3,271	3,156	2,843	2,683
24	3,529	3,295	3,179	2,862	2,701
25	3,556	3,318	3,200	2,880	2,718
26	3,582	3,340	3,220	2,897	2,734
27	3,606	3,360	3,239	2,913	2,749
28	3,629	3,380	3,258	2,929	2,764
29	3,651	3,399	3,275	2,944	2,778
30	3,672	3,416	3,291	2,958	2,792
31	3,692	3,433	3,307	2,972	2,805

5 Определяют выборочное стандартное отклонение среднего арифметического по формуле

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{V_i^2}{n(n-1)}} = \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}}. \tag{1.7}$$

6 При помощи составного критерия проводят проверку нормальности распределения результатов наблюдений.

Критерий 1. Исходя из результатов наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ вычисляют значения $\tilde{\sigma}_x^*$ и d по формулам

$$\tilde{\sigma}_x^* = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{V_i^2}{n}}; \qquad d = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - \bar{x}|}{n \cdot \tilde{\sigma}_x^*}. \tag{1.8}$$

Выбирают уровень значимости q и, исходя из значений q и n, находят значения точек распределения $d_{n,\, q/2}$ и $d_{n,\, 1-q/2}$ (1.8), приведенные в таблице 1.2. Считается, что гипотеза о нормальности по критерию 1 не отвергается, если

$$d_{n,\,1-q/2} \le d \le d_{n,\,q/2}. \tag{1.9}$$

В противном случае гипотеза отвергается.

Критерий 2. Принимают, что гипотеза о нормальности по критерию 2 не отвергается, если не более m случайных отклонений $|V_i|$ превзошли $z \cdot \tilde{\sigma}_x$, где z – аргумент интегральной функции нормированного нормального распределения. Значение z находится из таблицы 1.3 исходя из значения $\Phi(z)$, равного вероятности α. Значения α и m определяются по n и уровню значимости q из таблицы 1.4.

Таблица 1.2 – Значения точек распределения d

Число наблюдений n	$d_{n,\,q}$ при q			$d_{n,\,1-q}$ при q		
	0,01	0,05	0,10	0,1	0,05	0,01
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7409	0,7153	0,6675
16	0,9137	0,8884	0,8733	0,7452	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,8631	0,7495	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8686	0,8570	0,7530	0,7360	0,7040
31	0,8827	0,8625	0,8511	0,7559	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,8468	0,7583	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,8436	0,7604	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,8409	0,7621	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,8385	0,7636	0,7518	0,7291

Таблица 1.3 – Значения аргумента интегральной функции нормированного нормального распределения z

Φ(z)	z	Φ(z)	z
0,0005	–3,29	0,60	+0,25
0,005	–2,58	0,65	+0,39
0,01	–2,33	0,70	+0,52
0,05	–1,64	0,75	+0,67
0,10	–1,28	0,80	+0,84
0,15	–1,04	0,85	+1,04
0,20	–0,84	0,90	+1,28
0,25	–0,67	0,95	+1,64
0,30	–0,52	0,96	+1,75
0,35	–0,39	0,97	+1,88
0,40	–0,25	0,98	+2,05
0,45	–0,13	0,99	+2,33
0,50	–0,0000	0,995	+2,58
0,50	+0,0000	0,9995	+3,29
0,55	+0,13	–	–

Таблица 1.4 – Значения α и m

n	m	Уровень значимости q		
		0,01	0,02	0,05
10	1	0,98	0,98	0,96
11–14	1	0,99	0,98	0,97
15–20	1	0,99	0,99	0,98
21–22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96

Продолжение таблицы 1.4

24–27	2	0,98	0,98	0,97
28–32	2	0,99	0,98	0,97
33–35	2	0,99	0,98	0,98
36–49	2	0,99	0,99	0,98

Уровень значимости составного критерия

$$q_k \le q_{1k} + q_{2k}, \tag{1.10}$$

где q_{1k} и q_{2k} – уровни значимости для критериев 1 и 2 соответственно.

7 По заданной доверительной вероятности $P_д$ и числу наблюдений n определяют коэффициент Стьюдента t_p из таблицы 1.5.

8 Рассчитывают доверительные границы погрешности измерений по формуле

$$\dot{\Delta} = t_p \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}}. \tag{1.11}$$

9 Представляют результат измерений по форме

$$X = \left(\bar{X} \pm \dot{\Delta}\right) \text{ (единицы измерения)}, P_д = \ldots\ . \tag{1.12}$$

Таблица 1.5 – Значения коэффициентов Стьюдента t_p

Число степеней свободы $k = n - 1$	Доверительная вероятность $P_д$		
	0,90	0,95	0,99
1	6,314	12,706	63,657
2	2,920	4,303	9,925
3	2,353	3,182	5,841
4	2,132	2,776	4,604
5	2,015	2,571	4,032
6	1,943	2,447	3,707
7	1,895	2,365	3,499
8	1,860	2,306	3,355
9	1,833	2,262	3,250
10	1,812	2,228	3,169
11	1,796	2,201	3,106
12	1,782	2,179	3,055
13	1,771	2,160	3,012
14	1,761	2,145	2,977
15	1,753	2,131	2,947
16	1,746	2,120	2,921
17	1,740	2,110	2,898
18	1,734	2,101	2,878
19	1,729	2,093	2,861
20	1,725	2,086	2,845

Продолжение таблицы 1.5

Число степеней свободы $k = n - 1$	Доверительная вероятность $P_д$		
	0,90	0,95	0,99
21	1,721	2,080	2,831
22	1,717	2,074	2,819
23	1,714	2,069	2,807
24	1,711	2,064	2,707
25	1,708	2,060	2,787
26	1,706	2,056	2,779
27	1,703	2,052	2,771
28	1,701	2,048	2,763
29	1,699	2,045	2,756
30	1,697	2,042	2,750
∞	1,645	1,960	2,576

Точность результатов измерений и точность вычислений при обработке результатов измерений должны быть согласованы с требуемой точностью получаемой оценки измеряемой величины.

Погрешность оценки измеряемой величины следует выражать не более чем двумя значащими цифрами.

Две значащие цифры в погрешности оценки измеряемой величины сохраняют:

- при точных измерениях;
- если первая значащая цифра не более трех.

Число цифр в промежуточных вычислениях при обработке результатов измерений должно быть на две больше, чем в окончательном результате.

Погрешность при промежуточных вычислениях должна быть выражена не более чем тремя значащими цифрами.

Сохраняемую значащую цифру в погрешности оценки измеряемой величины при округлении увеличивают на единицу, если отбрасываемая цифра неуказываемого младшего разряда больше либо равна пяти, и не изменяют, если она меньше пяти.

Значащие цифры (или значащие числа) – это цифры в числовом значении, которые имеют значение для точности измерения или расчета. Понимание значащих цифр важно в научных и инженерных дисциплинах, т. к. они помогают правильно интерпретировать результаты и их точность.

1 Все ненулевые цифры являются значащими.

Например, в числе 123,45 все цифры (1, 2, 3, 4 и 5) являются значащими. Значит, это число имеет пять значащих цифр.

2 Нули между ненулевыми цифрами являются значащими.

Например, в числе 1002 есть четыре значащие цифры (1, 0, 0 и 2).

3 Нули перед ненулевыми цифрами не являются значащими.

Например, в числе 0,00456 только цифры 4, 5 и 6 являются значащими. Это число имеет три значащие цифры.

4 Нули в конце числа после запятой являются значащими.

Например, в числе 12,300 есть пять значащих цифр (1, 2, 3, 0 и еще один 0). Нули после запятой указывают на точность измерения.

5 Нули в конце целого числа без запятой не считаются значащими.

Например, в числе 1500 количество значащих цифр может быть неопределенным (может быть от двух до четырех). Чтобы уточнить количество значащих цифр, лучше использовать научную нотацию: $1{,}5 \cdot 10^3$ (две значащие цифры) или $1{,}500 \cdot 10^3$ (четыре значащие цифры).

1.2 Порядок выполнения работы

Цель работы: изучение методов и алгоритмов обработки измерительной информации при прямых равнорассеянных измерениях с помощью программного обеспечения *Labs*.

Подготовка к выполнению работы: изучить методы и алгоритм обработки измерительной информации при прямых равнорассеянных измерениях; ответить на контрольные вопросы.

Описание функций, реализуемых в программном обеспечении работы:

1) строка «*Операции над массивом*»:

- $\bar{x}$ – расчет значения по формуле $\sum_{i=1}^{n} x_i \;/\; n$, в программе задается значение n;

- V_i – расчет значения по формуле $x_i - \bar{x}$, задаются значения n, $\bar{x}$;

- $\tilde{\sigma}_x$ – расчет значения по формуле $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$, задаются значения n, $\bar{x}$;

- d – расчет значения по формуле $\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - \bar{x}|}{n \cdot \tilde{\sigma}_x^*}$, задаются значения n, $\bar{x}$, $\tilde{\sigma}_x^*$;

2) строка «*Математика*»:

- $\tilde{\sigma}_x^*$ – расчет значения по формуле $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \tilde{\sigma}_x$, задаются значения $\tilde{\sigma}_x$, n;

- $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ – расчет значения по формуле $\tilde{\sigma}_x / \sqrt{n}$, задаются значения $\tilde{\sigma}_x$, n;

- $c = a \cdot b$ – расчет произведения любых двух чисел, задаются значения a, b;

- $c = a / b$ – расчет частного любых двух чисел, задаются значения a, b;

3) строка «*Таблицы и графики*»:

- d – определение значений $d_{n,\, q/2}$ и $d_{n,\, 1-q/2}$ из количества наблюдений n и уровня значимости q;

- α – определение значений α и m из количества наблюдений n и уровня значимости q;

- z – определение значения z из $\Phi(z) = \alpha$;

- t_p – определение коэффициента Стьюдента из числа степеней свободы $k = n - 1$ и доверительной вероятности P;

- $t_Г$ – определение значения $t_Г$ из количества наблюдений n и уровня значимости q.

1.2.1 Осуществить обработку исправленных результатов прямых равнорассеянных измерений при количестве результатов наблюдений n ≤ 30.

Исходные данные для обработки приведены в таблице 1.6. В ней n – число результатов наблюдений; P – доверительная вероятность; q_{1k} – уровень значимости, используемый при определении значений $d_{n,\,q/2}$ и $d_{n,\,1-q/2}$; q_{2k} – уровень значимости, используемый при определении значений α и m; q_{3k} – уровень значимости, используемый при определении коэффициента $t_Г$. Номер бригады задает преподаватель.

На рабочем столе учебного персонального компьютера запустить ярлык программы *LABS*. В открывшемся окне (рисунок 1.2) выбрать лабораторную работу № 1 и нажать кнопку «Дальше».

В появившемся окне установить «Вариант №1», «Пункт №1» и нажать кнопку «Данные». В новом окне нажать кнопку «Добавить значение» n раз (рисунок 1.3). Отображенные в поле «Первый массив» значения $x_1, ..., x_n$ занести в таблицу 1.7. Затем нажать кнопку «Дальше». Программа примет вид, показанный на рисунке 1.4. Рассчитать значение $\bar{x}$ и занести его в таблицу 1.7. Рассчитать значения $V_1, ..., V_n$, $\tilde{\sigma}_x$ и занести их в таблицу 1.8.

Таблица 1.6 – Исходные данные для задания 1.2.1

Номер бригады	n	P	q_{1k}	q_{2k}	q_{3k}
1	28	0,95	0,1	0,02	0,01
2	24	0,99	0,02	0,01	0,005
3	26	0,95	0,2	0,05	0,05
4	22	0,99	0,02	0,01	0,01

Рисунок 1.2 – Рабочее окно при запуске программы *LABS*

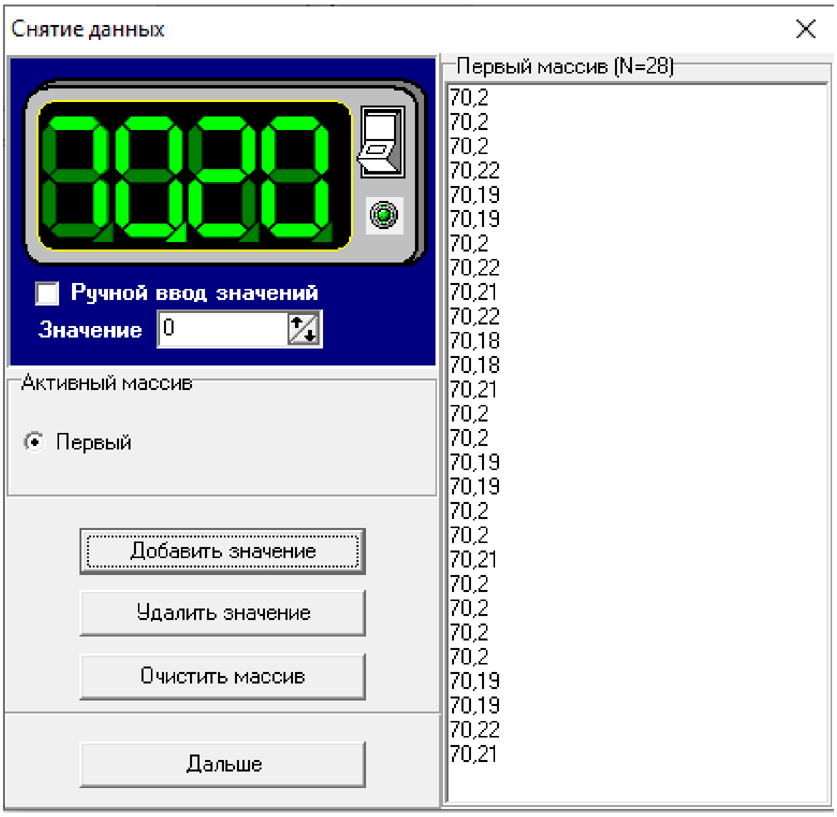


Рисунок 1.3 – Пример окна программы в режиме снятия данных

Таблица 1.7 – Значения x_1, ..., x_n и $\bar{x}$

Размерность, кОм			
x_1	...	x_n	$\bar{x}$

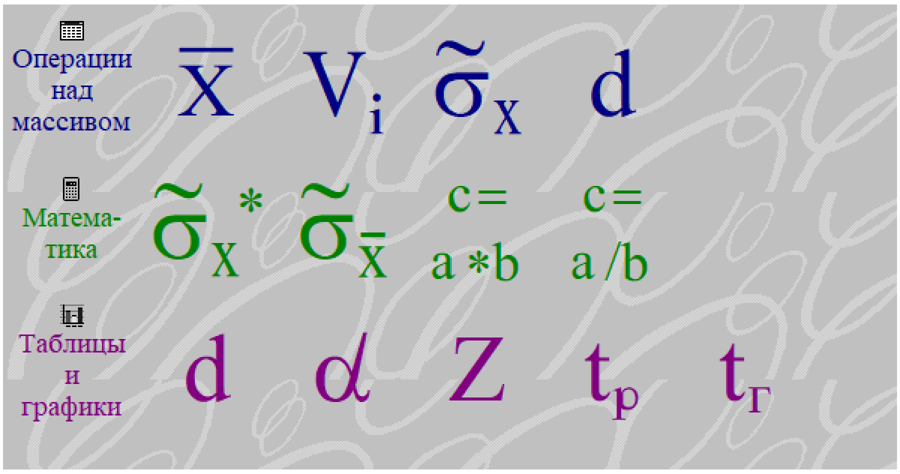


Рисунок 1.4 – Основное окно программы

Таблица 1.8 – Значения V_1, ..., V_n и $\tilde{\sigma}_x$

Размерность, кОм			
V_1	...	V_n	$\tilde{\sigma}_x$

Провести проверку наличия грубых погрешностей, определив значение $t_Г$ (рисунок 1.5), рассчитав значение $t_Г \cdot \tilde{\sigma}_x$, и занести их в таблицу 1.9. Исключаемые результаты наблюдений (если они есть) занести в таблицу 1.9 и исключить их из результатов наблюдений. Сформулировать вывод о наличии грубых погрешностей.

Значение $t_Г$ можно определить из графика, выбрав заданный уровень значимости и введя в активное окно значение n, а затем нажав «Рассчитать У», либо из таблицы слева от графика (рисунок 1.5).

