

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА СТРАН БРИКС НА ОСНОВЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

А.Ф. Проневич<sup>1</sup>, Г.А. Хацкевич<sup>2</sup>, Д.И. Хоха<sup>3</sup>

*Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Беларусь, Гродно*

<sup>1</sup>*pranevich@grsu.by, <sup>3</sup>hdimagrodno@gmail.com*

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*

<sup>2</sup>*g.a.khatskevich@gmail.com*

**Аннотация.** Разработаны математические модели экономического роста стран БРИКС в форме статических двухфакторных производственных функций с постоянной эластичностью замещения факторов производства (Кобба-Дугласа и CES) на основе статистических данных за 2000–2023 гг. о реальном валовом внутреннем продукте, валовом накоплении основного капитала и общей численности рабочей силы.

**Ключевые слова:** производственная функция, экономический рост, страна БРИКС.

## MATHEMATICAL MODELING OF ECONOMIC GROWTH FOR BRICS COUNTRIES BASED ON PRODUCTION FUNCTIONS

А.Ф. Проневич<sup>1</sup>, Г.А. Хацкевич<sup>2</sup>, Д.И. Хоха<sup>3</sup>

*Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus, Grodno*

<sup>1</sup>*pranevich@grsu.by, <sup>3</sup>hdimagrodno@gmail.com*

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Belarus, Grodno*

<sup>2</sup>*g.a.khatskevich@gmail.com*

**Abstract.** Mathematical models of economic growth for the BRICS countries have been developed in the form of static two-factor production functions with constant elasticity of substitution of production factors (Cobb-Douglas and CES functions) based on statistical data for 2000–2023 on the real gross domestic product, gross fixed capital formation and total workforce.

**Keywords:** production function, economic growth, BRICS country.

**Для цитирования:** Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А., Хоха Д.И. Математическое моделирование экономического роста стран БРИКС на основе производственных функций // Математические методы в технологиях и технике. 2025. № 12-3. С. 50-53.

**Введение.** Производство является процессом преобразования одних благ в другие: факторов производства в готовую продукцию. Зависимость между количеством используемых факторов производства и максимально возможным выпуском продукции называют производственной функцией [1, с. 25]. Факторы производства можно представить в виде двух агрегированных показателей (капитал и труд), а моделирование производственного процесса  $P$  осуществлять на основе статичной двухфакторной производственной функции (ПФ)

$$Y = F(K, L) \quad \forall (K, L) \in G, \quad (1)$$

где  $K$  – капитал (объем основных фондов в стоимостном или натуральном выражении),  $L$  – труд (объем трудовых ресурсов, т.е. число рабочих),  $Y$  – объем выпущенной продукции в стоимостном или натуральном выражении. Предполагается, что функция  $F$  является неотрицательной и дважды непрерывно дифференцируемой в области  $G$  из пространства затрат  $\mathbf{R}_+^2 = \{(K, L) : K \geq 0, L \geq 0\}$ .

В настоящее время ПФ является базовым элементом математического моделирования производственных систем на различных уровнях – от крупного предприятия до национальных экономик [2-4]. Из-за большого разнообразия производственных процессов  $P$  выбор функции ПФ (1) является одним из наиболее сложных и ответственных этапов экономико-статистического моделирования. Здесь

происходит «стыковка» информации об объекте моделирования и сведений о свойствах различных классов производственных функций, из числа которых предстоит выбрать вид модели.

Большинство из применяемых в настоящее время ПФ возникли или могут рассматриваться как общий интеграл системы дифференциальных уравнений в частных производных, выражающих инвариантность некоторых характеристик ПФ или соотношений между ними при изменении аргументов.