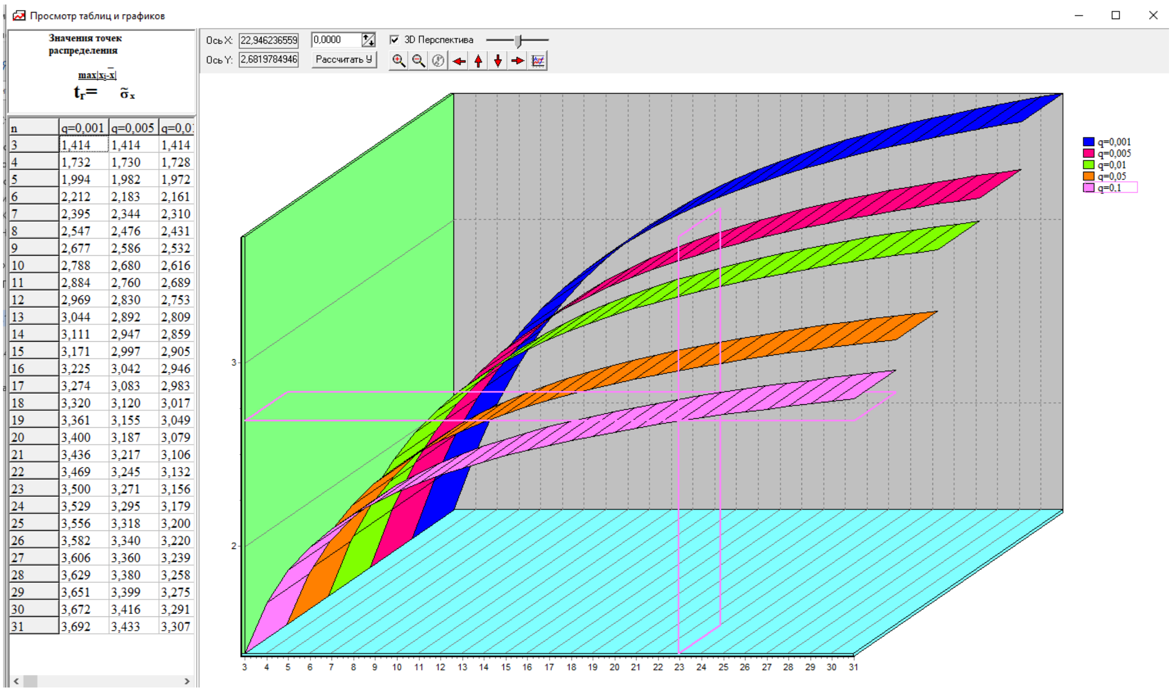


Рисунок 1.5 – Окно определения значения $t_Г$

Таблица 1.9 – Результаты проверки наличия грубых погрешностей

$t_г$	$t_г \cdot \tilde{\sigma}_x$, кОм	Исключаемые результаты наблюдений
Вывод о наличии грубых погрешностей: ______________________ (есть, нет)		

Если есть грубые погрешности, то после исключения результатов, которые их содержат, рассчитываются новые значения $\bar{x}$, $V_i, \ldots, V_{n-l}$, $\tilde{\sigma}_x$, где l – количество исключаемых результатов наблюдений. Результаты расчетов заносятся в таблицу 1.10.

Рассчитать $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ и проверить нормальность закона распределения по составному критерию. При проверке рассчитать значения $\tilde{\sigma}^*_x$, d, $z \cdot \tilde{\sigma}_x$ и найти значения $d_{n,\, q/2}$, $d_{n,\, 1-q/2}$ (рисунок 1.6), α (рисунок 1.7), z (рисунок 1.8). Результаты расчетов занести в таблицу 1.11. Сформулировать выводы о нормальности закона распределения по критериям 1, 2 и рассчитать уровень значимости составного критерия.

Таблица 1.10 – Результаты после исключения грубой погрешности

$n - l$	Размерность, кОм				
	$\bar{x}$	V_1	…	V_{n-l}	$\tilde{\sigma}_x$

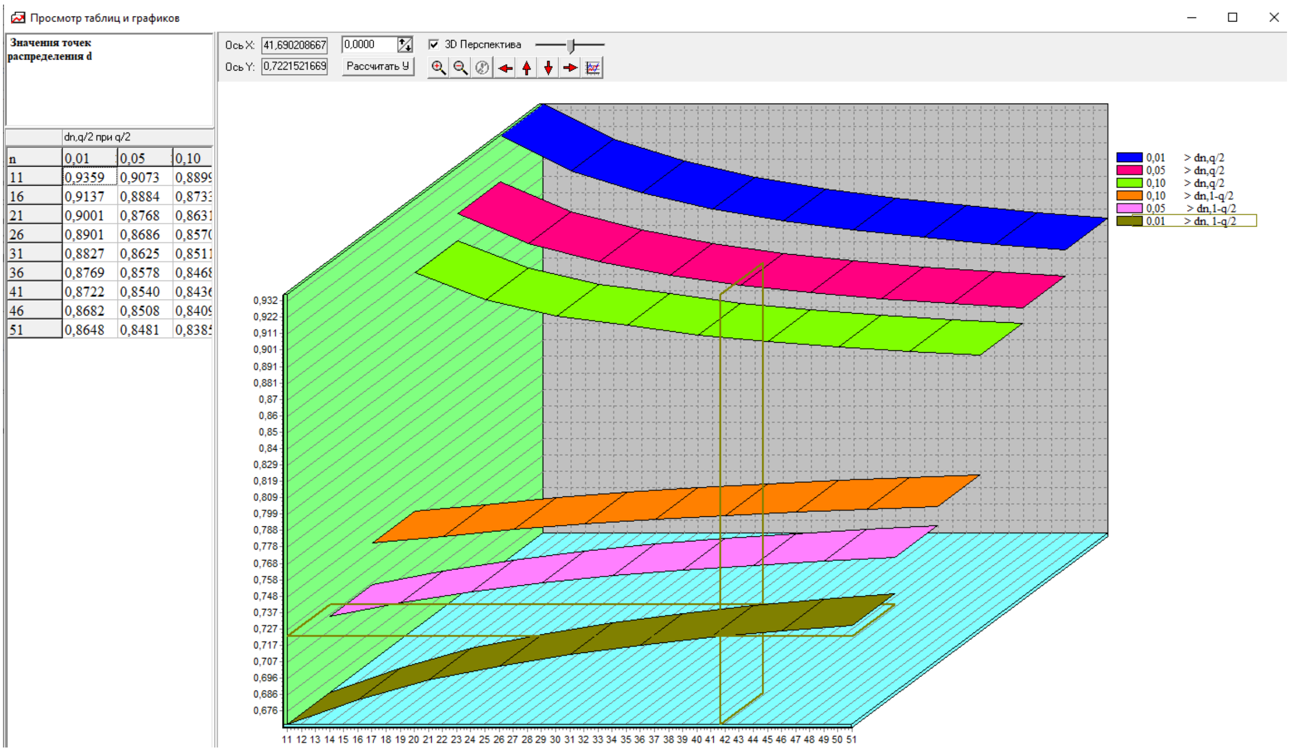


Рисунок 1.6 – Окно определения значений $d_{n,\,q/2}$ и $d_{n,\,1-q/2}$

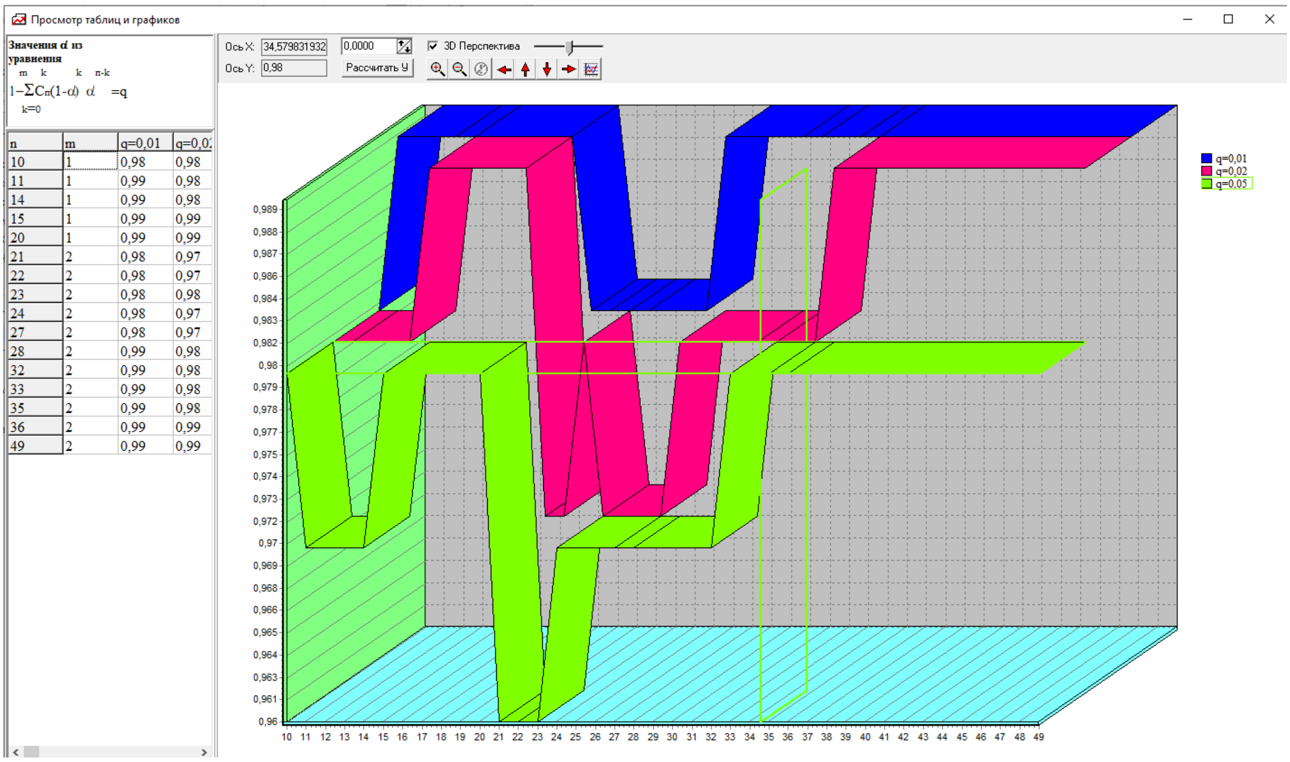


Рисунок 1.7 – Окно определения значения α

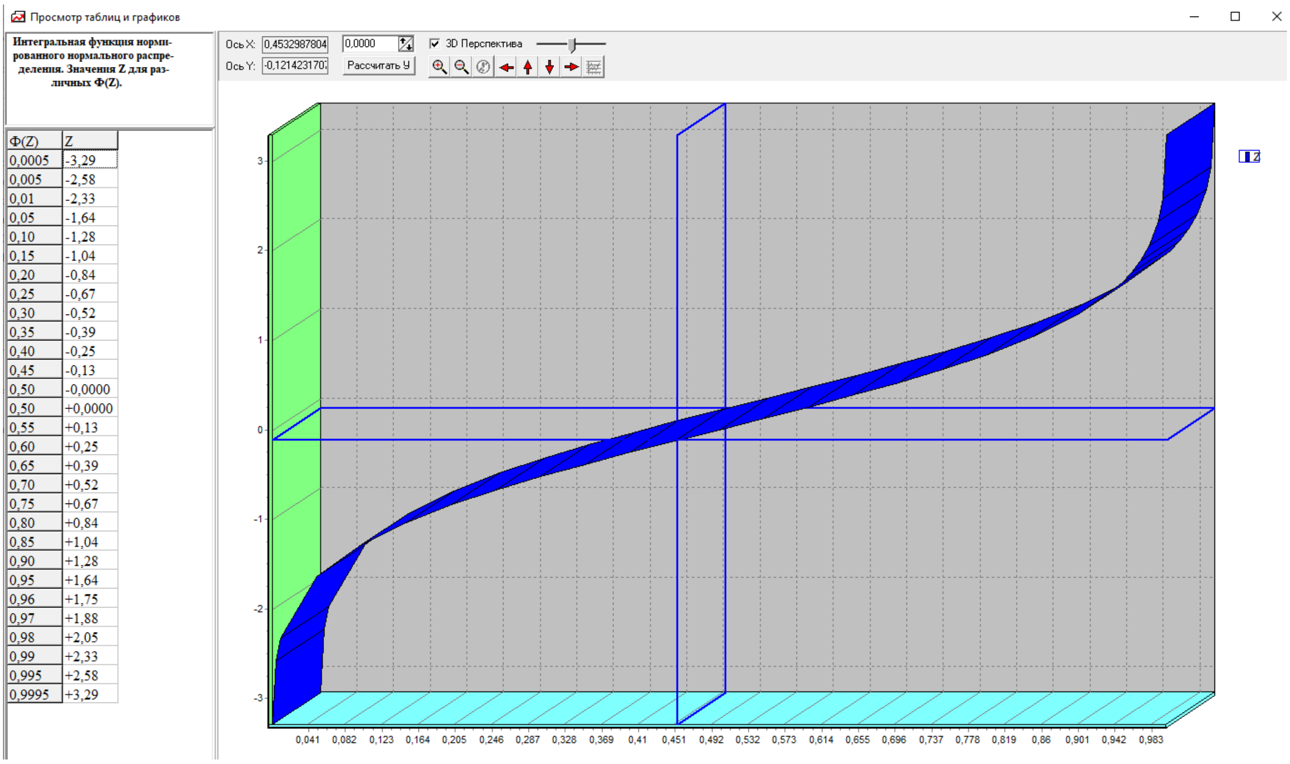


Рисунок 1.8 – Окно определения значения *z*

Таблица 1.11 – Результаты промежуточных расчетов

$\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$, кОм	$\tilde{\sigma}^*_x$, кОм	d	$d_{n,\,q/2}$	$d_{n,\,1-q/2}$	α	z	$z\cdot\tilde{\sigma}_x$, кОм
Выводы о нормальности закона распределения – по критерию 1: ____________; по критерию 2: ____________. (да, нет) (да, нет)							
Уровень значимости составного критерия: $q_k = q_{1k} + q_{2k} = ...$							

Определить значение коэффициента Стьюдента t_p (рисунок 1.9) из $k = n - 1$ и P, рассчитать значение доверительной границы $\dot{\Delta}$. В таблицу 1.12 занести значения t_p, $\dot{\Delta}$ и записать результат измерения.

Таблица 1.12 – Итоговые результаты

t_p	$\dot{\Delta}$, кОм	Результат измерения сопротивления

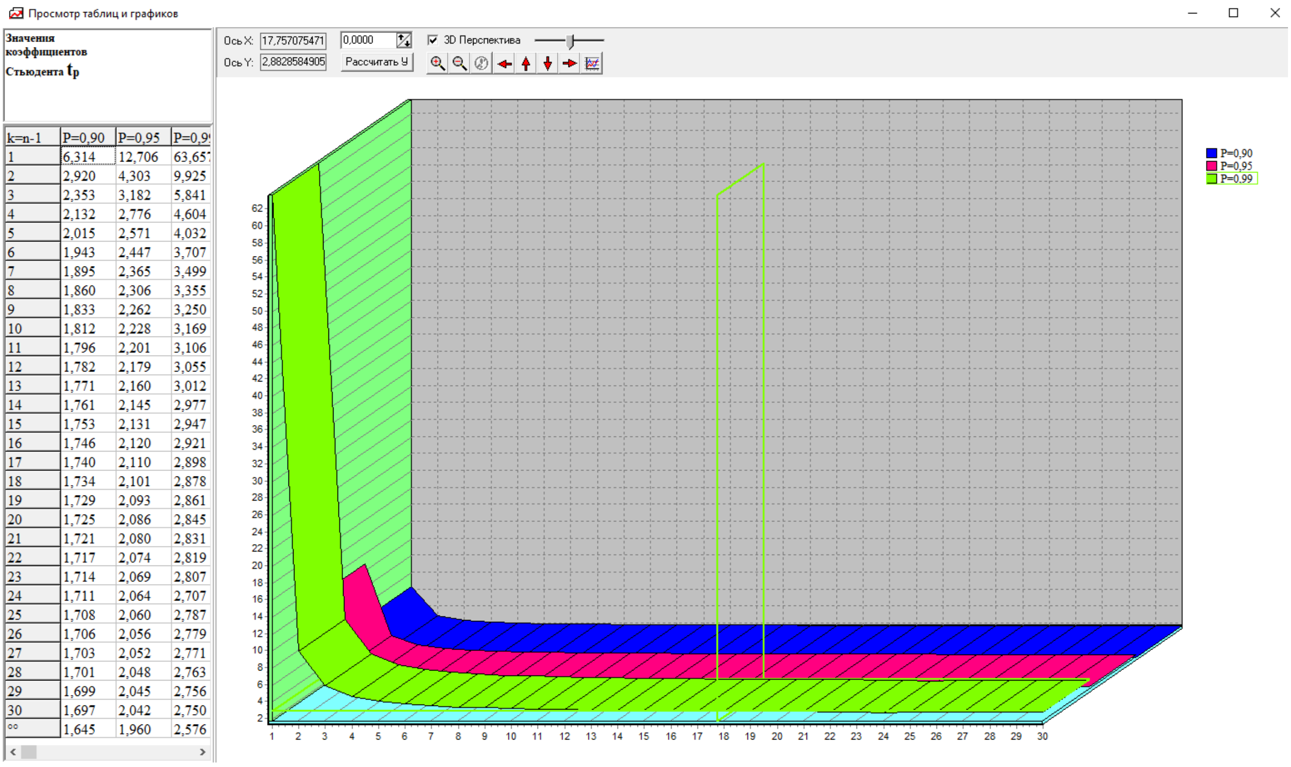


Рисунок 1.9 – Окно определения значения t_p

1.2.2 Осуществить обработку исправленных результатов прямых равнорассеянных измерений при количестве результатов наблюдений n > 30.

Исходные данные для обработки приведены в таблице 1.13.

Таблица 1.13 – Исходные данные для задания 1.2.2

Номер бригады	n	P	q_{1k}	q_{2k}
1	32	0,99	0,02	0,01
2	34	0,95	0,1	0,02
3	36	0,99	0,02	0,01
4	39	0,95	0,2	0,05

Установить в верхней строке окна программы «Пункт №1», «Вариант №2». Обработка результатов наблюдений аналогична обработке согласно пункту 1.2.1 (используются аналогичные таблицы), за исключением проверки наличия грубых погрешностей: вместо значения $t_Г \cdot \tilde{\sigma}_x$ рассчитывается значение $3 \cdot \tilde{\sigma}_x$ (таблица 1.14).

Таблица 1.14 – Результаты проверки наличия грубых погрешностей

$3 \cdot \tilde{\sigma}_x$, кОм	Исключаемые результаты наблюдений
Вывод о наличии грубых погрешностей: ____________ (есть, нет)	

Содержание отчета: отчет по лабораторной работе оформляется на стандартных листах бумаги. Текст отчета должен содержать цель работы, лабораторное задание, всю необходимую информацию о проделанной работе, выводы. Результаты расчетов сводятся в таблицы, которые должны соответствовать приведенным в методических указаниях. Отчет должен содержать алгоритмы и расчетные формулы, в соответствии с которыми осуществлялась обработка результатов наблюдений.

1.3 Контрольные вопросы

1 Какие измерения называются прямыми?

2 Какие результаты наблюдений относятся к равнорассеянным?

3 Приведите алгоритм обработки исправленных результатов прямых равнорассеянных измерений.

4 Как определяется выборочное стандартное отклонение?

5 Назовите критерии, используемые для определения грубых погрешностей.

6 Как производится проверка нормальности распределения результатов наблюдений по составному критерию?

7 Что такое коэффициент Стьюдента и как он находится?

8 По какой формуле определяются доверительные границы случайной погрешности измерений?

Лабораторная работа № 2
«Обработка результатов косвенных измерений»

2.1 Краткие теоретические сведения

Косвенное измерение – измерение, при котором искомое значение величины определяют на основании результатов прямых измерений других величин, функционально связанных с искомой величиной [1].

Обработка результатов косвенных измерений включает в себя несколько этапов и методов, направленных на получение искомой величины через измерение других, связанных с ней параметров. Основные шаги и аспекты, которые следует учитывать при обработке результатов косвенных измерений:

1 Определение модели.

Выбор модели: необходимо определить математическую модель или формулу, связывающую измеряемые параметры с искомой величиной. Это может быть линейная или нелинейная зависимость.

Физический смысл: важно понимать физический смысл модели и убедиться, что она адекватно описывает исследуемый процесс.

2 Сбор данных.

Измерение параметров: проведение прямых измерений всех необходимых параметров с использованием соответствующих инструментов.

Калибровка инструментов: необходимо убедиться, что все используемые инструменты откалиброваны и дают точные результаты.

3 Анализ погрешностей.

Оценка погрешностей каждого из измеряемых параметров может включать как систематические, так и случайные погрешности.

4 Расчет искомой величины.

Подстановка значений: необходимо подставить полученные значения измеряемых параметров в выбранную модель для вычисления искомой величины.

Использование программного обеспечения: для сложных расчетов может быть полезно использовать специализированное программное обеспечение (например, *MATLAB*, *Python*) для автоматизации процесса.

5 Статистический анализ.

Статистическая обработка данных: необходимо применять статистические методы для анализа полученных результатов. Это может быть расчет средних значений, стандартных отклонений и доверительных интервалов.

Регрессионный анализ: если данные позволяют, необходимо провести регрессионный анализ для выявления зависимостей между переменными.

6 Визуализация результатов.

Графическое представление: можно построить графики или диаграммы для визуализации полученных данных и зависимостей между переменными.

Анализ графиков: необходимо использовать визуализацию для выявления закономерностей и аномалий в данных.

7 Интерпретация результатов.

Физическая интерпретация: необходимо проанализировать полученные результаты с точки зрения физического смысла и контекста исследования.

Сравнение с теорией: сравнение результатов с теоретическими предсказаниями или данными из источников.

8 Документация процесса.

Запись всех этапов: необходимо тщательно документировать все этапы обработки данных, включая используемые методы, формулы и результаты.

Отчетность: подготовка отчета о проведенном исследовании с описанием методов обработки и полученных результатов.

9 Проверка достоверности.

Верификация результатов: при возможности необходимо проверить полученные результаты с помощью независимых методов или экспериментов.

Обсуждение ограничений: обсуждение возможных ограничений использованного подхода и источников ошибок.

Эти шаги помогут обеспечить надежность и достоверность результатов косвенных измерений, что особенно важно в научных исследованиях и инженерной работе.

Вначале рассмотрим простейший случай, когда искомая величина y определяется как сумма двух величин x_1 и x_2:

$$y = x_1 + x_2. \tag{2.1}$$

Поскольку результаты прямых измерений величин x_1 и x_2 (после исключения систематических погрешностей) включают в себя некоторые случайные погрешности, то формулу косвенного измерения суммы можно переписать в виде

$$\bar{y} + \lambda_{\bar{y}} \le \bar{x}_1 + \lambda_{\bar{x}_1} + \bar{x}_2 + \lambda_{\bar{x}_2}, \tag{2.2}$$

где $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ – средние арифметические (или средние взвешенные), полученные при обработке результатов прямых измерений величин x_1, x_2;

$\lambda_{\bar{x}_1}, \lambda_{\bar{x}_2}$ – случайные погрешности этих величин;

$\bar{y}, \lambda_{\bar{y}}$ – оценка истинного значения косвенно измеряемой величины и ее случайная погрешность [3].

Из уравнения (2.2) непосредственно вытекает справедливость двух последних равенств: $\bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, $\lambda_{\bar{y}} = \lambda_{\bar{x}_1} + \lambda_{\bar{x}_2}$, т. е. оценкой истинного значения косвенно измеряемой величины должна служить сумма оценок истинных значений исходных величин, случайные погрешности которых складываются.

Математическое ожидание оценки $\bar{y}$ равно сумме истинных значений величин $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ и, следовательно, является истинным значением измеряемой величины y:

$$M\left[\bar{y}\right] = M\left[\bar{x}_1 + \bar{x}_2\right] = M\left[\bar{x}_1\right] + M\left[\bar{x}_2\right], \tag{2.3}$$

и ее дисперсия составляет:

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = D\left[\bar{y}\right] = D\left[\lambda_{\bar{y}}\right] = D\left[\lambda_{\bar{x}_1} + \lambda_{\bar{x}_2}\right] = M\left[\left(\lambda_{\bar{x}_1} + \lambda_{\bar{x}_2}\right)^2\right] = M\left[\lambda_{\bar{x}_1}^2 + \lambda_{\bar{x}_2}^2 + 2\lambda_{\bar{x}_1}\lambda_{\bar{x}_2}\right] =$$
$$= M\left[\lambda_{\bar{x}_1}^2\right] + M\left[\lambda_{\bar{x}_2}^2\right] + 2M\left[\lambda_{\bar{x}_1}\lambda_{\bar{x}_2}\right] = \sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2 + 2M\left[\lambda_{\bar{x}_1}\lambda_{\bar{x}_2}\right].$$

Математическое ожидание произведения случайных погрешностей называется ***корреляционным моментом*** и определяет степень «тесноты» линейной зависимости между погрешностями. Вместо корреляционного момента часто пользуются безразмерной величиной – ***коэффициентом корреляции***:

$$r_{\bar{x}_1\bar{x}_2} = \frac{M\left[\lambda_{\bar{x}_1}\lambda_{\bar{x}_2}\right]}{\sigma_{\bar{x}_1}\sigma_{\bar{x}_2}}. \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что коэффициент корреляции между погрешностями λ_{x_1} и λ_{x_2} средних арифметических равен коэффициенту корреляции между погрешностями результатов отдельных измерений величин x_1, x_2: $r_{\bar{x}_1\bar{x}_2} = r_{x_1x_2}$.

С учетом коэффициента корреляции СКО результата косвенных измерений, т. е. оценки истинного значения косвенно измеряемой величины, будет

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2 + 2r_{x_1x_2} \cdot \sigma_{\bar{x}_1} \cdot \sigma_{\bar{x}_2}}. \tag{2.5}$$

Если погрешности измерения величин x_1, x_2 не коррелированы, то выражение (2.5) упрощается:

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}. \tag{2.6}$$

В тех случаях, когда теоретические СКО результатов прямых измерений неизвестны, определяется оценка СКО результата косвенных измерений $\tilde{\sigma}_{\bar{y}}$ через оценки СКО $\tilde{\sigma}_{\bar{x}_1}$ и $\tilde{\sigma}_{\bar{x}_2}$:

$$\tilde{\sigma}_{\bar{y}} = \sqrt{\tilde{\sigma}_{\bar{x}_1}^2 + \tilde{\sigma}_{\bar{x}_2}^2 + 2\tilde{r}_{x_1x_2} \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}_1} \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}_2}}. \tag{2.7}$$

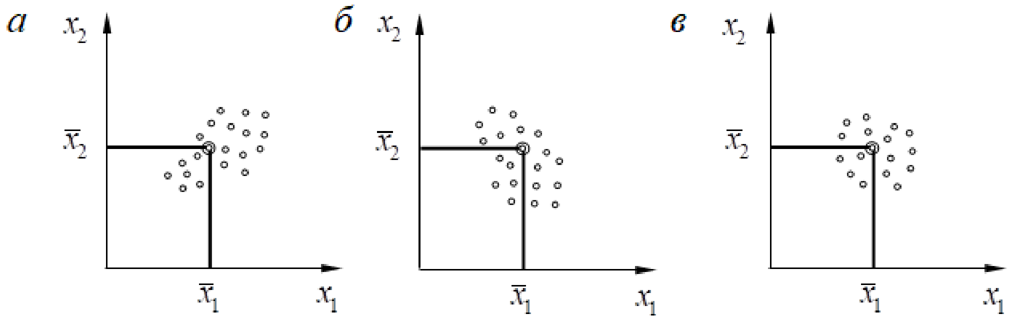
Оценки коэффициента корреляции $\tilde{r}_{x_1 x_2}$ вычисляют на основании результатов прямых измерений исходных величин:

$$\tilde{r}_{x_1 x_2} = \frac{1}{(n_{\min} - 1)\cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}_1} \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}_2}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{\min}} (x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{i2} - \bar{x}_2), \tag{2.8}$$

где $n_{\min}$ – наименьшее из чисел наблюдений n_1 и n_2 .

При положительной корреляции, т. е. когда $\tilde{r}_{x_1 x_2} > 0$, одна из погрешностей имеет тенденцию возрастать при увеличении другой, если же корреляция отрицательна, т. е. $\tilde{r}_{x_1 x_2} < 0$, то и погрешность измерения одной величины обнаруживает тенденцию к уменьшению при увеличении погрешности измерения другой величины. Возможные значения коэффициента корреляции лежат в интервале $-1 \le \tilde{r}_{x_1 x_2} \le +1$. Если $\tilde{r}_{x_1 x_2} = 0$, то погрешности измерения не коррелированы [4].

О наличии корреляции удобно судить по графику, на котором в координатах x_1, x_2 изображены пары последовательно получаемых результатов измерения величин x_1, x_2. На рисунке 2.1 изображены случаи совместного распределения результатов измерения при положительной (рисунок 2.1, *а*) и отрицательной (рисунок 2.1, *б*) корреляции. Результаты измерений на рисунке 2.1, *в* не коррелированы.



а – положительная корреляция; *б* – отрицательная корреляция;
в – результаты измерений не коррелированы

Рисунок 2.1 – Распределения результатов измерения при различных видах корреляции

Чаще всего наличия корреляции следует ожидать в тех случаях, когда обе величины измеряются одновременно однотипными средствами измерений, причем измерения внешних влияющих величин (электрических, магнитных, температурных, условий питания и пр.) одновременно заметно влияют на формирование случайных погрешностей их измерения. В некоторых случаях причиной корреляции между результатами измерений может стать сам проводящий измерения, т. к. искусство и опыт наблюдателя оказывают значительное влияние на результаты измерений.

В тех же случаях, когда исходные величины измеряют с помощью различных средств измерения в разное время, можно ожидать, что результаты, если и будут коррелированы, то очень мало, и коэффициентом корреляции в выражениях (2.5) и (2.7) можно пренебречь.

Рассмотренные выражения можно использовать и в том случае, когда искомая величина является суммой m измеряемых прямыми способами величин:

$$y = \sum_{j=1}^{m} x_j. \tag{2.9}$$

В этом случае в качестве наиболее достоверной оценки $\bar{y}$ принимается сумма оценок $\bar{x}_j$:

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j, \tag{2.10}$$

а СКО оценки итогового результата находятся по формуле

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_{\bar{x}_j}^2 + 2\sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{m} \sigma_{\bar{x}_k} \cdot \sigma_{\bar{x}_l} \cdot r_{x_k x_l}}, \tag{2.11}$$

где $\sigma_{\bar{x}_j}$ – СКО j-го слагаемого;

$r_{x_k x_l}$ – коэффициент корреляции между случайными погрешностями k-го и l-го слагаемых.

При неизвестных СКО слагаемых в выражение (2.11) следует подставлять их оценки $\tilde{\sigma}_{\bar{x}_j}$, а оценки коэффициентов корреляции вычисляются по формуле

$$\tilde{r}_{x_k x_l} = \frac{1}{(n_{\min} - 1)\tilde{\sigma}_{\bar{x}_k} \tilde{\sigma}_{\bar{x}_l}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{\min}} (x_{ki} - \bar{x}_k)(x_{li} - \bar{x}_l), \tag{2.12}$$

где $n_{\min}$ – наименьшее из чисел наблюдения x_k и x_l.

Если исходные измерения независимы, то все коэффициенты корреляции равны нулю и СКО оценки y определяются из более простого выражения:

$$\tilde{\sigma}_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \tilde{\sigma}_{\bar{x}_j}^2}. \tag{2.13}$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда требуется оценить истинное значение величины $\bar{y}$, которая связана с величинами x_j (j = 1, …, m), измеряемыми прямыми способами, некоторым нелинейным уравнением:

$$y = F(x_1, \ ..., \ x_m). \tag{2.14}$$

Найдем такие оценки истинных значений $\bar{x}_j$, измеряемых прямыми способами величин x_j, которые, будучи подставлены в уравнение (2.14), давали бы оценку $\bar{y}$ истинного значения косвенно измеряемой величины, обладающую наименьшей дисперсией и, следовательно, наибольшей точностью по сравнению со всеми другими мыслимыми оценками. Поскольку эти оценки связаны с соответствующими случайными погрешностями, то можно записать равенство

$$\bar{y} + \lambda_{\bar{y}} = F[(\bar{x}_1 + \lambda_{\bar{x}_1}); ...; (\bar{x}_m + \lambda_{\bar{x}_m})], \tag{2.15}$$

где $\lambda_{\bar{y}}$ – случайная погрешность оценки $\bar{y}$;

$\lambda_{\bar{x}_j} (j = 1, \ ..., \ m)$ – случайная погрешность оценки $\bar{x}_j$.

Естественно предположить, что относительные случайные погрешности оценок малы по сравнению с единицей:

$$\frac{\lambda_{\bar{x}_j}}{\bar{x}_j} << 1. \tag{2.16}$$

Тогда уравнение (2.15) можно разложить в m-мерный ряд Тейлора по степеням случайных погрешностей. Ограничимся только первой степенью:

$$\bar{y} + \lambda_{\bar{y}} = F(\bar{x}_1; \ ...; \ \bar{x}_m) + \sum_{j=1}^{m} (\frac{\partial F}{\partial x_j}) \lambda_{\bar{x}_j}. \tag{2.17}$$

Полученное таким образом равенство сводится к следующим двум:

$$\bar{y} = F(\bar{x}_1; ...; \bar{x}_m); \ \lambda_{\bar{y}} = \sum_{j=1}^{m} (\frac{\partial F}{\partial x_j}) \lambda_{\bar{x}_j}. \tag{2.18}$$

Вычислим теперь дисперсию $\sigma_{\bar{y}}^2$ случайной погрешности $\lambda_{\bar{y}}$ оценки $\bar{y}$:

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = D\left[\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) \lambda_{\bar{x}_j}\right] = M\left[\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) \lambda_{\bar{x}_j}\right]^2 = \sum_{k, \ l=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x_l}\right) \cdot M[\lambda_{\bar{x}_k} \cdot \lambda_{\bar{x}_l}]. \tag{2.19}$$

Для математических ожиданий произведений $M[\lambda_{\bar{x}_k}\lambda_{\bar{x}_l}]$ случайных погрешностей имеем

$$M[\lambda_{\bar{x}_k}\lambda_{\bar{x}_l}] = \begin{cases} \sigma^2_{\bar{x}_k} = \sigma^2_{\bar{x}_l}; \ \ k = l; \\ 2\sigma_{\bar{x}_k}\sigma_{\bar{x}_l} r_{x_k x_l}; \ \ k \neq l. \end{cases} \tag{2.20}$$

Поэтому можно записать

$$\tilde{\sigma}_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2 \tilde{\sigma}^2_{\bar{x}_j} + 2\sum_{\substack{k,\ l=1 \\ k \neq l}}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x_l}\right)\tilde{\sigma}_{\bar{x}_k}\tilde{\sigma}_{\bar{x}_l} \cdot \tilde{r}_{x_k x_l}}. \tag{2.21}$$

Поскольку коэффициенты корреляции $\tilde{r}_{x_k x_l}$ не зависят от значений оценок $\tilde{x}_k$ и $\tilde{x}_l$, то из выражения (2.21) следует, что дисперсия оценки косвенно измеряемой величины достигает минимума в том случае, когда из возможных оценок исходных величин выбраны те, дисперсии которых минимальны. Такими оценками для измеряемых прямыми способами величин являются средние арифметические соответствующих рядов наблюдений.