В процессе развития теории ПФ определился набор стандартных ПФ, обладающих установленными свойствами, например, однородности и заданной эластичности замещения факторов производства. Отметим, что характеристика эластичности замещения факторов производства [3, с. 22-33] это отношение:

$$\sigma = \frac{\left( K \frac{\partial F}{\partial K} + L \frac{\partial F}{\partial L} \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{\partial F}{\partial L}}{KL \left( 2 \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} - \left( \frac{\partial F}{\partial K} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} - \left( \frac{\partial F}{\partial L} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} \right)}.$$

Она является одним из основных объектов теории ПФ, наиболее содержательным и сложным для изучения. Класс однородных двухфакторных ПФ (1) с постоянной эластичностью описывается следующим утверждением (см., например, работы [2, 3]).

**Теорема 1.** *Пусть двухфакторная ПФ (1) является однородной степени  $\mu \neq 0$  и имеет постоянную эластичность замещения факторов производства  $\sigma \neq 0$ . Тогда двухфакторная ПФ (1) имеет аналитический вид*

$$Y = \begin{cases} AK^\alpha L^{\mu-\alpha} & \text{при } \sigma = 1; \\ A(aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho})^{-\mu/\rho} & \text{при } \sigma \neq 1, \end{cases}$$

где  $\alpha \neq 0$  и  $\alpha \neq \mu$ ; числа  $A > 0$ ,  $a \in [0;1]$ ,  $\rho = (\sigma - 1)/\sigma$ .

В 1928 году американскими учеными Ч.У. Коббом и П.Х. Дугласом в работе «Теория производства» [5] для описания влияния величины затрачиваемого капитала и труда на объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США за 1899 – 1922 гг. была использована степенная функция (ПФ Кобба-Дугласа,  $\sigma = 1$ )

$$Y = AK^\alpha L^\beta, \quad \forall(K, L) \in \mathbf{R}_+^2, \quad A > 0, \quad (2)$$

при дополнительных условиях на показатели степени:  $\alpha, \beta \in (0;1)$ ,  $\alpha + \beta = 1$ . В более поздних работах П.Х. Дуглас снял предположения об условиях, накладываемых на показатели степеней ПФ (2). О значимости этой работы для экономической науки П.Э. Самуэльсон так высказался в статье [6]: «Если Нобелевские премии по экономике присуждались бы начиная с 1901 года, как это было в области физики, химии, медицины, мира и литературы, то Пол Х. Дуглас вероятно получил бы её до Второй мировой войны за свои новаторские эконометрические попытки измерить предельную производительность и количественно оценить потребности в факторах производства».

В 1956 году Р.М. Солоу [7] предложена двухфакторная ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов производства (CES)

$$Y = A(aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho})^{-\mu/\rho}, \quad \forall(K, L) \in G, \quad A > 0, \quad a \in [0;1], \quad \rho \in [-1; 0) \cup (0; +\infty), \quad (3)$$

которая стала широко применяться как математическая модель производства, более адекватная реальности, чем ПФ Кобба-Дугласа (2).

В настоящей работе построены математико-статистические модели экономического роста стран БРИКС (включая официальных кандидатов и партнеров) на

основе ПФ Кобба-Дугласа (2) и CES (3). Статья продолжает исследования авторов [8-10] по моделированию и прогнозированию экономического роста на основе теории ПФ.

**Результаты.** Для группы стран БРИКС, включая официальных кандидатов и близких партнёров, по статистическим данным, взятым из базы данных Всемирного банка (<https://data.worldbank.org>) за 2000 – 2023 годы для  $Y$  (реальный валовой внутренний продукт в постоянных ценах 2015 г. в долл. США, индикатор NY.GDP.MKTP.KD),  $K$  (валовое накопление основного капитала в постоянных ценах 2015 г. в долл. США, индикатор NE.GDI.FTOT.KD) и  $L$  (общая численность рабочей силы, индикатор SL.TLF.TOTL.IN), построены математико-статистические модели экономического роста на базе ПФ Кобба-Дугласа (табл. 1) и ПФ CES (табл. 2).