Произведения частных производных уравнения косвенного измерения и СКО результатов измерения соответствующих аргументов называются частными погрешностями косвенного измерения:

$$E_{\bar{x}_j} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)\sigma_{\bar{x}_j}. \tag{2.22}$$

Таким образом, в качестве наиболее достоверного значения $\bar{y}$ косвенно измеряемой величины y следует понимать значение, получаемое подстановкой в формулу (2.14) косвенного измерения средних арифметических $\bar{x}_j$ рядов измерений искомых величин, т. е. путем применения формулы (2.18); СКО этой оценки определяется из формулы

$$\tilde{\sigma}_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\tilde{E}^2_{\bar{x}_j} + 2\sum_{\substack{k,\ l=1 \\ k \neq l}}^{m}\tilde{E}_{\bar{x}_k} \cdot \tilde{E}_{\bar{x}_l} \cdot \tilde{r}_{x_k x_l}}, \tag{2.23}$$

причем значения частных производных вычисляются при средних арифметических значениях аргументов $\bar{x}_j$.

Распределение результата косвенных измерений будет нормальным, если нормальны распределения результатов прямых измерений. В этих условиях для вычисления доверительного интервала случайной погрешности $\dot{\Delta}$ по формуле

$$\dot{\Delta} = t_p \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{y}} \qquad (2.24)$$

используется значение коэффициента t_p, прямо выбираемое из таблицы 1.5 при количестве измерений $n > 30$. Если же $n \le 30$, предварительно должно быть определено «эффективное» число степеней свободы, которое затем учитывается при определении t_p из таблицы 1.5 [5]:

$$k_э = n_э - 1 = \left(\sum_{j=1}^{m} \tilde{E}_{\bar{x}_j} \tilde{\delta}_{\bar{x}_j} \right)^2 / \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j - 1} \cdot E^2_{\bar{x}_j} \cdot \tilde{\delta}^2_{\bar{x}_j} \right), \qquad (2.25)$$

где n_j – число прямых измерений величины x_j;

$\tilde{\delta}_{\bar{x}_j} = \tilde{\sigma}_{\bar{x}_j} / \bar{x}_j$.

Не все частные погрешности косвенного измерения оказывают одинаковое влияние на формирование итоговой погрешности результата косвенного измерения. Некоторые из них могут быть значительно меньше других, а поскольку значение погрешности все равно должно округляться до двух значащих цифр, они не будут оказывать заметного влияния на значение погрешности.

Если в равенстве

$$\tilde{\sigma}_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \tilde{E}^2_{\bar{x}_j}}$$

и k-я частная погрешность такова, что

$$\tilde{\sigma}_{\bar{y}} < 1,05 \sqrt{\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{m} \tilde{E}^2_{\bar{x}_j}}, \qquad (2.26)$$

то этой погрешностью можно пренебречь, поскольку при округлении уже 1,0499… принимается за 1,0.

Возведя обе части неравенства (2.26) в квадрат и приняв во внимание, что

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{m} \tilde{E}^2_{\bar{x}_j} = \tilde{\sigma}^2_{\bar{y}} - \tilde{E}^2_{\bar{x}_k},$$

получим

$$\tilde{\sigma}^2_{\bar{y}} < 1,1025 \left(\tilde{\sigma}^2_{\bar{y}} - \tilde{E}^2_{\bar{x}_k} \right),$$

откуда следует, что частными погрешностями, меньшими

$$\tilde{E}^2_{\bar{x}_k} < 0,306 \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{y}},$$

можно пренебречь. Округлив последнее неравенство, получим

$$\tilde{E}_{\bar{x}_k} < \frac{1}{3}\tilde{\sigma}_{\bar{y}}. \tag{2.27}$$

Эта формула в метрологии называется критерием ничтожных погрешностей, а сами погрешности, отвечающие условию (2.27), называются ничтожными или ничтожно малыми.

Критерий ничтожных погрешностей – это метод, используемый для оценки того, насколько можно пренебречь погрешностями измерений в определенных условиях. Он позволяет определить, являются ли погрешности измерений достаточно малыми, чтобы не оказывать значительного влияния на результаты расчетов или выводы.

Критерий ничтожных погрешностей устанавливает границы, в пределах которых погрешности можно считать несущественными. Это может быть выражено в виде соотношения между величиной погрешности и самой измеряемой величиной.

Обычно критерий формулируется как отношение относительной погрешности измерения к некоторому заранее установленному порогу. Например, если относительная погрешность меньше определенного значения (например, 1 или 5 %), то ее можно считать ничтожной.

Критерий используется в различных областях науки и техники для упрощения расчетов и анализа данных. Например, в физике и инженерии он может применяться при анализе сложных систем, где множество параметров могут иметь небольшие погрешности.

Пример: пусть у нас есть измерение длины L с относительной погрешностью $\Delta L / L = 0{,}01$ (1 %). Если эта длина используется для расчета объема $V = L^3$, то относительная погрешность объема будет равна $3(\Delta L / L)$. В этом случае, если $\Delta L / L$ меньше 0,01, можно сказать, что влияние погрешности на объем также будет незначительным.

Критерий ничтожных погрешностей не всегда применим. В некоторых случаях даже небольшие ошибки могут привести к значительным последствиям (например, в высокоточных измерениях или критически важных приложениях).

Также важно учитывать контекст: в одних ситуациях небольшие погрешности могут быть приемлемыми, а в других – недопустимыми.

При использовании критерия необходимо различать систематические и случайные погрешности. Систематические погрешности могут требовать корректировки результатов, тогда как случайные погрешности могут быть оценены с помощью статистических методов.

Критерий ничтожных погрешностей является полезным инструментом для упрощения анализа данных и принятия решений о том, какие измерения и расчеты можно считать надежными без учета малозначительных погрешностей. Однако его применение требует внимательного подхода и понимания контекста исследования или задачи.

Формула (2.27) легко распространяется на случай нескольких погрешностей и приводит к следующему критерию ничтожности суммы квадратов частных погрешностей $\tilde{E}_{\bar{x}_k}, \tilde{E}_{\bar{x}_{k+1}}, \ldots$:

$$\sqrt{\tilde{E}_{\bar{x}_k}^2 + \tilde{E}_{\bar{x}_{k+1}}^2 + \ldots} < \frac{1}{3}\tilde{\sigma}_{\bar{y}}. \qquad (2.28)$$

Использование критерия ничтожных погрешностей позволяет найти те величины, повышение точности измерения которых позволяет уменьшить суммарную погрешность результата. Очевидно, не имеет смысла повышать точность измерения тех величин, частные погрешности которых и без того ничтожно малы.

Алгоритм обработки результатов косвенных измерений приведен на рисунке 2.2.

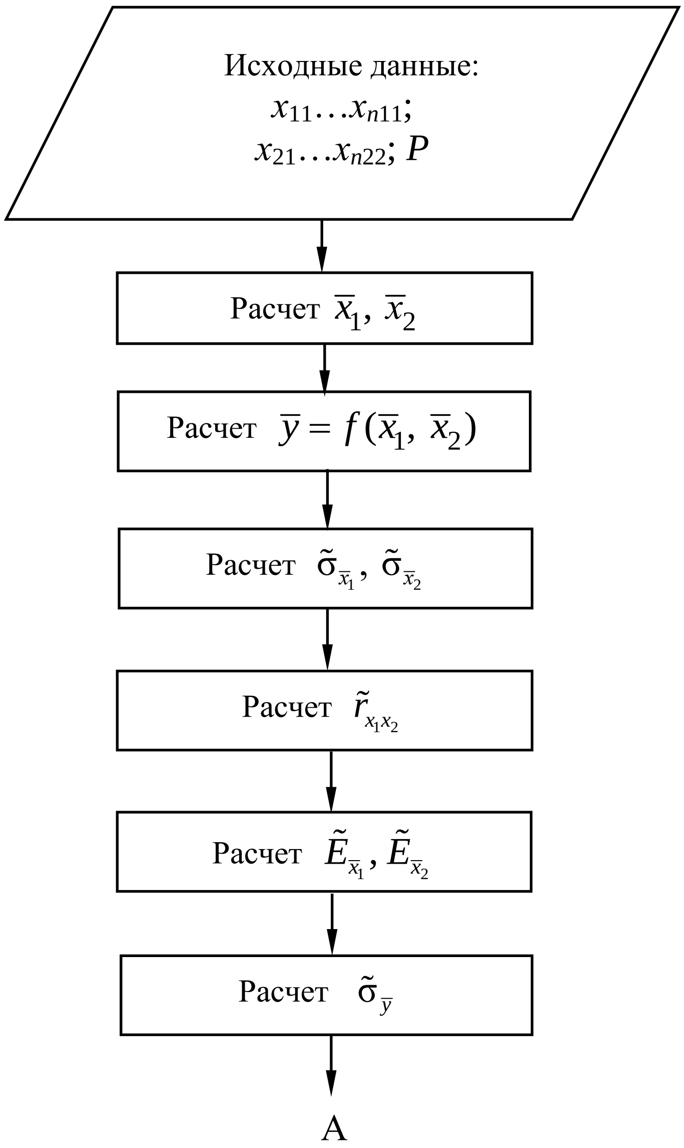


Рисунок 2.2 – Алгоритм обработки результатов косвенных измерений

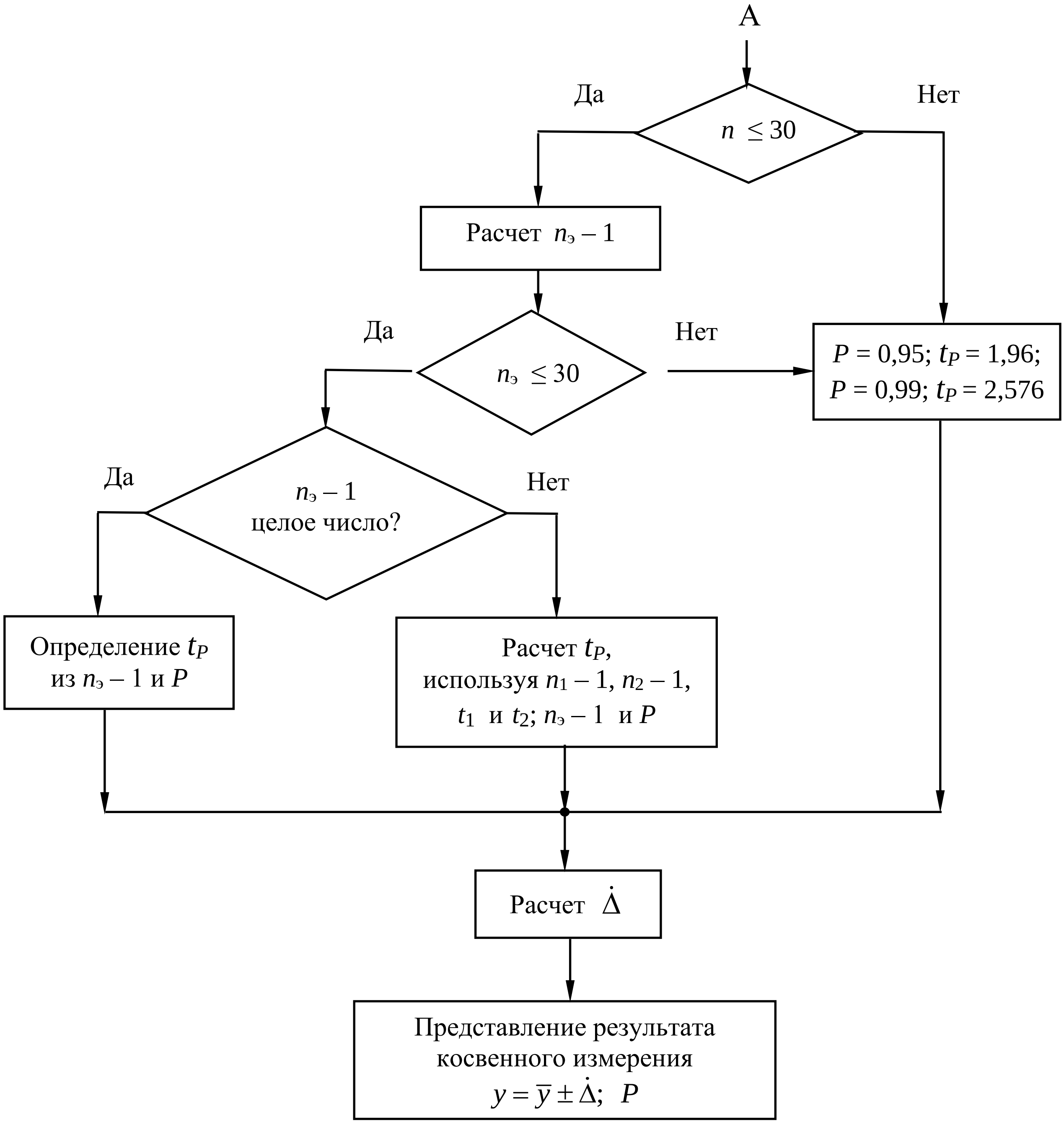


Рисунок 2.2, лист 2

2.2 Порядок выполнения работы

Цель работы: изучение методов и алгоритмов обработки результатов косвенных измерений с помощью программного обеспечения *Labs*.

Подготовка к выполнению работы: изучить методы и алгоритмы обработки измерительной информации при косвенных измерениях (рекомендуемая литература, настоящий лабораторный практикум); ответить на контрольные вопросы.

Описание функций, реализуемых в программном обеспечении работы:

1) строка «*Операции над массивом*»:

- $\bar{x}$ – расчет значений $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ по формуле $\sum_{i=1}^{n} x_i / n$, в программе задается значение n;

- $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ – расчет значения по формуле $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 / [n(n-1)]}$, задаются значения n, $\bar{x}$;

- $\tilde{r}_{x_1 x_2}$ – расчет значения по формуле $\sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) / [(n-1)\tilde{\sigma}_{\bar{x}_1} \tilde{\sigma}_{\bar{x}_2}]$, задаются значения $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, n, $\tilde{\sigma}_{\bar{x}_1}$, $\tilde{\sigma}_{\bar{x}_2}$;

2) строка «*Математика*»:

- $\tilde{\delta}_{\bar{Q}}$ – расчет значения по формуле $\sqrt{\tilde{E}^2_{\bar{x}_1} + \tilde{E}^2_{\bar{x}_2} + 2\tilde{E}_{\bar{x}_1} \cdot \tilde{E}_{\bar{x}_2} \cdot \tilde{r}_{x_1 x_2}}$, задаются значения $\tilde{E}_{\bar{x}_1}$, $\tilde{E}_{\bar{x}_2}$, $\tilde{r}_{x_1 x_2}$;

- $n_э - 1$ – расчет значения по формуле $\dfrac{(\tilde{E}_{\bar{x}_1} \cdot \delta_{\bar{x}_1} + \tilde{E}_{\bar{x}_2} \cdot \delta_{\bar{x}_2})^2 \cdot (n-1)}{(\tilde{E}^2_{\bar{x}_1} \cdot \delta^2_{\bar{x}_1} + \tilde{E}^2_{\bar{x}_2} \cdot \delta^2_{\bar{x}_2})}$, задаются значения $\tilde{E}_{\bar{x}_1}$, $\tilde{E}_{\bar{x}_2}$, $\delta_{\bar{x}_1}$, $\delta_{\bar{x}_2}$;

- t_p – расчет значения по формуле $\dfrac{t_2 - t_1}{(n_2 - 1) - (n_1 - 1)}(n_э - 1) + \dfrac{t_1(n_2 - 1) - t_2(n_1 - 1)}{(n_2 - 1) - (n_1 - 1)}$, задаются значения $n_1 - 1$; t_1; $n_2 - 1$; t_2; $n_э - 1$;

- $c = a \cdot b$ – расчет произведения любых двух чисел, задаются значения a, b;

- $c = a / b$ – расчет частного любых двух чисел, задаются значения a, b;

- $c = a \cdot b / d^2$ – расчет произведения любых двух чисел, деленных на квадрат третьего числа, задаются значения a, b, d;

3) строка «*Таблицы и графики*»:

- t_p – определение коэффициента Стьюдента из числа степеней свободы $k = n - 1$ и доверительной вероятности P.

2.2.1 Осуществить обработку результатов косвенных измерений мощности при функциональной зависимости $P_м = U \cdot I$.

Исходные данные для обработки приведены в таблице 2.1. В ней n – число результатов наблюдений напряжения $x_1 = U$, В, и тока $x_2 = I$, мА; P – доверительная вероятность.

На рабочем столе учебного персонального компьютера запустить ярлык программы *LABS*. В открывшемся окне выбрать лабораторную работу № 4 и нажать кнопку «Дальше». Установить «Вариант №1», «Пункт №1» и нажать кнопку «Данные». В новом окне нажать кнопку «Добавить значение» n раз для первого и второго массива данных (рисунок 2.3).

Таблица 2.1 – Исходные данные для задания 2.2.1

Номер бригады	n	P
1	34	0,95
2	18	0,99
3	36	0,99
4	22	0,95

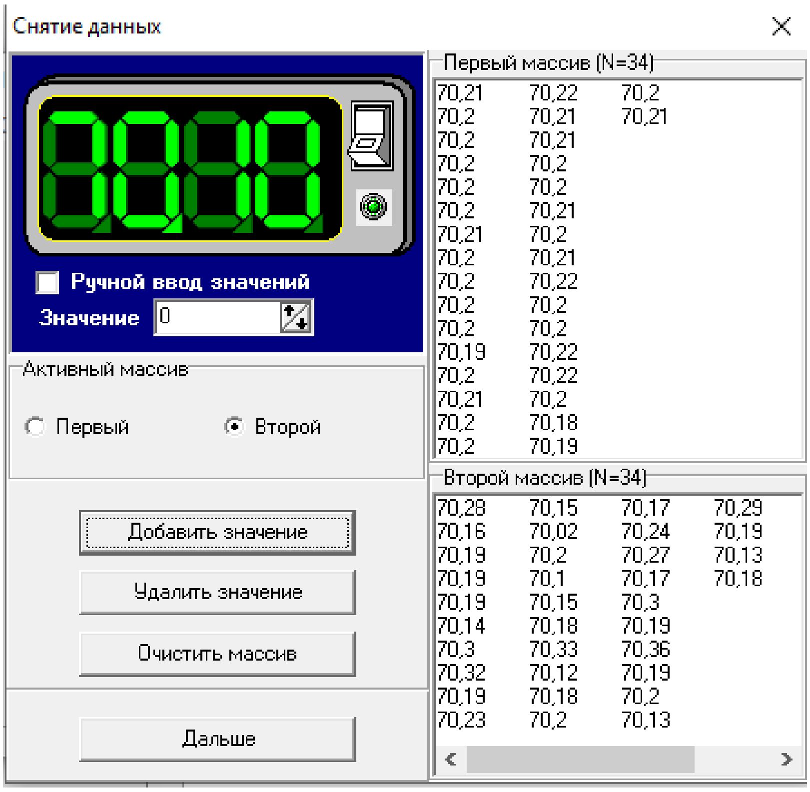


Рисунок 2.3 – Пример окна программы в режиме снятия данных

Отображенные в поле «Первый массив» (результаты наблюдений напряжения U) значения $x_{11}, ..., x_{n1}$ и в поле «Второй массив» (результаты наблюдений тока I) значения $x_{12}, ..., x_{n2}$ занести в таблицы 2.2 и 2.3 соответственно. Затем нажать кнопку «Дальше». Программа примет вид, показанный на рисунке 2.4. Рассчитать значения $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\tilde{\sigma}_{\bar{x}_1}, \tilde{\sigma}_{\bar{x}_2}$ и занести их в таблицы 2.2 и 2.3.

Таблица 2.2 – Значения $x_{11}, ..., x_{n1}$, $\bar{x}_1$ и $\tilde{\sigma}_{\bar{x}_1}$

Размерность, В				
x_{11}	...	x_{n1}	$\bar{x}_1$	$\tilde{\sigma}_{\bar{x}_1}$

Таблица 2.3 – Значения x_{12}, ..., x_{n2}, $\bar{x}_2$ и $\tilde{\sigma}_{\bar{x}_2}$

Размерность, мА				
x_{12}	…	x_{n2}	$\bar{x}_2$	$\tilde{\sigma}_{\bar{x}_2}$

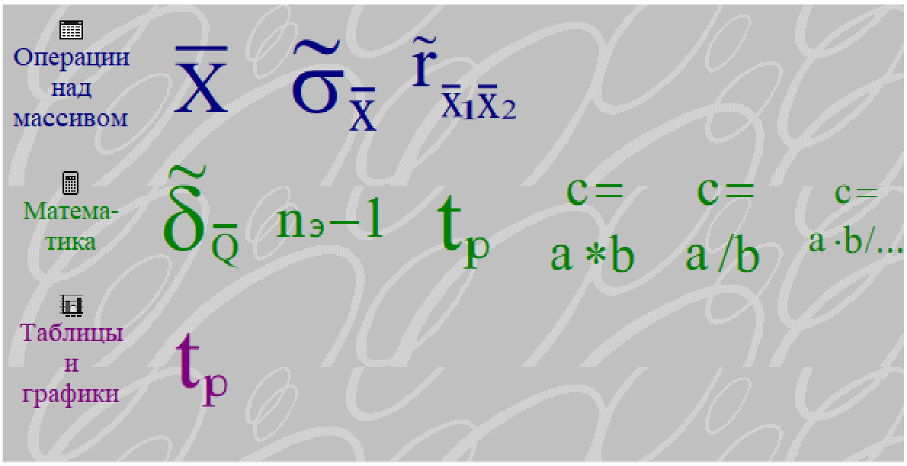


Рисунок 2.4 – Основное окно программы

Рассчитать значения $\bar{y}$, $\tilde{r}_{x_1x_2}$, $\tilde{E}_{\bar{x}_1}$, $\tilde{E}_{\bar{x}_2}$, $\tilde{\sigma}_{\bar{y}}$, учитывая функциональную зависимость $Y = P_{\text{м}} = U \cdot I$, и занести в таблицу 2.4.

Таблица 2.4 – Результаты промежуточных расчетов

$\bar{y}$, мВт	$\tilde{r}_{x_1,x_2}$	$\tilde{E}_{\bar{x}_1}$, мВт	$\tilde{E}_{\bar{x}_2}$, мВт	$\tilde{\sigma}_{\bar{y}}$, мВт

Определить значения $n_э - 1$ (в случае $n \le 30$) и t_p. В случае $n \le 30$ и при нецелом значении $n_э - 1$ использовать линейную интерполяцию для нахождения t_p. В таблицу 2.5 занести значение t_p и при необходимости $n_э - 1$, $n_1 - 1$, t_1, $n_2 - 1$, t_2 (последние четыре значения используют в случае линейной интерполяции для нахождения t_p). Рассчитать доверительную границу $\dot{\Delta}$ и записать в таблицу 2.6 $\dot{\Delta}$ и результат измерения.

Таблица 2.5 – Результаты расчета «эффективного» числа степеней свободы

$n_э - 1$	$n_1 - 1$	t_1	$n_2 - 1$	t_2	t_p

Таблица 2.6 – Итоговые результаты

$\dot{\Delta}$, мВт	Результат измерения

2.2.2 Осуществить обработку результатов косвенных измерений сопротивления при функциональной зависимости R = U / I.

Исходные данные для обработки приведены в таблице 2.7. В ней n – число результатов наблюдений напряжения $x_1 = U$ и тока $x_2 = I$; P – доверительная вероятность.

Таблица 2.7 – Исходные данные для задания 2.2.2

Номер бригады	n	P
1	24	0,99
2	32	0,95
3	26	0,95
4	38	0,99

Установить в окнах «Пункт №2», «Вариант №2». Обработка результатов наблюдений аналогична обработке согласно пункту 2.2.1 (при этом используются функциональная зависимость $Y = R = U / I$, аналогичные таблицы, только вместо размерности «мВт» в них используется размерность «кОм»).

Содержание отчета: отчет по лабораторной работе оформляется на стандартных листах бумаги. Текст отчета должен содержать цель работы, лабораторное задание, всю необходимую информацию о проделанной работе, выводы. Результаты расчетов сводятся в таблицы, которые должны соответствовать приведенным в методических указаниях. Отчет должен содержать алгоритмы и расчетные формулы, в соответствии с которыми осуществлялась обработка результатов наблюдений.

2.3 Контрольные вопросы

1 Какое значение принимается за результат косвенного измерения?

2 По какой формуле определяется частная случайная погрешность косвенного измерения?

3 Дайте определение коэффициента корреляции и поясните его физический смысл.

4 По какой формуле может быть вычислена оценка коэффициента корреляции?

5 По каким формулам вычисляется СКО результатов косвенных измерений для случайных зависимых и независимых исходных прямых измерений?

6 Приведите критерий ничтожных погрешностей. Из какого условия он выведен? Что дает знание ничтожных погрешностей?

7 Что понимается под «эффективным» числом степеней свободы при косвенных измерениях?

8 Опишите алгоритм обработки результатов при косвенных измерениях.

9 Решите задачу. Для определения плотности вещества измерили массу образца и его объем. Масса образца составляет 200 г с погрешностью ±1 г, а объем – 50 см³ с погрешностью ±0,5 см³. Рассчитайте плотность вещества. Определите погрешность плотности с использованием формулы для относительной погрешности.

10 Решите задачу. Проведен эксперимент по измерению температуры жидкости с помощью термометра, который имеет погрешность ±0,2 °C. В результате трех измерений были получены следующие значения: 25,0; 25,3 и 24,8 °C. Найдите среднее значение температуры. Определите диапазон возможных значений температуры с учетом погрешности термометра.

11 Решите задачу. В ходе эксперимента получили следующие результаты (в миллиметрах): 10, 12, 11, 13, 10, 14, 12. Найдите среднее значение и стандартное отклонение полученных данных. Оцените возможные выбросы в данных (если таковые имеются) и объясните их влияние на результаты.

12 Решите задачу. Сравните два метода измерения одной и той же величины – длины. Метод A дает результаты: [15,0; 15,1; 14,9] см; метод B дает результаты: [15,2; 15,3; 15,1] см. Рассчитайте средние значения и стандартные отклонения для обоих методов. Какой метод более точен? Обоснуйте свой ответ.

Лабораторная работа № 3
«Обработка результатов совокупных измерений»

3.1 Краткие теоретические сведения

Совокупные измерения – проводимые одновременно измерения нескольких одноименных величин, при которых искомые значения величин определяют путем решения системы уравнений, получаемых при измерениях этих величин в различных сочетаниях [1].

Цели совокупных измерений:

- повышение точности: многократные измерения позволяют усреднить результаты, что снижает влияние случайных ошибок;
- оценка разброса: позволяет оценить вариацию данных и выявить возможные систематические ошибки;
- устойчивость к шуму: совокупные измерения помогают сгладить влияние случайных колебаний и шумов в данных.

Процесс проведения совокупных измерений:

- выбор метода измерения: определение подходящего метода и инструмента для измерения величины;
- проведение измерений: выполнение нескольких независимых измерений в одинаковых условиях;
- запись данных: тщательная запись всех полученных значений для последующего анализа.

Статистический анализ результатов:

- среднее значение: вычисление среднего арифметического всех полученных значений;
- стандартное отклонение: оценка разброса значений вокруг среднего, что позволяет понять степень вариации данных;
- доверительные интервалы: определение диапазона, в котором с заданной вероятностью находится истинное значение величины.

Оценка погрешностей:

- систематические погрешности: анализ возможных источников систематических погрешностей (например, калибровка инструментов);
- случайные погрешности: оценка влияния случайных погрешностей на результаты и их распределение.

Применение методов обработки данных:

- использование различных статистических методов для анализа собранных данных (например, *t*-тесты, *ANOVA*);
- визуализация данных с помощью графиков для лучшего понимания распределения и выявления аномалий.

Документация и отчетность:

- ведение записей о проведенных измерениях, методах анализа и полученных результатах;

- подготовка отчетов о проведенных исследованиях с описанием методов, результатов и выводов.

Примеры применения совокупных измерений:

- научные исследования: в физике, химии и биологии для получения более точных данных о свойствах веществ или явлений;
- инженерия: при тестировании материалов или компонентов для оценки их характеристик;
- медицинские исследования: для оценки эффективности лечения или диагностики на основе многократных наблюдений.

Совокупные измерения являются важным инструментом в научной практике и инженерии, позволяя получать более надежные данные за счет учета статистических свойств множества измерений. Этот подход помогает минимизировать влияние погрешностей и повышает уверенность в получаемых результатах.

Совокупные и совместные измерения характеризуются тем, что значения искомых величин x, y, … рассчитываются по системе уравнений, связывающих их с некоторыми другими величинами a_i, b_i, ..., l_i; $i = 1, ..., n$, измеряемыми прямыми или косвенными методами. Совместные и совокупные измерения обычно выполняются так, чтобы получаемое число уравнений, связывающих искомые величины, превышало число последних. При этом из-за погрешностей измерений даже при точно известной зависимости между величинами нельзя найти такие значения неизвестных, при которых все уравнения выполнялись бы. В этих условиях значения неизвестных, принимаемых за их оценки, находят с помощью метода наименьших квадратов. В общем виде получаем систему уравнений:

$$F_i\,(x, y, \ldots, a_i, b_i, \ldots) = l_i. \tag{3.1}$$

Если x, y, … являются значениями одной и той же величины, то измерения совокупны, если же x, y, … – это значения различных физических величин, то мы имеем дело с совместными измерениями. Обычно число уравнений системы (3.1) превышает число неизвестных и из-за погрешности измерений нельзя найти такие оценки искомых величин, чтобы выполнялись все уравнения. Поэтому уравнения (3.1) в отличие от обычных математических уравнений принято называть условными. При подстановке в условные уравнения (3.1) найденных каким-то путем значений неизвестных по отмеченным причинам получим

$$F_i(\tilde{x}, \tilde{y}, ..., a_i, b_i, ...) - l_i = V_i \neq 0. \tag{3.2}$$

Величины V_i принято называть невязками. Всеобщее признание получил метод решения условных уравнений, который приводит к минимуму суммы квадратов невязок – метод наименьших квадратов (МНК). Теоретически показано, что при нормальном распределении погрешностей метод наименьших квадратов приводит к оценкам неизвестных, удовлетворяющих принципу максимума правдоподобия, т. е. наиболее вероятным оценкам.

Применение МНК:

- линейная регрессия: наиболее распространенное применение МНК – это линейная регрессия, где предполагается линейная зависимость между переменными;

- полиномиальная регрессия: метод также может быть использован для более сложных моделей, таких как полиномиальная регрессия, где зависимость представляется многочленом;

- множественная регрессия: МНК может быть применен для оценки моделей с несколькими независимыми переменными.

Преимущества МНК:

- простота реализации: метод легко реализуется как вручную, так и с помощью программного обеспечения;

- интерпретируемость результатов: полученные параметры модели имеют четкую интерпретацию;

- широкая применимость: метод используется в различных областях науки и техники.

Ограничения МНК:

- чувствительность к выбросам: МНК может быть сильно подвержен влиянию выбросов в данных;

- предположение о нормальности погрешностей: метод предполагает, что погрешности имеют нормальное распределение;

- линейность модели: МНК предполагает линейную зависимость между переменными; если эта зависимость не является линейной, результаты могут быть неадекватными.

МНК является мощным инструментом для анализа данных и построения моделей. Он позволяет находить оптимальные параметры для различных типов зависимостей и широко используется в статистике и научных исследованиях. Однако важно учитывать ограничения МНК и применять его с осторожностью в случае наличия выбросов или нелинейных зависимостей.

Остановимся на практическом применении МНК. Рассмотрим применение метода для совокупных измерений, при которых уравнения являются линейными. Для сокращения записей возьмем случай с двумя неизвестными.

Пусть система условных уравнений имеет вид

$$x \cdot a_i + y \cdot b_i = l_i;\ i = 1, \ldots, n;\ n > 2, \tag{3.3}$$

где x, y – искомые неизвестные;

a_i, b_i, l_i – результаты i-го наблюдения и известные коэффициенты [6].

В общем случае число неизвестных равно m, причем $m < n$; если $m = n$, то система условных уравнений решается однозначно, хотя получающиеся результаты и отягощены погрешностями.

Если в (3.3) подставить какие-то оценки искомых величин $\tilde{x}, \tilde{y}$, то получим невязки:

$$V_i = \tilde{x} \cdot a_i + \tilde{y} \cdot b_i - l_i. \tag{3.4}$$

Найдем оценки величин $\tilde{x}, \tilde{y}$ из условия

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i^2 = \min. \tag{3.5}$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} = 0. \tag{3.6}$$

Найдем эти частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= 2\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x} \cdot a_i + \tilde{y} \cdot b_i - l_i) \cdot a_i = 0; \\ \frac{dV}{dy} &= 2\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x} \cdot a_i + \tilde{y} \cdot b_i - l_i) \cdot b_i = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Отсюда получаем систему так называемых нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{x}\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_i + \tilde{y}\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot l_i; \\ \tilde{x}\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot a_i + \tilde{y}\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot l_i. \end{cases} \tag{3.8}$$

При написании нормальных уравнений пользуются обозначениями

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_i = [a \cdot a]; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = [a \cdot b]; \quad \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot b_i = [b \cdot b]; \\ &\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot l_i = [a \cdot l]; \quad \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot l_i = [b \cdot l]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Тогда нормальные уравнения принимают более простой вид:

$$\begin{cases} [a \cdot a] \cdot \tilde{x} + [a \cdot b] \cdot \tilde{y} = [a \cdot l]; \\ [a \cdot b] \cdot \tilde{x} + [b \cdot b] \cdot \tilde{y} = [b \cdot l]. \end{cases} \tag{3.10}$$

Нужно обратить внимание на две хотя и очевидные, но важные особенности матрицы коэффициентов при неизвестных в системе уравнений (3.10):

1 Матрица этих коэффициентов симметрична относительно главной диагонали.

2 Все элементы главной диагонали положительны.

Эти свойства являются общими, они не зависят от числа неизвестных, но в данном примере показаны применительно к случаю с двумя неизвестными.