Для оценки полученных экономико-математических моделей использовались следующие метрики: *коэффициент детерминации* ( $R^2$ ), *средняя абсолютная ошибка* ( $MAE$ ) и скорректированный для малых выборок *критерий Акаике* ( $AIC_c$ ) [11]:

$$AIC_c = n \cdot \ln(MSE) + \frac{n \cdot (n + m)}{n - m - 2},$$

где  $n$  – количество исходных данных,  $m$  – число параметров модели.

Таблица 1. Модели экономического роста на базе ПФ Кобба-Дугласа (2)

№	Страна	A	$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$	$R^2$	MAE	AICc
1.	Беларусь	1,0736	0,5618	0,7623	1,3240	0,8996	0,0640	-165,5487
2.	Боливия	1,0802	0,3885	0,7625	1,1510	0,9870	0,0209	-242,1367
3.	Бразилия	1,0321	0,3925	0,9638	1,3563	0,9904	0,0146	-269,5680
4.	Куба	1,0392	0,4479	2,9389	3,3868	0,9796	0,0250	-230,9032
5.	Египет	0,9443	0,3218	1,4589	1,7807	0,9446	0,0430	-193,4176
6.	Индия	1,0043	0,6883	0,6734	1,3617	0,9918	0,0199	-249,7910
7.	Индонезия	0,9626	0,5065	1,2311	1,7377	0,9960	0,0118	-279,9839
8.	Иран	0,9368	0,0117	1,3907	1,4025	0,9495	0,0337	-207,9923
9.	Казахстан	1,0756	0,2504	3,2206	3,4709	0,9488	0,0469	-189,5630
10.	Малайзия	0,9916	0,1227	1,4348	1,5575	0,9950	0,0145	-270,5790
11.	Россия	1,0639	0,4421	0,0000	0,4421	0,6538	0,0824	-144,7751
12.	Южная Африка	1,0891	0,3770	0,7829	1,1599	0,9888	0,0154	-261,8575
13.	Таиланд	0,9839	0,4222	2,8870	3,3092	0,9598	0,0341	-206,4004
14.	Уганда	0,9959	0,7341	0,1809	0,9150	0,9966	0,0129	-276,6173
15.	Узбекистан	0,9972	0,3786	1,2293	1,6079	0,9906	0,0185	-246,7666

Оценивание параметров ПФ Кобба-Дугласа (2) и CES (3) выполнялось в два этапа: на первом этапе для ПФ Кобба-Дугласа использовался линейный метод наименьших квадратов после непосредственного логарифмирования (2), а для CES-функции метод Дж. Кменты [12]; на втором этапе полученный набор численных значений параметров использовался как начальное приближение и применялся нелинейный метод наименьших квадратов непосредственно к (2) и (3), а минимизация суммы квадратов отклонений осуществлялась методом Левенберга-Марквардта [13].

Критерий  $R^2$  используем для «грубой» оценки степени соответствия модели исходным данным, считая, что степень соответствия приемлема, если  $R^2$  не менее значения 0,7. Выбор «лучшей» модели экономического роста из двух построенных (ПФ Кобба-Дугласа и CES) для каждой из стран БРИКС осуществлялся по скорректированному для малых выборок информационному критерию Акаике. Чем «лучше» модель, тем меньше значение по критерию Акаике. При этом отметим, что

критерий Акаике сравнивает модели, однако не оценивает качество моделей, т.е. обе модели могут плохо соответствовать данным, при этом одна из них «менее плохо».

Таблица 2. Модели экономического роста на базе ПФ с постоянной эластичностью замещения (3)