Число нормальных уравнений равно числу неизвестных, и их решение известными методами дает интересующие нас оценки искомых величин. Наиболее кратко решение записывается с помощью определителей:

$$\tilde{x} = \frac{D_x}{D}; \ \tilde{y} = \frac{D_y}{D}, \tag{3.11}$$

где

$$D = \begin{vmatrix} [a \cdot a][a \cdot b] \\ [a \cdot b][b \cdot b] \end{vmatrix}. \tag{3.12}$$

Определители D_x и D_y получают из главного определителя системы D путем замены столбца с коэффициентами при неизвестных x или y на столбец со свободными членами:

$$D_x = \begin{vmatrix} [a \cdot l][a \cdot b] \\ [b \cdot l][b \cdot b] \end{vmatrix}; \ D_y = \begin{vmatrix} [a \cdot a][a \cdot l] \\ [a \cdot b][b \cdot l] \end{vmatrix}. \tag{3.13}$$

Теперь нужно оценить погрешности полученных результатов. Задача решается в том случае, когда из числа непосредственно измеряемых величин можно выделить одну, погрешность измерения которой существенно превышает погрешности измерения остальных. Тогда условные уравнения преобразуются так, чтобы величина, измеряемая с наибольшей погрешностью, была выделена в свободный член l_i. В этом случае оценки СКО найденных значений неизвестных можно вычислить, пользуясь формулами

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\frac{D_{11}}{D}} \cdot \tilde{\sigma}; \ \tilde{\sigma}_y = \sqrt{\frac{D_{22}}{D}} \cdot \tilde{\sigma}, \tag{3.14}$$

где D_{11}, D_{22} – алгебраические дополнения элементов $[a \cdot a]$, $[b \cdot b]$ определителя D соответственно (они получаются путем удаления из матрицы определителя D столбца и строчки, на пересечении которых находится данный элемент, т. е. $D_{11} = [b \cdot b]$, $D_{22} = [a \cdot a]$);

$\tilde{\sigma}$ – оценка СКО условных уравнений.

Оценка СКО условных уравнений вычисляется по формуле

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} V_i^2 / (n-m)}, \quad (3.15)$$

где V_i – невязка условного уравнения, полученная при подстановке в него оценок $\tilde{x}, \tilde{y}$.

Доверительные границы случайной погрешности измерения искомых величин определяют на основе распределения Стьюдента, при этом число степеней свободы для всех искомых величин равно $n - m$:

$$\dot{\Delta}_x = t_p \cdot \tilde{\sigma}_x; \ \dot{\Delta}_y = t_p \cdot \tilde{\sigma}_y, \quad (3.16)$$

где t_p – коэффициент Стьюдента, находящийся исходя из значений числа степеней свободы $n - m$ и доверительной вероятности P.

На рисунке 3.1 приведен алгоритм обработки результатов совокупных измерений.

3.2 Порядок выполнения работы

Цель работы: изучение методов и алгоритма обработки результатов совокупных измерений с помощью программного обеспечения *Labs*.

Подготовка к выполнению работы: изучить методы и алгоритмы обработки результатов совокупных измерений (рекомендуемая литература, настоящий лабораторный практикум); ответить на контрольные вопросы.

Описание функций, реализуемых в программном обеспечении работы:

1) строка «*Операции с матрицами*»:

- $[a \cdot a]$ – расчет значения по формуле $\sum_{i=1}^{6} a_i^2$, задаются значения a_i; $i = 1, ..., 6$;
- $[a \cdot b]$ – расчет значения по формуле $\sum_{i=1}^{6} a_i \cdot b_i$, задаются значения a_i и b_i; $i = 1, ..., 6$;
- D – расчет значения по формуле $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$, задаются значения a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22};

2) строка «*Математика*»:

- V – расчет значения по формуле $\tilde{x} \cdot a + \tilde{y} \cdot b - l$, задаются значения $\tilde{x}$, a, $\tilde{y}$, b, l;
- $\tilde{\sigma}$ – расчет значения по формуле $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} V_i^2 / (n-m)}$, задаются значения V_i; $i = 1, ..., 6$; n, m;
- $\tilde{\sigma}_x$ – расчет значения по формуле $\sqrt{D_{11} / D} \cdot \tilde{\sigma}$, задаются значения D_{11}, D, $\tilde{\sigma}$;

- $c = a \cdot b$ – расчет произведения любых двух чисел, задаются значения a, b;

- $c = a / b$ – расчет частного любых двух чисел, задаются значения a, b;

3) строка «*Таблицы и графики*»:

- t_p – определение коэффициента Стьюдента из числа степеней свободы $k = n - m$ и доверительной вероятности P.

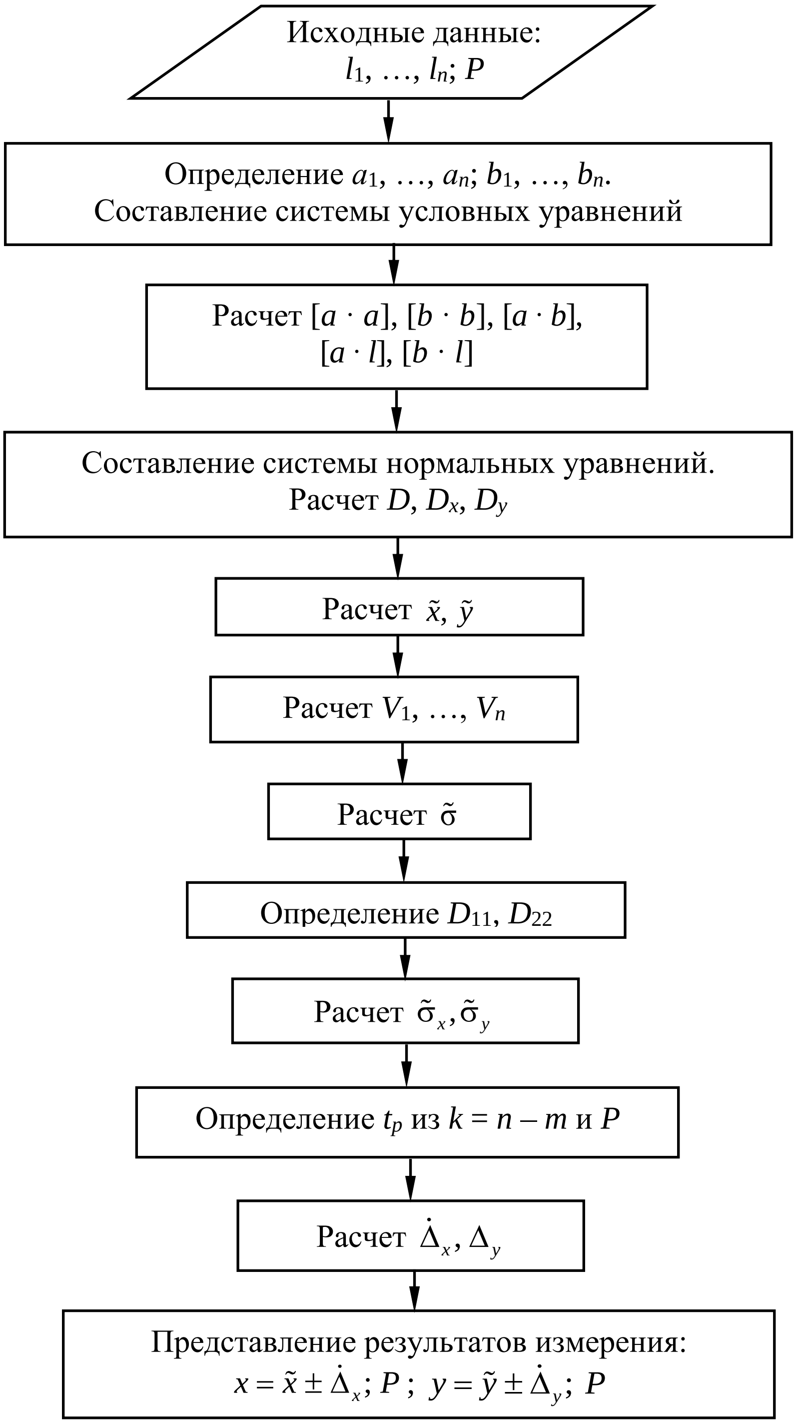


Рисунок 3.1 – Алгоритм обработки результатов совокупных измерений

3.2.1 Осуществить обработку результатов совокупных измерений сопротивлений двух резисторов.

В процессе исследований получены: два результата измерений сопротивления резистора R_1 (в таблице 3.1 результаты измерений l_1 и l_2), два результата измерений сопротивления резистора R_2 (в таблице 3.1 результаты измерений l_3 и l_4), два результата измерений сопротивления при последовательном включении резисторов $R_1 + R_2$ (в таблице 3.1 результаты измерений l_5 и l_6). При расчете доверительной границы случайной погрешности использовать значение доверительной вероятности P, приведенное в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Исходные данные для задания 3.2.1

Номер бригады	Результаты совокупных измерений, кОм						P
	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	
1	12,25	12,32	36,44	36,60	48,73	48,84	0,95
2	115,62	115,83	93,25	93,66	209,24	209,40	0,99
3	87,81	87,63	41,52	41,84	129,05	129,34	0,95
4	15,62	15,64	10,89	10,96	26,58	26,42	0,99

На рабочем столе учебного персонального компьютера запустить ярлык программы *LABS*. В открывшемся окне выбрать лабораторную работу № 5 и нажать кнопку «Дальше». Программа примет вид, показанный на рисунке 3.2.

Используя информацию об исходных данных, привести вид исходных условных уравнений, внести значения a_1–a_6, b_1–b_6 в таблицу 3.2.

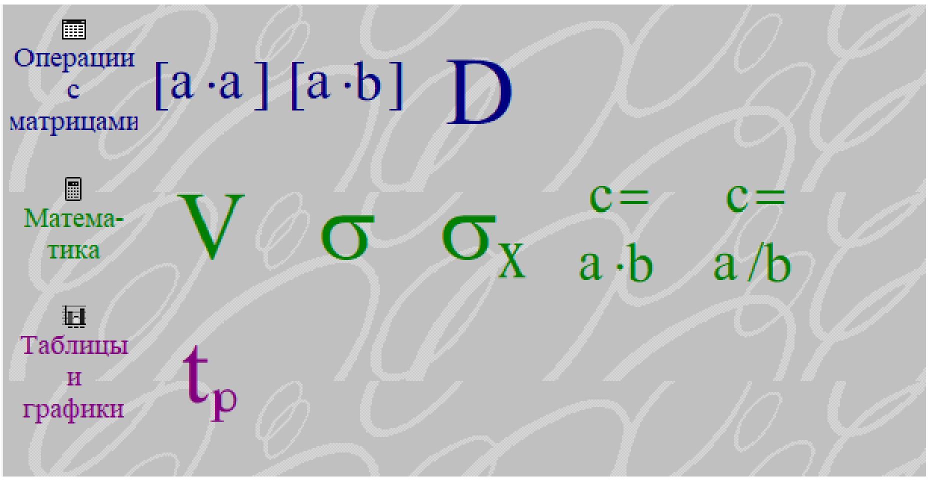


Рисунок 3.2 – Основное окно программы

Таблица 3.2 – Значения коэффициентов условных уравнений

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6

Рассчитать значения $[a \cdot a]$, $[b \cdot b]$, $[a \cdot b]$, $[a \cdot l]$, $[b \cdot l]$ и занести их в таблицу 3.3. Привести вид нормальных уравнений и вид матриц, используемых для расчета оценок сопротивлений R_1 и R_2 ($\tilde{x}$ и $\tilde{y}$). Рассчитать значения определителей D, D_x, D_y, $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и занести их в таблицу 3.4.

Таблица 3.3 – Элементы матрицы условных уравнений

$[a \cdot a]$	$[b \cdot b]$	$[a \cdot b]$	$[a \cdot l]$, кОм	$[b \cdot l]$, кОм

Таблица 3.4 – Определители условных уравнений

D	D_x, кОм	D_y, кОм	$\tilde{x}$, кОм	$\tilde{y}$, кОм

Привести вид матриц, используемых для расчета D_{11} и D_{22}. Рассчитать невязки V_1–V_6, СКО условных уравнений $\tilde{\sigma}$, значения D_{11}, D_{22} и СКО искомых величин $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\sigma}_y$. Найденные значения занести в таблицу 3.5.

Таблица 3.5 – Результаты промежуточных расчетов

V_1, кОм	V_2, кОм	V_3, кОм	V_4, кОм	V_5, кОм	V_6, кОм	σ, кОм	D_{11}	D_{22}	$\tilde{\sigma}_x$, кОм	$\tilde{\sigma}_y$, кОм

Определить значение коэффициента t_p и рассчитать доверительные границы случайных погрешностей $\dot{\Delta}_x$, $\dot{\Delta}_y$. Значения t_p, $\dot{\Delta}_x$, $\dot{\Delta}_y$ занести в таблицу 3.6 и записать результаты измерения.

Таблица 3.6 – Итоговые результаты

t_p	$\dot{\Delta}_x$, кОм	$\dot{\Delta}_y$, кОм	Результат измерения сопротивления резистора R_1	Результат измерения сопротивления резистора R_2

3.2.2 Осуществить обработку результатов совокупных измерений напряжений двух источников.

В процессе исследований получены: результат измерения напряжения первого источника U_1 (в таблице 3.7 результат измерения l_1), результат измерения напряжения второго источника U_2 (в таблице 3.7 результат измерения l_2), четыре результата суммарных напряжений при различных полярностях U_1 и U_2 (в таблице 3.7 для $U_1 + U_2$ результат измерения l_3; для $U_1 - U_2$ результат измерения l_4; для $U_2 - U_1$ результат измерения l_5; для $-U_1 - U_2$ результат измерения l_6). При расчете доверительной границы случайной погрешности использовать значения доверительной вероятности P, приведенные в таблице 3.7.

Таблица 3.7 – Исходные данные для задания 3.2.2.

Номер бригады	Результаты совокупных измерений, В						P
	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	
1	10,83	25,16	36,22	–14,47	14,21	–36,00	0,99
2	73,24	53,06	126,04	20,41	–19,98	–126,42	0,95
3	12,64	23,82	36,68	–11,06	11,41	–36,22	0,99
4	17,28	14,36	31,72	3,01	–2,83	–31,58	0,95

Обработка результатов наблюдений аналогична обработке результатов согласно пункту 3.2.1 (при этом используются аналогичные таблицы, только вместо размерности «кОм» используется размерность «В»).

Содержание отчета: отчет по лабораторной работе оформляется на стандартных листах бумаги. Текст отчета должен содержать цель работы, лабораторное задание, всю необходимую информацию о проделанной работе, выводы. Результаты расчетов сводятся в таблицы, которые должны соответствовать приведенным в методических указаниях. Отчет должен содержать алгоритмы и расчетные формулы, в соответствии с которыми осуществлялась обработка результатов наблюдений.

3.3 Контрольные вопросы

1 Какие измерения называются совокупными? Какова разница между совокупными и совместными измерениями?

2 Выберите, как рассчитывается стандартное отклонение для набора данных:

а) сумма квадратов отклонений от среднего значения, деленная на количество измерений;

б) корень квадратный из суммы квадратов отклонений от среднего значения, деленный на количество измерений;

в) среднее значение всех измерений;

г) разница между максимальным и минимальным значениями.

3 Дайте определение невязке в контексте измерений:

а) разница между двумя измерениями одного и того же объекта;

б) разница между экспериментально полученным значением и истинным значением;

в) инструментальная погрешность измерения;

г) разница между средним значением и медианой.

4 Определите, какой из следующих методов используется для оценки погрешности измерений:

а) метод наименьших квадратов;

б) метод максимального правдоподобия;

в) метод средней квадратической ошибки;

г) все вышеперечисленные методы.

5 Выберите, какой уровень доверия обычно используется для построения доверительных интервалов:

а) 50 %;

б) 75 %;

в) 90 %;

г) 95 %.

6 Назовите фактор, который может повлиять на точность измерений:

а) калибровка инструмента;

б) условия окружающей среды (температура, влажность);

в) человеческий фактор (ошибки при счете);

г) все вышеперечисленные факторы.

7 Дайте определение доверительному интервалу:

а) интервал значений, в котором находится истинное значение с заданной вероятностью;

б) интервал значений, который показывает разброс данных;

в) интервал между максимальным и минимальным значениями в наборе данных;

г) интервал времени между двумя последовательными измерениями.

8 Выберите, какое из следующих утверждений верно относительно выбросов (промахов) в данных:

а) выбросы всегда указывают на ошибку в измерениях;

б) выбросы могут быть результатом естественного разброса данных;

в) выбросы не влияют на среднее значение;

г) выбросы всегда должны быть удалены из набора данных.

10 Почему исходные уравнения называются условными?

11 Объясните суть метода наименьших квадратов.

12 Каким образом составляется система нормальных уравнений и какие известны методы ее решения?

13 Как оценить погрешности полученных результатов совокупных измерений?

14 Приведите алгоритм обработки результатов совокупных измерений.

Лабораторная работа № 4
«Обработка результатов совместных измерений»

4.1 Краткие теоретические сведения

Совместные измерения – проводимые одновременно измерения двух или нескольких неодноименных величин для определения зависимости между ними [1].

Цели совместных измерений:

- выявление взаимосвязей: позволяет исследовать, как изменения одной переменной влияют на другие;
- снижение влияния систематических ошибок: проводя измерения в одних и тех же условиях, можно минимизировать влияние внешних факторов;
- улучшение точности: совместные измерения могут повысить точность оценок за счет использования информации о нескольких переменных одновременно.

Примеры применения:

- физика: измерение температуры и давления в газе для изучения его состояния;
- экология: одновременное измерение температуры, влажности и уровня загрязнения воздуха для оценки состояния экосистемы;
- медицина: измерение различных биомаркеров (например, уровня глюкозы и холестерина) у пациентов для комплексной оценки их здоровья.

Методы проведения совместных измерений:

- использование многоканальных датчиков или приборов, которые могут одновременно регистрировать несколько параметров;
- проведение экспериментов в контролируемых условиях, где все параметры фиксируются одновременно.

Статистический анализ данных:

- применение многомерного статистического анализа для выявления зависимостей между переменными (например, регрессионный анализ);
- использование методов корреляции для оценки силы и направления взаимосвязей между переменными.

Преимущества совместных измерений:

- более полное понимание системы благодаря учету нескольких факторов;
- возможность выявления сложных взаимодействий между переменными;
- снижение времени и ресурсов на проведение экспериментов по сравнению с последовательными измерениями.

Ограничения совместных измерений:

- сложность анализа данных: многомерные данные могут быть трудными для интерпретации;
- необходимость в сложном оборудовании: для проведения совместных измерений может потребоваться специализированное оборудование;
- возможные проблемы с калибровкой: необходимо обеспечить правильную калибровку всех используемых датчиков и приборов.

Совместные измерения являются важным инструментом в научных исследованиях и практических приложениях, позволяя получать более полное представление о системах и процессах. Они помогают выявлять взаимосвязи между различными параметрами и обеспечивают более точные результаты за счет учета множества факторов одновременно. Однако важно учитывать сложности анализа данных и необходимость в качественном оборудовании для успешного применения этого метода.

Мультиколлинеарность – это термин, который описывает ситуацию в регрессионном анализе, когда две или более независимые переменные сильно коррелируют друг с другом. Это может привести к проблемам при оценке коэффициентов регрессии и интерпретации результатов.

Причины возникновения:

- включение в модель нескольких переменных, которые измеряют одно и то же явление;
- использование переменных, которые логически связаны между собой.

Проблемы, связанные с мультиколлинеарностью:

- нестабильность коэффициентов: коэффициенты регрессии могут изменяться значительно при добавлении или удалении переменных из модели;
- значимость переменных: мультиколлинеарность может привести к тому, что некоторые независимые переменные будут казаться незначительными, даже если они имеют важное влияние на зависимую переменную;
- увеличение стандартных отклонений: это затрудняет определение того, являются ли коэффициенты статистически значимыми.

Способы устранения мультиколлинеарности:

- удаление одной из коррелирующих переменных: если две переменные сильно коррелируют, можно оставить только одну из них в модели;
- объединение переменных: создание новой переменной, которая является комбинацией двух или более коррелирующих переменных (например, использование среднего значения).
- использование методов регуляризации: таких как *Lasso*- или *Ridge*-регрессия, которые могут помочь уменьшить влияние мультиколлинеарности.

Мультиколлинеарность – важный аспект регрессионного анализа, который необходимо учитывать для получения надежных и интерпретируемых результатов. Понимание и диагностика мультиколлинеарности помогают исследователям строить более точные модели и делать обоснованные выводы на основе данных.

Так же как и совокупные, совместные измерения обычно выполняются так, чтобы получаемое число уравнений, связывающих искомые величины, превышало число последних. В этих условиях значения неизвестных, принимаемых за их оценки, находят с помощью метода наименьших квадратов. В общем случае получаем систему условных уравнений вида

$$F_i\,(x, y, \ldots, a_i, b_i, \ldots) = l_i. \qquad (4.1)$$

Суть метода наименьших квадратов, применяемого при решении условных уравнений, приведена в методических указаниях к лабораторной работе № 3. Мы остановимся на практическом применении метода наименьших квадратов для измерений, при которых уравнения являются нелинейными. Для сокращения записей возьмем случай с двумя неизвестными. Пусть система условных уравнений имеет вид

$$x \cdot a_i + a_i^2 = l_i;\ i = 1, \ldots, n;\ n > 2. \tag{4.2}$$

В этой системе условных уравнений $b_i = a_i^2$. Причем x, y – искомые неизвестные; a_i, l_i – результаты i-го наблюдения. Если в (4.2) подставить какие-то оценки искомых величин x, y, то получим невязки

$$V_i = \tilde{x} \cdot a_i + \tilde{y} \cdot a_i^2 - l_i. \tag{4.3}$$

Найдем оценки величин $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ из условия

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i^2 = \min. \tag{4.4}$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} = 0. \tag{4.5}$$

Найдем эти частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= 2\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x} \cdot a_i + \tilde{y} \cdot a_i^2 - l_i) \cdot a_i = 0; \\ \frac{dV}{dy} &= 2\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x} \cdot a_i + \tilde{y} \cdot a_i^2 - l_i) \cdot a_i^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Отсюда получаем систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{x}\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_i + \tilde{y}\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot l_i; \\ \tilde{x}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot a_i + \tilde{y}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot l_i. \end{cases} \tag{4.7}$$

При написании нормальных уравнений используем обозначения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_i = [a \cdot a]; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_i^2 = [a \cdot a^2]; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot a_i^2 = [a^2 \cdot a^2];$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot l_i = [a \cdot l]; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot l_i = [a^2 \cdot l]. \tag{4.8}$$

Тогда нормальные уравнения принимают более простой вид:

$$\begin{cases} [a \cdot a\ ] \cdot \tilde{x} + [a\ \ \cdot a^2] \cdot \tilde{y} = [a\ \ \cdot l]; \\ [a \cdot a^2] \cdot \tilde{x} + [a^2 \cdot a^2] \cdot \tilde{y} = [a^2 \cdot l]. \end{cases} \tag{4.9}$$

Решение системы нормальных уравнений записывается с помощью определителей:

$$\tilde{x} = \frac{D_x}{D}; \quad \tilde{y} = \frac{D_y}{D}, \tag{4.10}$$

где

$$D = \begin{vmatrix} [a \cdot a] & [a \cdot a^2] \\ [a \cdot a^2] & [a^2 \cdot a^2] \end{vmatrix}. \tag{4.11}$$

Определители D_X и D_Y получают из главного определителя системы D путем замены столбца с коэффициентами при неизвестных x и y на столбец со свободными членами:

$$D_X = \begin{vmatrix} [a \cdot l] & [a \cdot a^2] \\ [a \cdot l] & [a \cdot a^2] \end{vmatrix}; \; D_y = \begin{vmatrix} [a \cdot a] & [a \cdot l] \\ [a \cdot a^2] & [a^2 \cdot l] \end{vmatrix}. \tag{4.12}$$

Оценим погрешность полученных результатов:

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\frac{D_{11}}{D}} \cdot \tilde{\sigma}; \; \tilde{\sigma}_y = \sqrt{\frac{D_{22}}{D}} \cdot \tilde{\sigma}, \tag{4.13}$$

где D_{11}, D_{22} – алгебраические дополнения элементов $[a \cdot a]$, $[a^2 \cdot a^2]$ определителя D соответственно (они получаются путем удаления из матрицы определителя D столбца и строчки, на пересечении которых находится данный элемент, т. е. $D_{11} = [a^2 \cdot a^2]$, $D_{22} = [a \cdot a]$);

$\tilde{\sigma}$ – оценка СКО условных уравнений, которая вычисляется по формуле

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} V_i^2 / (n - m)}, \tag{4.14}$$

где V_i – невязки условных уравнений, полученные при подстановке в них оценок $\tilde{x}, \tilde{y}$.

Тест Фишера, или ***F-тест***, – это статистический тест, который используется для проверки гипотез о равенстве дисперсий двух или более выборок. Он основан на распределении Фишера.

Гипотезы:

1 Нулевая гипотеза (H0): дисперсии групп равны.

2 Альтернативная гипотеза (H1): дисперсии групп не равны.

Статистика F рассчитывается как отношение двух выборочных дисперсий и соответствует распределению Фишера с определенными степенями свободы, которые зависят от размеров выборок.

Сравнивается рассчитанное значение F с критическим значением из таблицы распределения Фишера для заданного уровня значимости (обычно 0,05) и соответствующих степеней свободы.

Тест Фишера часто используется в *ANOVA* (дисперсионный анализ), где необходимо проверить равенство дисперсий между несколькими группами.

Важно помнить, что тест Фишера чувствителен к отклонениям от нормальности и гомоскедастичности (равенства дисперсий). Поэтому перед его применением рекомендуется проверить данные на соответствие этим предпосылкам.

Тест Манна – Уитни (также известный как U-тест Манна – Уитни или тест Уилкоксона для независимых выборок) – это непараметрический статистический тест, используемый для сравнения двух независимых групп. Он применяется для проверки гипотезы о том, что две группы происходят из одной и той же популяции или имеют одинаковые распределения.

Гипотезы:

1 Нулевая гипотеза (H0): распределения двух групп одинаковы.

2 Альтернативная гипотеза (H1): распределения двух групп различны.

Тест используется, когда:

- данные не соответствуют нормальному распределению;
- размеры выборок небольшие;
- данные являются порядковыми или интервальными.

Процедура теста:

- объединить данные из обеих групп и ранжировать их;
- подсчитать сумму рангов для каждой группы;
- рассчитать статистику U, которая основана на количестве рангов в каждой группе.

Статистика U может быть рассчитана по формуле: $U_1 = R_1 - n_1(n_1 + 1) / 2$, где R_1 – сумма рангов первой группы, а n_1 – размер первой группы. Аналогично можно рассчитать U_2 для второй группы.

Необходимо сравнить рассчитанное значение U с критическим значением из таблицы распределения Манна – Уитни для заданного уровня значимости (обычно 0,05). Если значение U меньше критического значения, нулевая гипотеза отвергается, что указывает на наличие статистически значимых различий между группами.

Преимущества:

- не требует предположений о нормальности данных;
- может использоваться с порядковыми данными.

Ограничения:

- менее мощный по сравнению с параметрическими тестами (например, t-тестом), если данные действительно нормально распределены;
- не дает информации о величине различий между группами, только о наличии различий.

Тест Шапиро – Уилка – это статистический тест, используемый для проверки гипотезы о нормальности распределения данных. Он позволяет определить, насколько хорошо выборка данных соответствует нормальному распределению. Тест был предложен Уилком и Шапиро в 1965 году и является одним из наиболее популярных тестов на нормальность распределения.

Гипотезы:

1 Нулевая гипотеза (H0): данные имеют нормальное распределение.

2 Альтернативная гипотеза (H1): данные не имеют нормального распределения.

Тест Краскала – Уоллиса – это непараметрический статистический тест, используемый для сравнения трех и более независимых групп. Он является обобщением теста Манна – Уитни и применяется для проверки гипотезы о том, что все группы происходят из одной и той же популяции или имеют одинаковые распределения.

Гипотезы:

1 Нулевая гипотеза (H0): распределения всех групп одинаковы.

2 Альтернативная гипотеза (H1): по крайней мере одна группа имеет другое распределение.

Тест используется, когда:

- данные не соответствуют нормальному распределению;
- размеры выборок могут быть разными;
- данные являются порядковыми или интервальными.

Процедура теста:

- объединить данные из всех групп и ранжировать их;
- подсчитать сумму рангов для каждой группы;
- рассчитать статистику H по формуле: $H = \dfrac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \dfrac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$, где N – общее количество наблюдений; k – количество групп; R_i – сумма рангов для группы i; n_i – размер группы i.

Необходимо сравнить рассчитанное значение H с критическим значением из таблицы распределения хи-квадрат с $k-1$ степенями свободы для заданного уровня значимости (обычно 0,05). Если значение H больше критического значения, нулевая гипотеза отвергается, что указывает на наличие статистически значимых различий между группами.

Преимущества:

- не требует предположений о нормальности данных;
- может использоваться с порядковыми данными;
- подходит для анализа данных с различными размерами выборок.

Ограничения:

- не указывает, какие именно группы различаются; для этого может потребоваться дополнительный анализ (например, *post-hoc*-тесты);
- менее мощный по сравнению с параметрическими тестами (например, *ANOVA*), если данные действительно нормально распределены.

Тест Шапиро – Уилка может быть использован для анализа небольших выборок (обычно до 2000 наблюдений). Однако он также может применяться и к более крупным выборкам, хотя в этом случае результаты могут быть менее надежными из-за чувствительности теста к большим объемам данных.

Тест вычисляет статистику W, которая основана на соотношении между суммой квадратов отклонений наблюдаемых значений от их среднего и суммы квадратов отклонений ранговых значений от их среднего.

Чем ближе значение W к единице, тем больше вероятность того, что данные имеют нормальное распределение.

Если p-значение (уровень значимости) теста меньше выбранного уровня значимости (обычно 0,05), то нулевая гипотеза отвергается, что указывает на то, что данные не имеют нормального распределения.

Если p-значение больше уровня значимости, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу, и можно предположить, что данные нормально распределены.

Преимущества:

- высокая мощность для обнаружения отклонений от нормальности;
- простота в использовании и интерпретации.

Недостатки:

- чувствительность к выбросам;
- может давать ложные результаты при больших выборках.

Тест Шапиро – Уилка является полезным инструментом для проверки нормальности данных, что является важным шагом в предварительном анализе перед применением многих статистических методов, которые предполагают нормальное распределение ошибок или зависимых переменных.

Доверительные границы случайной погрешности измерения искомых величин находят из формул

$$\dot{\Delta}_x = t_p \cdot \tilde{\sigma}_x; \;\; \dot{\Delta}_y = t_p \cdot \tilde{\sigma}_y, \tag{4.15}$$

где t_p – коэффициент Стьюдента, находящийся исходя из значений числа степеней свободы $k = n - m$ и доверительной вероятности P.

На рисунке 4.1 приведен алгоритм обработки результатов совместных измерений для зависимостей $E_t = \alpha_{тп} \cdot t + \beta_{тп} \cdot t^2$ и $R_t = R_0 \cdot (1 + \alpha_{тс} \cdot t + \beta_{тс} \cdot t^2)$.

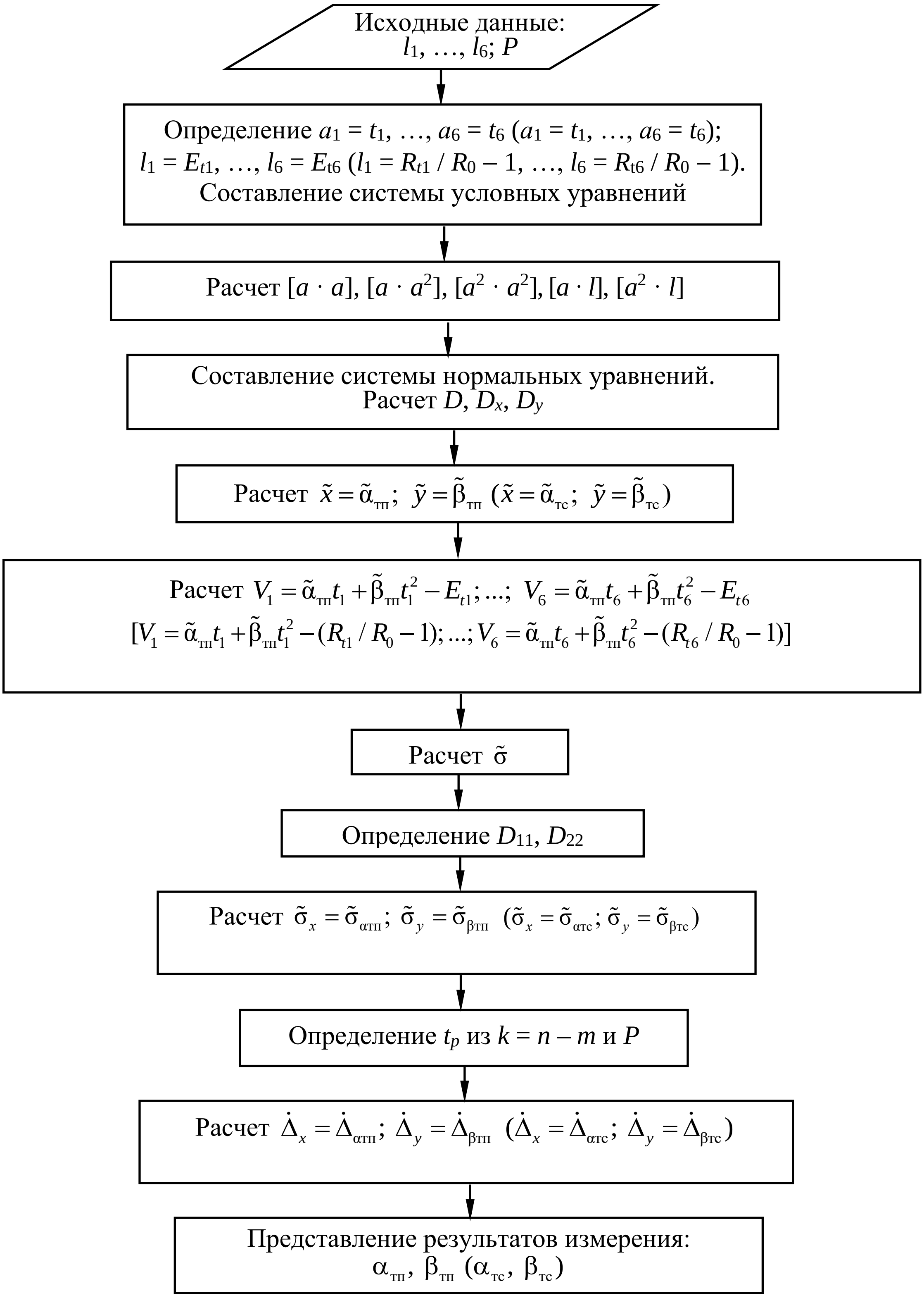


Рисунок 4.1 – Алгоритм обработки результатов совместных измерений

4.2 Порядок выполнения работы

Цель работы: изучение методов и алгоритма обработки результатов совместных измерений с помощью программного обеспечения *Labs*.