№	Страна	A	$a$	1- $a$	$\mu$	$\rho$	$\sigma$	R <sup>2</sup>	MAE	AICc
1.	Беларусь	1,0286	0,1728	0,8272	1,8248	-0,9000	10,0000	0,9172	0,0571	-169,5007
2.	Боливия	1,0860	0,4119	0,5881	1,2121	2,2669	0,3061	0,9898	0,0201	-247,9305
3.	Бразилия	1,0308	0,2610	0,7390	1,3499	-0,9000	10,0000	0,9907	0,0143	-267,9874
4.	Куба	0,9895	0,2001	0,7999	2,0000	-0,7220	3,5976	0,9386	0,0393	-190,9207
5.	Египет	0,9655	0,3055	0,6945	1,8398	2,8131	0,2623	0,9475	0,0397	-192,7103
6.	Индия	1,0194	0,9244	0,0756	1,0269	1,7826	0,3594	0,9950	0,0143	-264,2227
7.	Индонезия	0,9811	0,5024	0,4976	1,6263	1,6744	0,3739	0,9983	0,0074	-307,0265
8.	Иран	0,9271	0,0350	0,9650	1,3987	36,7456	0,0265	0,9570	0,0303	-210,9215
9.	Казахстан	1,0432	0,2196	0,7804	2,0000	-0,1282	1,1471	0,9294	0,0460	-176,0366
10.	Малайзия	0,9915	0,0750	0,9250	1,5535	-0,9000	10,0000	0,9951	0,0145	-268,1001
11.	Россия	1,0114	0,2058	0,7942	1,2051	-0,9000	10,0000	0,7100	0,0675	-148,2149
12.	Южная Африка	1,0914	0,3314	0,6686	1,1933	0,8447	0,5421	0,9891	0,0145	-260,1558
13.	Таиланд	0,9066	0,1917	0,8083	2,0000	-0,9000	10,0000	0,8556	0,0661	-160,3736
14.	Уганда	0,9953	0,8758	0,1242	0,9085	1,1378	0,4678	0,9967	0,0126	-275,6714
15.	Узбекистан	0,9730	0,2095	0,7905	1,4288	-0,4042	1,6785	0,9927	0,0159	-252,7099

**Заключение.** Разработанные модели позволяют прогнозировать долгосрочное экономическое развитие стран БРИКС (включая официальных кандидатов и партнеров).

### Библиографический список

1. Тарасевич Л.С., Гальперин В.М., Игнатьев С.М. 50 лекций по микроэкономике. СПб.: Экономическая школа, 2000. 862 с.
2. Клейнер Г.Б. Экономика. Моделирование. Математика. Избранные труды. М.: ЦЭМИ РАН, 2016. 856 с.
3. Горбунов В.К. Производственные функции: теория и построение. Ульяновск: УлГУ, 2013. 84 с.
4. Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А. Производственные функции с заданными экономико-математическими характеристиками для экономики устойчивого развития // Экономика устойчивого развития: коллективная монография. Минск. 2022. С. 267-316.
5. Cobb C.W., Douglas P.H. A theory of production // American Economic Review. 1928. Vol. 18, pp. 139-165.
6. Samuelson P.A. Paul Douglas's measurement of production functions and marginal productivities // Journal of Political Economy. 1979. Vol. 87. No. 5, pp. 923-939.
7. Solow R.M. A contribution to the theory of economic growth // Quarterly Journal of Economics. 1956. Vol. 70. No. 1, pp. 65-94.
8. Khatskevich G.A., Pranovich A.F. On quasi-homogeneous production functions with constant elasticity of factors substitution // Journal of Belarussian State University. Economics. 2017. No. 1, pp. 46-50.
9. Khatskevich G.A., Pranovich A.F. Production functions with given elasticities of output and production // Journal of Belarussian State University. Economics. 2018. No. 2, pp. 13-21.
10. Khatskevich G.A., Pranovich A.F., Karaleu Yu.Yu. Analytical forms of production functions with given total elasticity of production // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2019. Vol. 1052, pp. 276-285.
11. Hurvich C.M., Tsai Ch.-L. Regression and time series model selection in small samples // Biometrika. 1989. Vol. 76. Iss. 2, pp. 297-307.
12. Kmenta J. On estimation of the CES production function // International Economic Review. 1967. Vol. 8, pp. 180-189.
13. Демиденко Е.З. Оптимизация и регрессия. М.: Наука, 1989. 296 с.