Подготовка к выполнению работы: изучить методы и алгоритмы обработки результатов совместных измерений (рекомендуемая литература, настоящий лабораторный практикум); ответить на контрольные вопросы.

Описание функций, реализуемых в программном обеспечении работы:

1) строка «*Операции с матрицами*»:

- $[a \cdot a]$ – расчет значения по формуле $\sum_{i=1}^{6} a_i^2$, задаются значения a_i; $i = 1, ..., 6$;
- $[a \cdot b]$ – расчет значения по формуле $\sum_{i=1}^{6} a_i \cdot b_i$, задаются значения a_i и b_i; $i = 1, ..., 6$;
- $[a \cdot a^2]$ – расчет значения по формуле $\sum_{i=1}^{6} a_i^3$, задаются значения a_i; $i = 1, ..., 6$;
- $[a^2 \cdot a^2]$ – расчет значения по формуле $\sum_{i=1}^{6} a_i^4$, задаются значения a_i; $i = 1, ..., 6$;
- $[a^2 \cdot b]$ – расчет значения по формуле $\sum_{i=1}^{6} a_i^2 \cdot b_i$, задаются значения a_i и b_i; $i = 1, ..., 6$;
- D – расчет значения по формуле $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$, задаются значения a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22};

2) строка «*Математика*»:

- V – расчет значений по формуле $\tilde{x} \cdot a + \tilde{y} \cdot a^2 - l$, задаются значения $\tilde{x}$, a, $\tilde{y}$, a^2, l;
- $\tilde{\sigma}$ – расчет значения по формуле $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} V_i^2 / (n-m)}$, задаются значения V_i; $i = 1, ..., 6$; n, m;
- $\tilde{\sigma}_x$ – расчет значения по формуле $\sqrt{D_{11} / D} \cdot \tilde{\sigma}$, задаются значения D_{11}, D, $\tilde{\sigma}$;
- $c = a \cdot b$ – расчет произведения любых двух чисел, задаются значения a, b;
- $c = a / b$ – расчет частного любых двух чисел, задаются значения a, b;
- $c = a / b - 1$ – расчет частного любых двух чисел, от которого отнимается единица, задаются значения a, b;

3) строка «*Таблицы и графики*»:

- t_p – определение коэффициента Стьюдента из числа степеней свободы $k = n - m$ и доверительной вероятности P.

4.2.1 Осуществить обработку результатов совместных измерений для нахождения коэффициентов $\alpha_{тп}$ и $\beta_{тп}$ в уравнении термоЭДС – $E_t = \alpha_{тп} \cdot t + \beta_{тп} \cdot t^2$.

В процессе исследований получены шесть результатов измерений термоЭДС термопары E_{t1}, ..., E_{t6} при различных значениях температуры t_1, ..., t_6. Значения t_1, ..., t_6, E_{t1}, ..., E_{t6}, а также доверительной вероятности P, используемой для расчета доверительных границ случайных погрешностей, приведены в таблицах 4.1 и 4.2.

Таблица 4.1 – Исходные данные температуры для задания 4.2.1

Номер бригады	Результаты измерений температуры, °C					
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
1	30	80	130	180	230	280
2	200	300	400	500	600	700
3	100	200	300	400	500	600
4	100	200	300	400	500	600

Таблица 4.2 – Исходные данные термоЭДС для задания 4.2.1

Номер бригады	Результаты измерений термоЭДС, мВ						P
	E_{t1}	E_{t2}	E_{t3}	E_{t4}	E_{t5}	E_{t6}	
1	0,373	1,050	1,781	2,553	3,355	4,178	0,99
2	2,871	4,512	6,203	7,908	9,605	11,283	0,99
3	4,095	8,137	12,207	16,395	20,610	24,902	0,95
4	6,843	14,519	22,806	31,482	40,299	49,094	0,95

На рабочем столе учебного персонального компьютера запустить ярлык программы *LABS*. В открывшемся окне выбрать лабораторную работу № 6 и нажать кнопку «Дальше». Программа примет вид, показанный на рисунке 4.2.

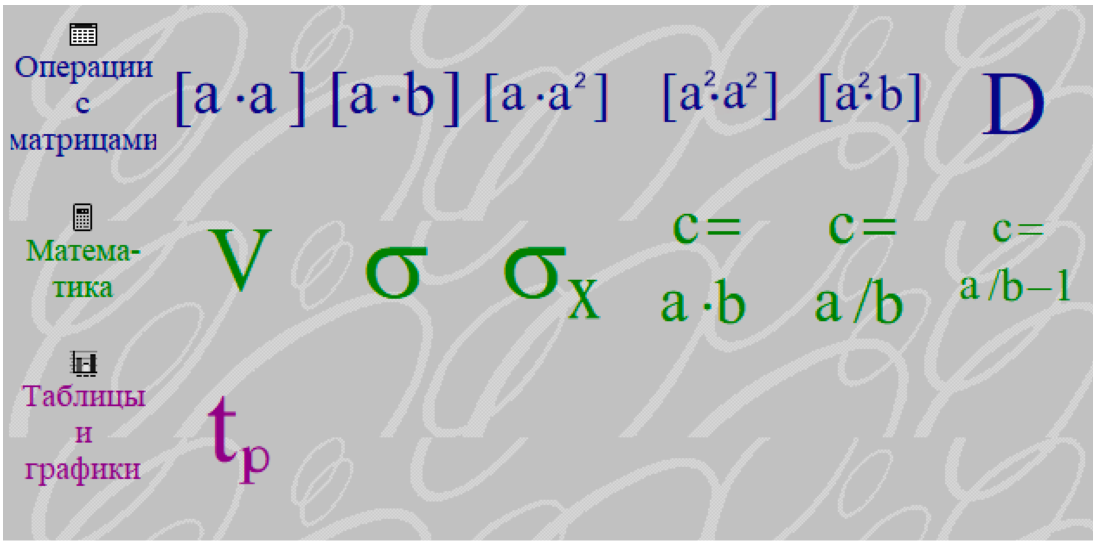


Рисунок 4.2 – Основное окно программы

Используя информацию об исходных данных, рассчитать значения $a_1^2 = t_1^2, ..., a_6^2 = t_6^2$ и занести их в таблицу 4.3 вместе со значениями $a_1 = t_1, ..., a_6 = t_6$.

Таблица 4.3 – Значения коэффициентов условных уравнений

a_1, °C	a_2, °C	a_3, °C	a_4, °C	a_5, °C	a_6, °C	a_1^2, (°C)^2	a_2^2, (°C)^2	a_3^2, (°C)^2	a_4^2, (°C)^2	a_5^2, (°C)^2	a_6^2, (°C)^2

Рассчитать значения $[a \cdot a]$, $[a \cdot a^2]$, $[a^2 \cdot a^2]$, $[a \cdot l]$, $[a^2 \cdot l]$, где $l_1 = E_{t1}, ..., l_6 = E_{t6}$, и занести их в таблицу 4.4. Привести вид нормальных уравнений и вид матриц, используемых для расчета оценок коэффициентов $\tilde{x} = \tilde{\alpha}_{\text{тп}}$, $\tilde{y} = \tilde{\beta}_{\text{тп}}$. Рассчитать значения определителей D, D_x, D_y, а также $x = \alpha_{\text{тп}}$, $y = \beta_{\text{тп}}$ и занести их в таблицу 4.5.

Таблица 4.4 – Элементы матрицы условных уравнений

$[a \cdot a]$, (°C)^2	$[a \cdot a^2]$, (°C)^3	$[a^2 \cdot a^2]$, (°C)^4	$[a \cdot l]$, (°C)·мВ	$[a^2 \cdot l]$, (°C)^2·мВ

Таблица 4.5 – Определители условных уравнений

D, (°C)^6	D_x, (°C)^5	D_y, (°C)^4	$\tilde{x} = \tilde{\alpha}_{\text{тп}}$, 1/(°C)	$\tilde{y} = \tilde{\beta}_{\text{тп}}$, 1/(°C)^2

Привести вид матриц, используемых для расчета D_{11} и D_{22}. Рассчитать невязки $V_1 = \tilde{\alpha}_{\text{тп}} t_1 + \tilde{\beta}_{\text{тп}} t_1^2 - E_{t1}, ..., V_6 = \tilde{\alpha}_{\text{тп}} t_6 + \tilde{\beta}_{\text{тп}} t_6^2 - E_{t6}$, СКО условных уравнений $\tilde{\sigma}$, значения D_{11}, D_{22} и СКО искомых величин $\tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}_{\alpha\text{тп}}$, $\tilde{\sigma}_y = \tilde{\sigma}_{\beta\text{тп}}$. Найденные значения занести в таблицу 4.6.

Таблица 4.6 – Результаты промежуточных расчетов

V_1, мВ	V_2, мВ	V_3, мВ	V_4, мВ	V_5, мВ	V_6, мВ	$\tilde{\sigma}$, мВ	D_{11}, 1/(°C)^4	D_{22}, 1/(°C)^2	$\tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}_{\alpha\text{тп}}$, 1/(°C)	$\tilde{\sigma}_y = \tilde{\sigma}_{\beta\text{тп}}$, 1/(°C)^2

Определить значение коэффициента t_p и рассчитать доверительные границы случайных погрешностей $\dot{\Delta}_x = \dot{\Delta}_{\alpha\text{тп}}$, $\dot{\Delta}_y = \dot{\Delta}_{\beta\text{тп}}$. Значения t_p, $\dot{\Delta}_x = \dot{\Delta}_{\alpha\text{тп}}$, $\dot{\Delta}_y = \dot{\Delta}_{\beta\text{тп}}$ занести в таблицу 4.7 и записать результаты измерений $\alpha_{\text{тп}}$, $\beta_{\text{тп}}$.

Таблица 4.7 – Итоговые результаты

t_p	$\dot{\Delta}_x = \dot{\Delta}_{\alpha\text{тп}}$, 1/(°C)	$\dot{\Delta}_y = \dot{\Delta}_{\beta\text{тп}}$, 1/(°C)^2	Результат измерения $\alpha_{\text{тп}}$	Результат измерения $\beta_{\text{тп}}$

4.2.2 Осуществить обработку результатов совместных измерений для нахождения коэффициентов **$\alpha_{тс}$** *и* **$\beta_{тс}$** *в уравнении сопротивления терморезистора –* **$R_t = R_0 \cdot (1 + \alpha_{тс} \cdot t + \beta_{тс} \cdot t^2)$.**

В процессе исследований получены шесть результатов измерений сопротивлений терморезистора $R_{t1}, ..., R_{t6}$ при различных значениях температуры $t_1, ..., t_6$.

Известно, что при $t_0 = 0$ °С сопротивление терморезистора составляет R_0 Ом. Значения $t_1, ..., t_6$, R_0, $R_1, ..., R_6$, а также доверительной вероятности P, используемой для расчета доверительных границ случайных погрешностей, приведены в таблицах 4.8 и 4.9.

Таблица 4.8 – Исходные данные температуры для задания 4.2.2

Номер бригады	Результаты измерений температуры, °С					
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
1	–50	50	100	150	200	250
2	–50	50	100	150	200	250
3	–70	30	80	130	180	230
4	–30	20	70	120	170	220

Таблица 4.9 – Исходные данные сопротивления для задания 4.2.2

Номер бригады	Результаты измерений сопротивлений, Ом							P
	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	
1	46,00	36,80	55,06	63,99	72,76	81,43	89,96	0,95
2	100,00	80,00	119,70	139,10	158,21	177,03	195,56	0,95
3	46,00	33,08	51,45	60,43	69,28	77,99	86,56	0,99
4	100,00	88,04	107,91	127,49	146,78	165,78	184,48	0,99

Используя информацию об исходных данных, рассчитать значения $a_1^2 = t_1^2, ..., a_6^2 = t_6^2$; $l_1 = R_{t1} / R_0 - 1, ..., l_6 = R_{t6} / R_0 - 1$ и занести их в таблицы 4.10 и 4.11 вместе со значениями $a_1 = t_1, ..., a_6 = t_6$.

Таблица 4.10 – Значения коэффициентов условных уравнений

a_1, °С	a_2, °С	a_3, °С	a_4, °С	a_5, °С	a_6, °С	a_1^2, (°С)^2	a_2^2, (°С)^2	a_3^2, (°С)^2	a_4^2, (°С)^2	a_5^2, (°С)^2	a_6^2, (°С)^2

Таблица 4.11 – Рассчитанные значения l

l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6

Дальнейшая обработка результатов наблюдений аналогична обработке согласно пункту 4.2.1 (при этом используются таблицы 4.3–4.7; вместо размерности «мВ» никакая размерность не ставится, т. к. $l = R_t / R_0 - 1$ – безразмерная величина; вместо индекса «тп» используется индекс «тс»).

Содержание отчета: отчет по лабораторной работе оформляется на стандартных листах бумаги. Текст отчета должен содержать цель работы, лабораторное задание, всю необходимую информацию о проделанной работе, выводы. Результаты расчетов сводятся в таблицы, которые должны соответствовать приведенным в методических указаниях. Отчет должен содержать алгоритмы и расчетные формулы, в соответствии с которыми осуществлялась обработка результатов наблюдений.

4.3 Контрольные вопросы

1 Какие измерения называются совместными? Какова разница между совокупными и совместными измерениями?

2 Выберите метод, который обычно используется для анализа совместных измерений:

а) метод наименьших квадратов;

б) метод максимального правдоподобия;

в) корреляционный анализ;

г) все вышеперечисленные методы.

3 Выберите, что такое корреляция в контексте совместных измерений:

а) степень зависимости между двумя переменными;

б) разница между максимальным и минимальным значениями;

в) среднее значение всех измерений;

г) инструментальная погрешность измерения.

4 Определите, какой коэффициент используется для оценки силы и направления линейной зависимости между двумя переменными:

а) коэффициент вариации;

б) коэффициент корреляции Пирсона;

в) стандартное отклонение;

г) доверительный интервал.

5 Определите, какой из следующих методов позволяет визуализировать взаимосвязь между двумя переменными:

а) гистограмма;

б) диаграмма рассеяния;

в) круговая диаграмма;

г) линейный график.

6 Назовите, что такое регрессионный анализ:

а) метод, используемый для определения среднего значения набора данных;

б) метод, позволяющий предсказать значение одной переменной на основе другой переменной;

в) метод, используемый для оценки погрешности измерений;

г) метод, позволяющий определить разброс данных.

7 Назовите, какой из следующих факторов может повлиять на результаты совместных измерений:

а) калибровка инструментов;

б) влияние внешних условий (температура, влажность);

в) человеческий фактор (ошибки при счете);

г) все вышеперечисленные факторы.

8 Определите, что такое мультиколлинеарность в контексте регрессионного анализа:

а) ситуация, когда две независимые переменные не связаны друг с другом;

б) ситуация, когда две или более независимые переменные сильно коррелируют друг с другом;

в) ситуация, когда зависимая переменная не зависит от независимых переменных;

г) ситуация, когда все переменные являются категориальными.

9 Выберите, какой из следующих методов можно использовать для проверки нормальности распределения данных:

а) тест Шапиро – Уилка;

б) тест Фишера;

в) тест Манна – Уитни;

г) тест Краскала – Уоллиса.

10 Определите, что такое доверительный интервал в контексте совместных измерений:

а) интервал значений, в котором находится истинное значение с заданной вероятностью для одной переменной;

б) интервал значений, который показывает разброс данных по всем измеряемым параметрам;

в) интервал значений для двух зависимых переменных;

г) интервал времени между двумя последовательными измерениями.

11 Почему исходные уравнения, образующие систему, называются условными?

12 В чем состоит суть метода наименьших квадратов, используемого при решении условных уравнений?

13 Как рассчитываются невязки системы условных уравнений?

14 Каким образом составляется система нормальных уравнений и какие методы ее решения известны?

15 Как можно оценить погрешности полученных результатов совместных измерений?

16 Приведите алгоритм обработки результатов совместных измерений для случая нелинейной зависимости в системе условных уравнений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 РМГ 29-2013. ГСИ. Метрология. Основные термины и определения. – Введ. 2015–01–01. – М. : Стандартинформ, 2014.

2 ГОСТ Р 8.736–2011. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения. – Введ. 2013–01–01. – М. : Стандартинформ, 2010.

3 Кострикин, А. М. Лабораторный практикум по курсу «Теоретическая метрология» для студентов специальности Т.13.01 «Метрология, стандартизация и сертификация». В 2 ч. Ч. 1 / А. М. Кострикин, А. В. Гусинский. – Минск : БГУИР, 2001. – 47 с.

4 ГОСТ 34100.3–2017. Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения. – Введ. 2019–09–01. – М. : Стандартинформ, 2018.

5 МИ 2083–90. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей. – Введ. 1992–01–01. – М. : НПО «ВНИИМ им. Д. И. Менделеева», 1991.

6 Кострикин, А. М. Лабораторный практикум по курсу «Теоретическая метрология» для студентов специальности Т.13.01 «Метрология, стандартизация и сертификация». В 2 ч. Ч. 2 / А. М. Кострикин, А. В. Гусинский. – Минск : БГУИР, 2001. – 48 с.

Св. план 2025, поз. 33

Учебное издание

Гусинский Александр Владимирович
Певнева Наталья Алексеевна

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *А. Ю. Шурко*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *А. А. Лущикова*

Подписано в печать 01.12.2025. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 4,07. Уч.-изд. л. 4,1. Тираж 40 экз. Заказ 95.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск