Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Инженерно-экономический факультет

Кафедра экономической информатики

О. Голда, Н. О. Петрович, Д. А. Сторожев

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ

*Рекомендовано УМО по образованию в области информатики
и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия
для специальности 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии
(по направлениям)» направлений специальности
1-40 05 01-02 «Информационные системы и технологии (в экономике)»
и 1-40 05 01-08 «Информационные системы и технологии (в логистике)»*

Минск БГУИР 2026

УДК 336.763(076)
ББК 65.261я73
Г60

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра бизнес-администрирования
государственного учреждения образования
«Институт бизнеса Белорусского государственного университета»
(протокол № 5 от 27.12.2023);

доцент кафедры математических методов в экономике
учреждения образования «Белорусский государственный
экономический университет»
кандидат экономических наук А. А. Мозоль

Голда, О.
Г60 Моделирование рынка ценных бумаг : учеб.-метод. пособие / О. Голда, Н. О. Петрович, Д. А. Сторожев. – Минск : БГУИР, 2026. – 168 с. : ил.
ISBN 978-985-543-859-6.

Излагается теоретический материал о расчетах, связанных с ценными бумагами, приводится математический аппарат оптимизации портфелей ценных бумаг, описываются количественные методы анализа рынка ценных бумаг, а также приводится технический анализ.

УДК 336.763(076)
ББК 65.261я73

ISBN 978-985-543-859-6

Содержание

Тема 1. Наращение и дисконтирование по сложным процентам

Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, часто называют *капитализацией процентов*.

1.1 Формула наращения по сложным процентам

Пусть первоначальная сумма долга равна P, тогда через 1 год сумма с присоединенными процентами составит $P(1+i)$, через 2 года – $P(1+i)(1+i)=P(1+i)^2$, через n лет – $P(1+i)^n$. Таким образом получаем формулу наращения для сложных процентов:

$$S = P(1+i)^n, \tag{1.1}$$

где S – наращенная сумма;

i – годовая ставка сложных процентов;

n – срок ссуды;

$(1+i)^n$ – множитель наращения.

В практических расчетах в основном применяют дискретные проценты, т. е. проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т. д.). Наращение по сложным процентам происходит по закону геометрической прогрессии, первый член которой равен P, а знаменатель – $(1+i)$.

Отметим, что при сроке $n>1$ наращение по простым процентам дает больший результат, чем по сложным, а при $n<1$ – наоборот. В этом нетрудно убедиться на конкретных числовых примерах. Наибольшее превышение суммы, наращенной по простым процентам, над суммой, наращенной по сложным процентам (при одинаковых процентных ставках), достигается при $n=1/2$.

1.2 Формула наращения по сложным процентам при изменении ставки во времени

В том случае, когда ставка сложных процентов меняется со временем, формула наращения имеет следующий вид:

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\dots(1+i_k)^{n_k}, \tag{1.2}$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ – последовательные значения ставок процентов, действующих в периоды $n_1, n_2, \ldots, n_k$ соответственно.

Пример 1.1. В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 20 % годовых плюс маржа: 10 % в первые 2 года, 8 % – в третий год, 5 % – в четвертый. Определить величину множителя наращения за 4 года.

Решение:

$(1+0{,}3)^2(1+0{,}28)(1+0{,}25) = 2{,}704$.

1.3 Формула удвоения суммы

Чтобы оценить свои перспективы, кредитору или должнику следует знать, через сколько лет сумма ссуды возрастет в N раз при данной процентной ставке.

Приравняв множитель наращения к величине N, получим:

а) для простых процентов

$1 + n \cdot i_{\text{прост}} = N$, откуда

$$n = (N-1)/i_{\text{прост}}; \tag{1.3}$$

б) для сложных процентов

$(1 + n \cdot i_{\text{сложн}})^n = N$, откуда

$$n = (\ln(N)) / (\ln(1+i_{\text{сложн}})). \tag{1.4}$$

Особенно часто используется $N = 2$. Тогда формулы (1.3) и (1.4) называются **формулами удвоения** и принимают следующий вид:

1) для простых процентов

$$n = 1/i_{\text{прост}}; \tag{1.5}$$

2) для сложных процентов

$$n = \ln 2/(\ln(1+i_{\text{сложн}})). \tag{1.6}$$

Если формулу (1.5) легко применять для прикидочных расчетов, то формула (1.6) требует применения калькулятора. Однако при небольших ставках процентов (скажем, менее 10 %) вместо формулы (1.6) можно воспользоваться более простой приближенной. Ее легко получить, если учесть, что $\ln 2 \approx 0{,}7$, а $\ln(1+i) \approx i$. Тогда

$$n \approx 0{,}7/i. \tag{1.6a}$$

Пример 1.2. Рассчитать, за сколько лет долг увеличится вдвое при ставке простых и сложных процентов, равной 10 %. Для ставки сложных процентов расчеты выполнить по точной и приближенной формулам. Результаты сравнить.

Решение:

а) при простых процентах:

$$n = 1 / i_{\text{прост}} = 1 / 0{,}1 = 10 \text{ лет;}$$

б) при сложных процентах:

$$n = \ln 2 \,/\, (\ln(1 + i_{\text{сложн}})) = 0{,}693147 / \ln(1 + 0{,}1) = 0{,}693147 / 0{,}09531018 = 7{,}27 \text{ лет;}$$

в) при сложных процентах:

$$n = 0{,}7 / i_{\text{сложн}} = 0{,}7 / 0{,}1 = 7 \text{ лет.}$$

1.4 Начисление годовых процентов при дробном числе лет

При дробном числе лет проценты начисляются различными способами.

1. По формуле сложных процентов:

$$S = P(1 + i)^n. \tag{1.7}$$

2. На основе смешанного метода, согласно которому за целое число лет начисляются сложные проценты, а за дробное – простые.

Тогда получим

$$S = P(1 + i)^a (1 + bi), \tag{1.8}$$

где $n = a + b$;

a – целое число лет;

b – дробная часть года.

3. В ряде коммерческих банков применяется правило, в соответствии с которым за отрезки времени меньше периода начисления проценты не начисляются, т. е.

$$S = P(1 + i)^a. \tag{1.9}$$

1.5 Номинальная и эффективная ставки процентов

Пусть годовая ставка сложных процентов равна j, а число периодов начисления в году – m. Тогда каждый раз проценты начисляют по ставке j / m. Ставка j называется **номинальной.** Начисление процентов по номинальной ставке производится по формуле

$$S = P(1 + j / m)^N, \tag{1.10}$$

где N – число периодов начисления.

Если срок ссуды измеряется дробным числом периодов начисления, то при m-разовом начислении процентов в году наращенную сумму можно рассчитать несколькими способами, приводящими к различным результатам:

1) по формуле сложных процентов:

$$S = P(1 + j / m)^{N/\tau}, \tag{1.11}$$

где N/τ – число (возможно дробное) периодов начисления процентов;

τ – период начисления процентов,

2) по смешанной формуле:

$$S = P(1 + j / m)^{a} (1 + b \cdot (j / m)), \tag{1.12}$$

где a – целое число периодов начисления (т. е. $a = N/\tau$ – целая часть от деления всего срока ссуды N на период начисления τ);

b – оставшаяся часть периода начисления ($b = N/\tau - a$).

Пример 1.3. Размер займа составляет 20 млн руб. Срок его предоставления составляет 28 месяцев. Номинальная процентная ставка равна 60 % годовых, а начисление процентов осуществляется ежеквартально. Необходимо рассчитать итоговую сумму займа для следующих случаев: 1) когда на дробную часть начисляются сложные проценты, 2) когда на дробную часть начисляются простые проценты, 3) когда дробная часть игнорируется. Полученные результаты следует сравнить.

Решение:

По условию всего имеется $\frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$ кварталов. Произведем расчеты наращенной суммы:

1) $S = 20(1 + \frac{0{,}6}{4})^{9\frac{1}{3}} = 73{,}713$ млн руб.

2) $S = 20(1 + \frac{0{,}6}{4})^{9} \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4} \cdot \frac{1}{3}) = 73{,}875$ млн руб.

3) $S = 20(1 + \frac{0{,}6}{4})^{9} = 70{,}358$ млн руб.

Сравнение наращенных сумм показывает, что наибольшая величина наблюдается во втором случае, т. е. при начислении простых процентов на дробную часть.

Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m-разовое наращение в год по ставке j / m.

Если проценты капитализируются m раз в год, каждый раз со ставкой j/m, то по определению эффективной ставки можно записать равенство для соответствующих множителей наращения:

$$(1+i_э)^m = (1+j/m)^{mn}, \tag{1.13}$$

где $i_э$ – эффективная ставка;

j – номинальная ставка.

Отсюда получаем, что связь между эффективной и номинальной ставками выражается соотношением

$$i_э = (1+j/m)^{mn} - 1. \tag{1.14}$$

Обратная зависимость имеет вид

$$j = m[(1+i_э)] - 1. \tag{1.15}$$

Пример 1.4. Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 10 % годовых.

Решение:

$$i_э = (1 + 0{,}1 / 4)^4 – 1 = 0{,}1038, \text{ т. е. } 10{,}38\ \%.$$

Пример 1.5. Определить, какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12 %.

Решение:

$$j = 4[(1+0{,}12)^{1/4} - 1] = 0{,}11495, \text{ т. е. } 11{,}495\ \%.$$

1.6 Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов

Как и в случае простых процентов, рассмотрим два вида учета – математический и банковский.

Математический учет. В этом случае решается задача, обратная наращению по сложным процентам. Запишем исходную формулу для наращения $S = P(1+i)^n$ и решим ее относительно P.

$$P = S\frac{1}{(1+i)^n} = Sv^n, \tag{1.16}$$

где v^n – учетный или дисконтный множитель.

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}. \tag{1.17}$$

Если проценты начисляются m раз в году, то получим

$$P = S\frac{1}{(1+j/m)^{mn}} = Sv^{mn}, \tag{1.18}$$

где v^{mn} – дисконтный множитель.

$$v^{mn} = \frac{1}{(1+j/m)^{mn}} = (1+j/m)^{-mn}. \tag{1.19}$$

Величину P, полученную дисконтированием S, называют **современной**, или **текущей стоимостью**, или **приведенной величиной** S. Суммы P и S эквивалентны в том смысле, что платеж в сумме S через n лет равноценен сумме P, выплаченной в настоящий момент.

Разность $D = S - P$ называют **дисконтом.**

Банковский учет. В этом случае предполагается использование сложной учетной ставки. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется при помощи формулы

$$P = S(1 - d_{\text{сп}})^n, \tag{1.20}$$

где $d_{\text{сп}}$ – сложная годовая учетная ставка.

Дисконт в этом случае равен

$$D = S - P = S - S(1 - d_{\text{сп}})^n = S(1 - (1 - d_{\text{сп}})^n). \tag{1.21}$$

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, так как учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

1.7 Номинальная и эффективная учетные ставки процентов

В тех случаях, когда дисконтирование применяют m раз в году, используют **номинальную учетную ставку** f. Тогда в каждом периоде, равном $1/m$ части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке f/m. Процесс дисконтирования по этой сложной учетной ставке m раз в году описывается формулой

$$P = S(1 - f/m)^N, \tag{1.22}$$

где N – общее число периодов дисконтирования $N = mn$.

Дисконтирование не один, а m раз в году быстрее снижает величину дисконта.

Под **эффективной учетной ставкой** понимают сложную годовую учетную ставку, эквивалентную (по финансовым результатам) номинальной, применяемой при заданном числе дисконтирований m в году.

В соответствии с определением эффективной учетной ставки найдем ее связь с номинальной из равенства дисконтных множителей:

$$(1-f/m)^{mn}=(1-d_{\text{сп}})^n,$$

из которого следует, что

$$d_{\text{сп}}=f-(1-f/m)^m. \qquad (1.23)$$

Отметим, что эффективная учетная ставка всегда меньше номинальной.

Наращение по сложной учетной ставке. Наращение является обратной задачей для определения учетных ставок. Формулы наращения по сложным учетным ставкам можно получить, разрешая соответствующие выражения для дисконтирования (1.22) и (1.23) относительно S.

Из соотношения $P=S(1-d_{\text{сп}})^n$ следует

$$S=P\frac{1}{(1-d_{\text{сп}})^n},$$

а из соотношения $P=S(1-f/m)^N$ получаем, что

$$S=P\frac{1}{(1-f/m)^N}.$$

Пример 1.6. Какую сумму следует проставить в векселе, если реально выданная сумма равна 20 млн руб., а срок погашения – 2 года? Вексель рассчитывается исходя из сложной годовой учетной ставки 10 %.

Решение:

$$S=\frac{20}{(1-0{,}1)^2}=24{,}691358 \text{ млн руб.}$$

Пример 1.7. Решить предыдущую задачу при условии, что наращение по сложной учетной ставке осуществляется не один, а четыре раза в год.

Решение:

$$S=\frac{20}{(1-0{,}1/4)^8}=24{,}490242 \text{ млн руб.}$$

1.8 Расчет срока ссуды и процентных ставок

В ряде практических задач начальная P и конечная S суммы заданы контрактом и требуется определить либо срок платежа, либо процентную ставку, которая в данном случае может служить мерой сравнения рыночных показателей и характеристикой доходности операции для кредитора. Указанные величины нетрудно найти из исходных формул наращения или дисконтирования.

Срок ссуды. Рассмотрим задачи по расчету срока ссуды для различных ставок (таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Расчет срока ссуды и процентных ставок

Ставка	Исходная формула	Срок ссуды	Процентная ставка
Сложная годовая ставка i	$S = P(1+i)^n$	$n = \dfrac{\log(S/P)}{\log(1+i)}$	$i = \left(\dfrac{S}{P}\right)^{1/n} - 1$
Номинальная ставка процентов m раз в году	$S = P(1+j/m)^{mn}$	$n = \dfrac{\log(S/P)}{m\log(1+j/m)}$	$j = m(\left(\dfrac{S}{P}\right)^{1/(mn)} - 1)$
Сложная годовая учетная ставка d	$P = S(1-d)^n$	$n = \dfrac{\log(P/S)}{\log(1-d)}$	$d = 1 - \left(\dfrac{P}{S}\right)^{1/n}$
Номинальная учетная ставка m раз в году	$P = S(1-f/m)^{mn}$	$n = \dfrac{\log(P/S)}{m\log(1-f/m)}$	$f = m(1 - \left(\dfrac{P}{S}\right)^{1/(mn)})$
Постоянная сила роста δ	$S = Pe^{\delta n}$	$\ln(S/P) = \delta n$	$\delta = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{S}{P}\right)$

1.9 Начисление процентов и инфляция

Следствием инфляции является падение покупательной способности денег, которое за период n характеризуется индексом J_n. *Индекс покупательной способности* J_n равен обратной величине индекса цен J_p, т. е.

$$J_n = 1/J_p. \tag{1.24}$$

Индекс цен указывает, во сколько раз выросли цены за указанный промежуток времени.

Наращение по простым процентам. Если наращенная за n лет сумма денег составляет S, а индекс цен равен J_p, то реально наращенная сумма денег с учетом их покупательной способности равна

$$C = S/J_p. \tag{1.25}$$

Пусть ожидаемый среднегодовой темп инфляции (характеризующий прирост цен за год) равен h. Тогда годовой индекс цен составит $(1+h)$.

Если наращение производится по простой ставке в течение n лет, то реальное наращение при темпе роста инфляции h составит

$$C = (P(1 + ni)) / J_p, \tag{1.26}$$

где в общем случае

$$J_p = \prod_{i=1}^{n}(1+h_i), \tag{1.27}$$

и, в частности, при неизменном темпе роста цен h,

$$J_p = (1+h)^n. \tag{1.28}$$

Процентная ставка, которая при начислении простых процентов компенсирует инфляцию, равна

$$i = \frac{J_p - 1}{n}. \tag{1.29}$$

Один из способов компенсации обесценивания денег заключается в увеличении ставки процентов на величину так называемой **инфляционной премии**. Скорректированная таким образом ставка называется **брутто-ставкой**. Брутто-ставка, которую будем обозначать символом $\tilde{r}$, находится из равенства скорректированного на инфляцию множителя наращения по брутто-ставке и множителя наращения по реальной ставке процента:

$$\frac{1+n\tilde{r}}{J_p} = 1+ni, \tag{1.30}$$

откуда

$$\tilde{r} = \frac{(1+ni)J_p - 1}{n}. \tag{1.31}$$

Наращение по сложным процентам. Наращенная по сложным процентам сумма к концу срока ссуда с учетом падения покупательной способности денег (т. е. в неизменных рублях) составит

$$C = P\frac{(1+i)^n}{J_p}, \tag{1.32}$$

где индекс цен определяется выражением (1.27) или (1.28) в зависимости от непостоянного или постоянного темпа инфляции.

В этом случае падение покупательной способности денег компенсируется при ставке $i = h,$ обеспечивающей равенство $C = P$.

При начислении сложных процентов применяются **два способа компенсации потерь** от снижения покупательной способности денег.

1. Корректировка ставки процентов, по которой производится наращение, на величину **инфляционной премии.** Ставка процентов, увеличенная на величину инфляционной премии, называется брутто-ставкой. Будем обозначать ее символом $\tilde{r}$. Считая, что годовой темп инфляции равен h, можем написать равенство соответствующих множителей наращения:

$$\frac{1+\tilde{r}}{1+h}=1+i, \qquad (1.33)$$

где i – реальная ставка.

Отсюда

$$\tilde{r}=i+h+ih, \qquad (1.34)$$

т. е. инфляционная премия равна $h+ih$.

2. Индексация первоначальной суммы P. В этом случае сумма P корректируется согласно движению заранее оговоренного индекса. Тогда

$$S=PJ_p(1+i)^n. \qquad (1.35)$$

Нетрудно заметить, что и в случае 1, и в случае 2 в итоге мы приходим к одной и той же формуле наращения. В ней первые два сомножителя в правой части отражают индексацию первоначальной суммы, а последние два – корректировку ставки процента.

1.10 Измерение реальной ставки процента

На практике приходится решать и обратную задачу – находить реальную ставку процента в условиях инфляции. Из соотношений между множителями наращения нетрудно вывести формулы, определяющие реальную ставку i по заданной (или объявленной) брутто-ставке $\tilde{r}$.

При начислении простых процентов годовая реальная ставка процентов равна

$$i=\frac{1}{n}\left(\frac{1+n\tilde{r}}{J_p}-1\right). \qquad (1.36)$$

При начислении сложных процентов реальная ставка процентов определяется следующим выражением:

$$i=\frac{1+\tilde{r}}{1+h}-1=\frac{\tilde{r}-h}{1+h}. \qquad (1.37)$$

В рекламном «море» предложений различных банков по кредитным операциям по сложным процентам можно ориентироваться, если пересчитать их на эффективную годовую ставку. При номинальной ставке j, начислении процентов m раз в году и сроке кредита n лет наращенная сумма равна

$$S_c = P(1+\frac{j}{m})^{mn}.$$

Если S и P одинаковы, то при одинаковом n и процентной ставке i, обеспечивающей ту же доходность при начислении процентов один раз в году,

$$S_c = P(1+i_{эф})^n. \qquad (1.39)$$

Приравнивая наращенные суммы, для $i_{эф}$, которая в этом случае называется эффективной годовой ставкой, получим

$$i_{эф} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1. \qquad (1.40)$$

1.12 Задачи для самостоятельной работы

1. Первоначальная сумма долга 500 долл. Определить наращенную сумму через 2,5 года, используя два метода начисления сложных процентов. Процентная ставка равна 10 % годовых.

2. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн руб., через 5 лет при росте по сложной процентной ставке 15,5 % годовых? Проценты начисляются ежеквартально.

3. Долговое обязательство на сумму 5 млн руб., срок оплаты которого наступает через 5 лет. Определить сумму, полученную при поквартальном учете по номинальной учетной ставке 15 %, и эффективную учетную ставку.

4. За какой срок в годах сумма, равная 75 млн руб., достигнет 200 млн руб. при начислении процентов по сложной ставке 15 % раз в году и поквартально?

5. Сберегательный сертификат куплен за 100 тыс. руб., выкупная его сумма 160 тыс. руб., срок 2,5 года. Каков уровень доходности инвестиций в виде годовой ставки сложных процентов?

6. Срок до погашения векселя равен 2 годам. Дисконт при его учете составил 30 %. Какой сложной годовой учетной ставке соответствует дисконт?

7. Определить современную стоимость платежа, если наращенная стоимость равна 5000 тыс. руб. при условии дисконтирования по силе роста 12 %. Срок платежа – 5 лет.

Тема 2. Потоки платежей

В ряде финансовых соглашений платежи распределяются на определенный период, а не проводятся единоразово. Такие потоки характерны для долгосрочных кредитов, где регулярные платежи включают как сумму погашения основного долга, так и начисленные проценты. Также сюда относятся систематические отчисления в фонды различных видов, таких как пенсионные, страховые и накопительные фонды. Примерами подобных потоков могут служить дивидендные выплаты держателям акций и пенсионные выплаты из резервных фондов. Эти регулярные платежи, представляющие собой последовательность выплат и поступлений, обозначаются как денежный поток, где расходные платежи имеют отрицательные значения, а доходные поступления – положительные.

Основными характеристиками потоков платежей являются **накопленная сумма** и **приведенная стоимость**, представляющие собой числовые параметры для оценки. **Накопленная сумма** – это общая сумма всех платежей, к которой добавлены начисленные проценты на конец определенного периода. **Приведенная стоимость** представляет собой дисконтированную сумму всех будущих платежей к определенной дате, обычно к началу потока или предшествующему ему моменту.

Эти характеристики зависят от типа денежного потока и условий его формирования. Например, накопленная сумма может отражать итоговую сумму накопленного капитала в инвестиционном фонде или размер обязательств по долгам. Приведенная стоимость служит показателем текущей дисконтированной прибыли или издержек. Эти параметры предоставляют инструменты для точной оценки денежного потока и его роли в общей финансовой ситуации.

2.1 Финансовые ренты и их классификация

Поток платежей, все члены которого являются положительными величинами, а временные интервалы по выплатам постоянны, называют **финансовой рентой** или **аннуитетом**.

Финансовая рента характеризуется следующими параметрами: **член ренты** – величина каждого отдельного платежа; **период ренты** – временной интервал между двумя соседними платежами; **срок ренты** – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода; **процентная ставка** – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту; число платежей в году; число начислений процентов в году; моменты платежей внутри периода ренты.

Виды финансовых рент.

Классификация рент может быть произведена по различным признакам. Рассмотрим их.

По продолжительности периода ренты делят на **годовые** и **p-срочные**, где p – число выплат в году.

По числу начислений процентов различают ренты с начислением один раз в году, m раз или с непрерывным начислением. Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей.

По величине членов различают **постоянные** (с равными членами) и **переменные** ренты. Если размеры платежей изменяются в соответствии с каким-либо математическим законом, то часто появляется возможность вывести стандартные формулы, значительно упрощающие расчеты.

По вероятности выплаты членов различают ренты **верные** и **условные**. Верные ренты подлежат безусловной выплате, например, при погашении кредита. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее не известно. Например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера.

По числу членов различают ренты **с конечным числом членов,** или **ограниченные,** и **бесконечные**, или **вечные**. В качестве вечной ренты можно рассматривать выплаты по облигационным займам с неограниченными или нефиксированными сроками.

В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту ренты подразделяются на **немедленные** и **отложенные**, или **отсроченные**. Срок действия немедленных рент начинается сразу, а отложенных – запаздывает.

Ренты различают по моменту выплаты платежей. Если платежи осуществляются в конце каждого периода, то такие ренты называются **обычными**, или **постнумерандо**. Если же выплаты производятся в начале каждого периода, то ренты называются **пренумерандо**. Иногда предусматриваются платежи в середине каждого периода.

Анализ потоков платежей в большинстве случаев предполагает расчет наращенной суммы (или современной величины ренты).

2.2 Формулы наращенной суммы

Обычная годовая рента. Пусть в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R руб., проценты начисляются один раз в год по ставке i. В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R(1+i)^{n-1}$, т. к. на сумму R проценты начислялись в течение $n-1$ года. Второй взнос увеличивается до $R(1+i)^{n-2}$, и т. д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии:

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + ... + R(1+i)^{n-1},$$

в которой первый член равен R, знаменатель – $(1+i)$, число членов n. Искомая сумма равна

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n;i},$$

где

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Параметр $s_{n;i}$ и называется **коэффициентом наращения ренты**. Он зависит только от срока ренты n и уровня процентной ставки i. Поэтому его значения могут быть представлены в таблице с двумя графами.

Пример 2.1. В течение трех лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн руб., на которые начисляются проценты по сложной годовой ставке 10 %. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение:

$$S = 10\frac{(1+0{,}1)^3 - 1}{0{,}1} = 33{,}1.$$

Годовая рента с начислением процентов m раз в году. Посмотрим, как усложнится формула, если предположить, что платежи производят один раз в конце года, а проценты начисляют m раз в году. Это означает, что каждый раз применяется ставка j/m, где j – номинальная ставка процентов. Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид

$$R(1+j/m)^{m(n-1)}, \quad R(1+j/m)^{m(n-2)}, \quad \ldots, \quad R.$$

Если прочитать предыдущую строку справа налево, то нетрудно увидеть, что перед нами опять геометрическая прогрессия, в которой первым членом является R, знаменателем – $(1+j/m)^m$, а число членов составляет n. Сумма членов этой прогрессии и будет наращенной суммой ренты. Она равна

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m}-1}.$$

Рента *p*-срочная, $m=1$. Найдем наращенную сумму при условии, что рента выплачивается p раз в году равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года. Если R – годовая сумма платежей, то размер отдельного платежа равен R/p. Тогда последовательность платежей с начисленными до конца срока процентами также представляет собой геометрическую прогрессию, записанную в обратном порядке,

$$\frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}},\ \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}},\ \frac{R}{p}(1+i)^{n-\frac{3}{p}},\ \ldots,\ \frac{R}{p},$$

у которой первый член равен R/p, знаменатель – $(1+i)^{1/p}$, а общее число членов равно np. Тогда наращенная сумма рассматриваемой ренты равна сумме членов этой геометрической прогрессии:

$$S = \frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i)^{(1/p)np}-1}{(1+i)^{1/p}-1} = R\frac{(1+i)^{n}-1}{p[(1+i)^{1/p}-1]} = Rs_{n;i}^{(p)},$$

где $s_{n;i}^{(p)} = \dfrac{(1+i)^{n}-1}{p[(1+i)^{1/p}-1]}$ – коэффициент наращения *p*-срочной ренты при $m=1$.

Рента *p*-срочная, $p = m$. В контрактах часто начисление процентов и поступление платежа совпадают во времени. Таким образом, число платежей p в году и число начислений процентов m совпадают, т. е. $p = m$. Тогда для получения формулы расчета наращенной суммы S можно воспользоваться формулой годовой ренты с одноразовым начислением процентов в конце года

$$S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

с той разницей, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период, а не за год.

Таким образом, получаем

$$S = \frac{R}{m}\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j/m} = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j}.$$

Рента *p*-срочная, $p \ge 1, m \ge 1$. Это самый общий случай *p*-срочной ренты с начислением процентов m раз, причем возможна ситуация, когда $p \ne m$.

Первый член ренты равен $R/p,$ уплаченный спустя $1/p$ года после начала срока, составит к концу срока вместе с начисленными на него процентами

$$\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m(n-1/p)}=\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn-m/p}.$$

Второй член ренты к концу срока возрастет до

$$\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m(n-2/p)}=\frac{R}{p}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn-2(m/p)} \text{ и т. д.}$$

Последний член этой записанной в обратном порядке геометрической прогрессии равен $R/p,$ ее знаменатель – $(1+j/m)^{m/p},$ число членов составит nm.

В результате получаем наращенную сумму:

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+j/m)^{(m/p)np}-1}{(1+j/m)^{m/p}-1}=R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}.$$

Отметим, что из данного выражения легко получить все рассмотренные выше частные случаи, задавая соответствующие значения p и m.

2.3 Формулы современной величины

Обычная годовая рента. Пусть член годовой ренты равен $R,$ процентная ставка – $i,$ проценты начисляются один раз в конце года, срок ренты – n. Тогда дисконтированная величина первого платежа равна

$$R\frac{1}{1+i}=Rv,$$

где $v=\dfrac{1}{1+i}$ – дисконтный множитель.

Приведенная к началу ренты величина второго платежа равна Rv^2 и т. д. В итоге приведенные величины образуют геометрическую прогрессию: $Rv,\quad Rv^2,\quad Rv^3,\quad \ldots,\quad Rv^n$, сумма всех членов которой равна

$$A=Rv\frac{v^n-1}{v-1}=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=Ra_{n;i},$$

где $a_{n;i}=\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – **коэффициент приведения ренты**.

Как видим, коэффициент приведения ренты зависит только от двух параметров: срока ренты n и процентной ставки i. Поэтому его значения могут быть представлены в табличном виде. Такие таблицы можно найти в книгах или построить самим при помощи компьютера.

Рента *p*-срочная, $p \geq 1$, $m \geq 1$. Рассуждая аналогичным образом, получим формулу для расчета современной величины ренты в самом общем случае для произвольных значений p и m:

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]},$$

от которой нетрудно перейти к частным случаям при различных p и m.

2.4 Зависимость между современной величиной и наращенной суммой ренты

Пусть A – современная величина годовой ренты постнумерандо, а S – ее наращенная стоимость к концу срока n; $p=1$, $m=1$.

Покажем, что наращение процентов на сумму A за n лет дает сумму, равную S:

$$A\,(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n-1}{i} = S.$$

Отсюда следует, что дисконтирование S дает A: $Sv^n = A$, а коэффициент дисконтирования и наращения ренты связаны соотношениями:

$$a_{n;i}(1+i)^n = s_{n;i};$$

$$s_{n;i}v^n = a_{n;i}.$$

2.5 Примеры решения задач

Задача 2.1. Акционерное общество решило создать резервный фонд. Размер фонда 600 млн руб., создать его необходимо за 6 лет. Взносы в фонд вносятся ежегодно равными платежами в конце каждого года. Определите размер ежегодного платежа, если годовая процентная ставка банка $i_c = 16\,\%$ и проценты начисляются один раз в год.

Дано: $S = 600$ млн руб., $n = 6$, $i_c = 0{,}16$. Найти: R.

Решение:

$$S = \frac{R(1+i_c)^n - R}{i_c},\ R = \frac{S \cdot i_c}{(1+i_c)^n - 1},\ R = \frac{600 \cdot 0{,}16}{(1+0{,}16)^6 - 1} = 66{,}834 \text{ млн руб.}$$

Задача 2.2. Сохраняются условия задачи 2.1, но взносы в фонд вносятся ежемесячно равными платежами под годовую процентную ставку банка $i_c = 16\,\%$. Требуется определить размер ежемесячного платежа и текущую стоимость ренты.

Дано: $p = 12$, $S = 600$ млн руб., $n = 6$, $i_c = 0{,}16$. Найти: R/p, P.

Решение:

Пусть годовой взнос R. Тогда ежемесячный платеж равен R/p. Для последнего года последний месячный платеж равен R/p. Платеж за предыдущий месяц нарастает и будет равен $\frac{R}{p}(1+i_c)^{1/p}$ и т. д.

Платеж за первый месяц последнего года составит $\frac{R}{p}(1+i_c)^{(p-1)/p}$. Тогда суммарный платеж по формуле геометрической прогрессии с первым членом R/p, последним – $\frac{R}{p}(1+i_c)^{(p-1)/p}$ и знаменателем $(1+i_c)^{1/p}$ будет равен $S_n = \frac{R}{p}\frac{i_c}{(1+i_c)^{1/p}-1}$.

2.6 Автоматизация финансовых расчетов

В ППП MS Excel для автоматизации проведения финансовых расчетов реализована специальная группа из 52 функций, называемых финансовыми. Для исчисления характеристик финансовых операций с потоками платежей целесообразно использовать функции, приведенные в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Встроенные финансовые функции для анализа потока платежей

Наименование функции	Синтаксис функции	Назначение функции
1	2	3
БС	БС(ставка;кпер;плт;[пс];[тип])	Возвращает будущую стоимость инвестиции на основе постоянной процентной ставки
КПЕР	КПЕР(ставка; платеж; из; бс; [тип])	Возвращает количество периодов начисления процентов
ИНОРМА	ИНОРМА(дата_согл;дата_вступл_в_силу;инвестиция; погашение;[базис])	Возвращает процентную ставку за один период при выплате ренты
ПС	ПС(ставка; кпер; плт; [бс]; [тип])	Возвращает текущую стоимость потока платежей
ПЛТ	ПЛТ(ставка; кпер; пс; [бс]; [тип])	Возвращает регулярный платеж годичной ренты

Продолжение таблицы 2.1

1	2	3
ЧПС	ЧПС(ставка; значение1; [значение2],...)	Возвращает чистую приведенную стоимость инвестиции, основанной на серии периодических денежных потоков и ставке дисконтирования
ВСД	ВСД(значения; [предположения])	Возвращает внутреннюю норму доходности на основе потока платежей с одинаковыми интервалами между членами потока. Инвестиции показываются с отрицательными знаками, доходы – с положительными. Члены потока относятся к концам периодов
БЗРАСПИС	БЗРАСПИС(первичное; план)	Возвращает будущую стоимость первоначальной основной суммы после применения ряда (плана) ставок сложных процентов
ЭФФЕКТ	ЭФФЕКТ(номинальная _ставка;кол_пер)	Возвращает фактическую годовую процентную ставку, если известна номинальная ставка и число периодов, составляющих год
НОМИНАЛ	НОМИНАЛ(эффект_ ставка;кол_пер)	Возвращает номинальную годовую ставку, если заданы эффективная (фактическая) ставка и число периодов в году, за которые начисляются сложные проценты

Описание смысла аргументов финансовых функций:

– Дата_согл – обязательный аргумент. Дата расчета за ценные бумаги (дата продажи ценных бумаг покупателю, более поздняя, чем дата выпуска).

– Дата_вступл_в_силу – обязательный аргумент. Срок погашения ценных бумаг. Эта дата определяет момент, когда истекает срок действия ценных бумаг.

– Инвестиция – обязательный аргумент. Объем инвестиции в ценные бумаги.

– Погашение – обязательный аргумент. Сумма, которая должна быть получена на момент погашения ценных бумаг.

– Базис – необязательный аргумент. Используемый способ вычисления дня.

– Ставка – обязательный аргумент.

– Кпер – обязательный аргумент. Общее число периодов платежей для ежегодного платежа.

– Плт – обязательный. Выплата, производимая в каждый период и не меняющаяся на протяжении всего периода ежегодного платежа.

– Fv – необязательный. Будущая стоимость или баланс, который вы хотите достичь после последнего платежа.

– Тип – необязательный. Число 0 или 1 обозначает, когда должна производиться выплата.

– Номинальная_ставка – обязательный аргумент. Номинальная процентная ставка.

– Эффект_ставка – обязательный аргумент. Фактическая процентная ставка.

– Кол_перуб – обязательный аргумент. Количество периодов в году, за которые начисляются сложные проценты.

Пример 2.1. Создать в среде табличного процессора MS Excel книгу «Анализ потоков платежей». Создать на листе 1 шаблон для анализа элементарных потоков платежей и аннуитетов в соответствии с рекомендациями (рисунок 2.1). Используя созданный шаблон, решить задачи согласно индивидуальному заданию. С целью контроля вычислений и закрепления теоретических знаний решить задачи по соответствующим формулам. На листе 2 создать шаблон для анализа нерегулярных потоков платежей (формат произвольный) и решить предложенные задачи.

Исходные данные и результаты расчетов представлены на рисунке 2.1.

	A	B	C	D	E	I	J
2	2		ализ элементарных потоков платежей и аннуитет				
3	3						
4	4		Исходные данные				
5	5						
6	6		Годовая процентная ставка, r			20,00%	10,00%
7	7		Количество начислений в году, m			2	
8	8		Срок проведения операции, лет, n			5	10
9	9		Современная стоимость, PV			10000	
10	10		Будущая стоимость, FV			25937,42	
11	11		Периодический платеж			0	
12	12		Тип начислений			0	
13	13						
14	14		Результаты вычислений				
15	15						
16	16		Будущая стоимость			25 937,42р.	25 937,42р.
17	17		Современная стоимость			10 000,00р.	10 000,00р.
18	18		Периодическая процентная ставка			10,50%	10,50%
19	19		Годовая процентная ставка			21,00%	21,00%
20	20		Общее число периодов проведения операции			10	10
21	21		Срок проведения операции, лет			5	5
22	22		Периодический платеж			-3 384,41р.	
23	23		Эффективная процентная ставка			0,21	0,21

Рисунок 2.1 – Исходные данные и расчеты

Формулы для расчетов представлены на рисунке 2.2.

	A	B	C	D	E	I	J
2	2		Анализ элементарных потоков платежей и аннуитетов				
3	3						
4	4		Исходные данные				
5	5						
6	6		Годовая процентная ставка, r			0,2	=I6/I7
7	7		Количество начислений в году, m			2	
8	8		Срок проведения операции, лет, n			5	=I8*I7
9	9		Современная стоимость, PV			10000	
10	10		Будущая стоимость, FV			25937,42	
11	11		Периодический платеж			0	
12	12		Тип начислений			0	
13	13						
14	14		Результаты вычислений				
15	15						
16	16		Будущая стоимость			=-БС(J6;J8;I11;I9;I12)	=I9*(1+J6)^J8
17	17		Современная стоимость			=-ПС(J6;J8;I11;I10)	=I10/(1+J6)^J8
18	18		Периодическая процентная ставка			=I19/I7	=((I10/I9)^(1/I8)-1)/I7
19	19		Годовая процентная ставка			=СТАВКА(I8;I11;-I9;I10;I12)	=(I10/I9)^(1/I8)-1
20	20		Общее число периодов проведения операции			=I21*I7	=J21*I7
21	21		Срок проведения операции, лет			=КПЕР(I6;I11;-I9;I10;I12)	=LN(I10/I9)/LN(1+I6)
22	22		Периодический платеж			=ПЛТ(I6;I7*I8;I9;I10;I12)	
23	23		Эффективная процентная ставка			=ЭФФЕКТ(I6;I7)	=(1+I6/I7)^I7-1
24							

Рисунок 2.2 – Формулы для расчетов

Пример 2.2. В банк, начисляющий 20 % годовых, клиент положил 85 тыс. руб. Какова будет сумма на счете этого клиента:

– через год;
– через 9 месяцев;
– через 2,5 года;
– через 4 года,

если проценты начисляются:

– один раз в год;
– один раз в полгода;
– ежемесячно?

Расчеты представлены на рисунках 2.3 и 2.4.

	A	B	C	D	E
1	Задание №1				
2					
3	Клиент положил 85 тыс. р. в банк под 20% годовых				
4	Какова будет сумма при условиях, показанных в следующей таблице				
5					
6		Через год	Через 9 мес	Через 2,5 года	Через 4 года
7	1 раз в год	102 000,00	97 455,16	134 082,48	176 256,00
8	1 раз в полгода	102 850,00	98 063,63	136 893,35	182 205,05
9	ежемесячно	103 648,24	98 633,90	139 564,98	187 927,78

Рисунок 2.3 – Результаты расчета

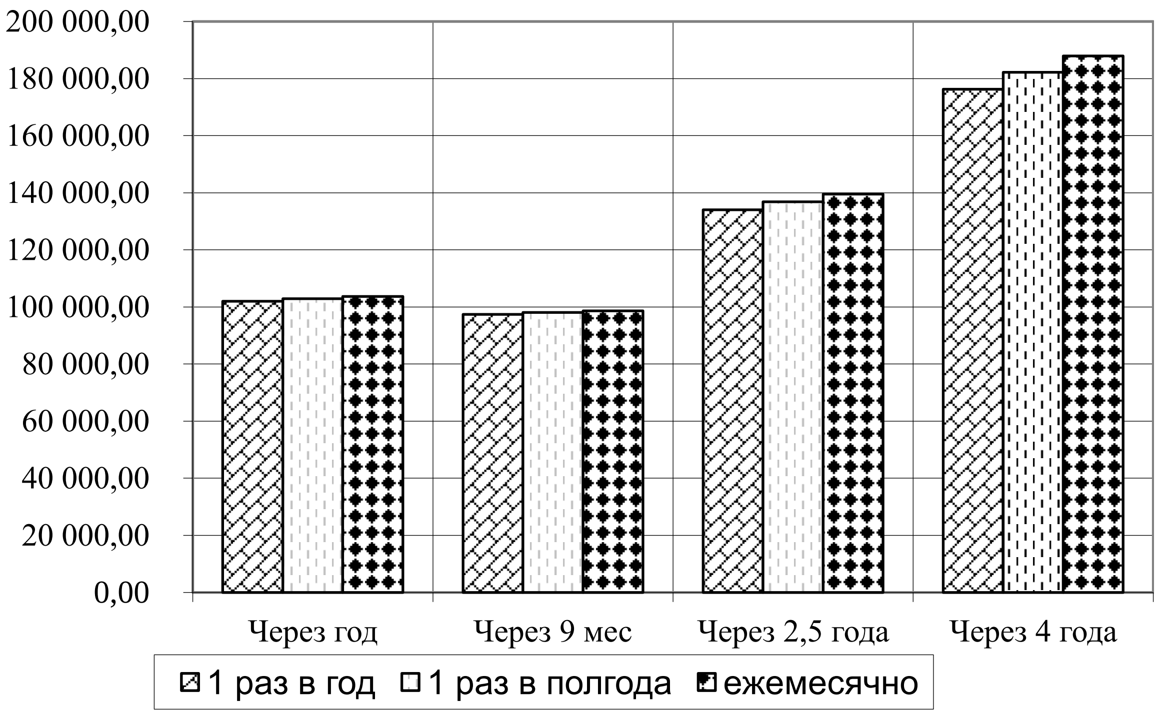


Рисунок 2.4 – График для сравнения платежей

Пример 2.3. Сравнить по финансовой эффективности два варианта инвестиций. Потоки платежей характеризуются следующими данными (в тыс. руб.), которые относятся к окончаниям соответствующих лет (таблица 2.2):

Таблица 2.2 – Исходные данные для задачи, тыс. руб.

Проект А	– 250	– 150	–	150	200	200	300
Проект В	– 300	–	50	100	100	200	200

В качестве критерия эффективности следует использовать внутреннюю норму доходности.

Результаты расчетов представлены на рисунке 2.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Задание №3											
2												
3	Потоки платежей (на конец каждого периода)											
4												
5	Период	1	2	3	4	5	6	7				
6	Проект А	-250	-150	0	150	200	200	300				
7	Проект Б	-300	0	50	100	100	200	200				
8												
9	Определим стоимость потока платежей при годовой ставке 10%, а также											
10	внутреннюю норму доходности											
11												
12	Период	1	2	3	4	5	6	7		Внутр норма доходности		
13	Проект А	-250	-150	0	150	200	200	300	450		2,13	
14	Поток	-250	-165	0	200	293	322	531	931,0403		3,24	
15												
16	Период	1	2	3	4	5	6	7				
17	Проект Б	-300	0	50	100	100	200	200	350		2,17	
18	Поток	-300	0	61	133	146	322	354	716,4242		3,39	
19												
20	Расчеты показали, что рациональнее вкладывать средства в проект Б, т.к. ее ВНД выше											

Рисунок 2.5 – Результаты расчета

2.7 Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить размер платежа n-годичной ссуды для покупки квартиры за A руб. с годовой ставкой i процентов и начальным взносом p процентов. Сделать расчет для ежемесячных и ежегодных выплат. Расчет провести для следующих данных: n = 20 лет; A = 400 000 руб.; i = 18 %; p = 30 %. Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

2. Семья хочет через n лет купить дачу за S долл. Какую сумму (одинаковую) ей нужно каждый год из этих n лет добавлять на свой счет в

банке, чтобы накопить S долл., если годовая ставка процента в банке равна i ? Расчет провести для следующих данных: $n = 6$ лет; $S = 12\,000$ долл.; $i = 8$ %. Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

3. Издательство осуществляет перечисление сумм R руб. на банковский счет писателя с частотой p раз в год. Банк начисляет сложные проценты по ставке i, при этом такие начисления происходят m раз в год. Необходимо рассчитать, какая сумма будет находиться на счете через n лет. Для данной задачи будут использованы следующие параметры: $p = 2$, $R = 2000$ руб., $m = 2$, $i = 7$.

4. Государство ежегодно выделяет фермеру сумму R долл. для проведения мелиоративных работ. Эти средства поступают на специальный банковский счет, на который начисляются сложные проценты с частотой m раз в год. Необходимо определить, какая сумма будет на счете через n лет. Расчеты следует выполнить с использованием следующих параметров: $R = 500$ долл. $m = 2$, $i = 4$ %, $n = 5$ лет.

5. В ходе судебного разбирательства было выявлено, что гражданин N ежемесячно недоплачивал налоги в размере $R = 100$ руб. Налоговая служба намерена взыскать недоплаченные суммы за последние два года ($n = 2$) с учетом начисленных процентов по ставке 3 % в месяц. Требуется определить, какую общую сумму должен будет выплатить гражданин N, и выполнить расчеты для случаев с использованием как простой, так и сложной процентных ставок.

6. Определить процентную ставку для n-летнего займа в A руб. с ежегодной выплатой в R руб. Решить задачу для следующих исходных данных: $n = 10$ лет, $A = 100\,000$ руб., $R = 16\,981$ руб. Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

7. Требуется определить процентную ставку для займа на срок n лет при общей сумме займа A руб. и ежегодных выплатах R руб. Задачу следует решить, используя следующие параметры: срок займа $n = 10$ лет, сумма займа $A = 100\,000$ руб., ежегодный платеж $R = 16\,981$ руб. Расчеты необходимо провести для простой и сложной процентных ставок.

8. Замените годовую ренту с годовым платежом $R = 600$ долл. и длительностью $n_1 = 10$ лет семилетней годовой рентой ($n_2 = 7$). Ставка процента $i = 8$ % в год. Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

9. Сын имел в банке вклад в размере $A = 50\,000$ руб., на который ежемесячно начислялись проценты по ставке $i = 0{,}8$ %. Уезжая в десятилетнюю командировку за границу, он поручил отцу тратить эти средства в течение

n = 10 лет. Необходимо рассчитать, какую сумму отец сможет получать ежемесячно. Для этого требуется провести расчеты как для простой, так и для сложной процентных ставок.

10. Покупатель предложил два варианта расчетов при покупке дачи:

1) R_1 = 5000 долл. немедленно и затем по R_2 =1000 долл. в течение n = 5 лет;

2) R_3 = 8000 долл. немедленно и затем по R_4 =300 долл. в течение n = 5 лет;

Какой вариант выгоднее при годовой ставке процента:

а) i_1 = 10 %, б) i_2 = 5 %.

Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

11. Рассмотрим годовую ренту при $n = 10$ лет, i = 10 %. Что более увеличит наращенную величину ренты: увеличение длительности на 1 год (Δn = 1 год) или увеличение процентной ставки на 1 % (Δi = 1 %)? Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

12. Каким должен быть платеж конечной годовой ренты длительностью $n = 8$ лет, чтобы ее современная величина была $A = 16\,000$ руб. При ставке i = 10 %? Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

13. Дана вечная рента с годовым платежом R при ставке процента i. Известно, что ее современная величина, т. е. в момент $t = 0$, равна R/i. Найдите ее величину в произвольный момент $t > 0$. При каком t эта величина максимальна, минимальна?

14. Провести детальный анализ ренты длительностью 4 года, годовым платежом R = 1000 ден. ед. и переменной процентной ставкой: i_2 = 5 % во 2-й год, i_3 = 8 % – в 3-й, i_4 = 10 % – в 4-й год. Определить современную величину этой ренты.

Расчет провести для простой и сложной процентных ставок для следующих данных: A =10 000 руб.; i = 10 %; n = 5 лет.

15. Для ренты с параметрами: годовая ставка процента i = 12 %, годовой платеж R = 400 ден. ед., длительность ренты n = 6 лет получить следующие ее характеристики: коэффициенты приведения и наращения; современную и наращенную величины. Расчеты провести для простой и сложной процентных ставок.

16. Создается фонд посредством ежегодных взносов по 10 тыс. долл. в течение 6 лет. На собранные средства банк начисляет проценты по ставке 15 % годовых. Определить размер фонда к концу шестого года.

Тема 3. Расчеты, связанные с облигациями

3.1 Облигация и ее характеристики

Облигации (bonds) представляют собой долговые инструменты, выпускаемые государственными или коммерческими организациями с целью привлечения финансовых средств от инвесторов. Они представляют собой соглашение, согласно которому эмитент обязуется вернуть определенную сумму денег через установленный срок, выплачивая периодически проценты. Характеристики облигации напрямую зависят от ее параметров.

Одним из ключевых параметров облигации является ее *номинальная стоимость* (N), которая представляет собой сумму займа, получаемую эмитентом при выпуске. *Номинал* – это фиксированная сумма, которую держатель облигации получит в момент погашения, т. е. при завершении срока действия облигации.

Срок действия облигации (T) указывает, через какой период инвестор сможет вернуть свои средства. В зависимости от продолжительности срока облигации делятся на краткосрочные (срок до трех лет), среднесрочные (от трех до семи лет) и долгосрочные (свыше семи лет, но до тридцати лет). Также существуют бессрочные облигации, по которым нет установленной даты погашения.

Процентная ставка купона (q) определяет *купонный платеж* ($C = qN$), который представляет собой часть номинала, выплачиваемую держателю облигации в виде дохода. Купонные выплаты могут осуществляться с различной периодичностью: квартально, раз в полгода или раз в год. Иногда купонные выплаты могут отсутствовать – такие облигации называются *бескупонными*.

Купонный доход, который может быть фиксированным или выплачиваемым лишь один раз (например, при покупке или погашении), зависит от условий займа, что делает облигации гибким инструментом в управлении капиталом и привлечении средств.

Текущая стоимость облигации (P) представляет собой сумму ее номинальной стоимости и оставшихся купонных выплат, которые приводятся к настоящему моменту с учетом дисконтирования. Денежный поток, сформированный купонными выплатами, можно рассматривать как ренту постнумерандо, для которой вычисляется текущая стоимость. В конце срока действия облигации к этой текущей стоимости прибавляется дисконтированная величина номинальной стоимости облигации.

Предположим, что облигация имеет номинал N и купонные выплаты ($C = qN$) и была приобретена за $n = T - t$ лет до погашения. В формуле (3.1) r – это процентная ставка. Тогда текущая стоимость облигации P в момент времени t определяется по следующей формуле:

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{qN}{(1+r)^k} + \frac{N}{(1+r)^n} = \frac{qN}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) + \frac{N}{(1+r)^n} \qquad (3.1)$$

или

$$P = \frac{qN}{r} + \frac{N(r-q)}{r(1+r)^n}. \qquad (3.2)$$

Из формулы (3.1) следует, что в момент погашения ($t = T$, $n = 0$) текущая стоимость облигации совпадает с ее номиналом: $P = N$.

Если купонные выплаты происходят m раз в году, то текущая стоимость облигации в момент времени t определяется равенством, вытекающим из формулы (3.2):

$$P = \frac{qN}{r}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}}\right) + \frac{\mathrm{N}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}} \qquad (3.3)$$

или

$$P = \frac{qN}{r} + \frac{N(r-q)}{r\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}}. \qquad (3.4)$$

Если облигация является *бессрочной*, то доход ее владельца есть бессрочная рента, поэтому текущая стоимость бессрочной облигации определяется формулой, аналогичной (3.1):

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{qN}{(1+r)^k} = \frac{qN}{r}. \qquad (3.5)$$

Рыночная цена облигации (V) – это стоимость, по которой владелец может продать облигацию в любой момент времени в диапазоне от 0 до T. Эта цена зависит от рыночных условий и обычно отличается от текущей стоимости облигации, вычисляемой по специальным формулам.

Курс облигации K определяется как отношение ее рыночной стоимости к номинальной: $K = V / N$.

Доходностью к моменту погашения ρ будем называть такую процентную ставку, при которой сумма дисконтируемых купонных платежей и номинальной стоимости на интервале $(t, T]$ длиной $n = T - t$ равна текущей рыночной цене облигации в момент времени t. Таким образом, ρ является решением уравнения

$$V = qN\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\rho)^k}+\frac{N}{(1+\rho)^n}, \tag{3.6}$$

или

$$V = \frac{qN}{\rho}\left(1-\frac{1}{(1+\rho)^n}\right)+\frac{N}{(1+\rho)^n}, \tag{3.7}$$

или

$$V = \frac{qN}{\rho}+\frac{N(\rho-q)}{\rho(1+\rho)^n}, \tag{3.8}$$

где V – рыночная цена облигации в момент времени t; N – номинальная стоимость; $n = T - t$ – количество лет до погашения облигации.

Если доходность облигации к моменту погашению выше текущей ставки процента ($\rho > r$), то говорят, что облигация *прибыльна*.

Наиболее просто вычисляется доходность к погашению бессрочной облигации ρ_∞ с номиналом N, купонной ставкой q и рыночной ценой V:

$$\rho_\infty = \frac{qN}{V}=\frac{q}{K}, \tag{3.9}$$

где $K = V / N$ – курс бессрочной облигации.

Амортизация – это важная характеристика облигации, указывающая на то, что выплата номинальной стоимости происходит не единовременно в дату погашения, а частями на протяжении всего срока действия облигации. Эти частичные выплаты происходят одновременно с выплатами по купонам. В день окончательного погашения облигации инвестор получает последний купон и оставшуюся часть номинала.

Каждая выплата по амортизации уменьшает оставшуюся номинальную стоимость облигации. Это означает, что сумма будущих купонных выплат будет рассчитываться исходя из оставшегося непогашенного номинала, а не из полной первоначальной суммы. Следовательно, каждый последующий купон будет уменьшаться в рублевом эквиваленте, поскольку проценты начисляются на уменьшающуюся часть номинала.

Для иллюстрации представим, что компания выпустила облигацию номинальной стоимостью 1000 долл. на 5 лет с ежегодной выплатой купонного дохода в размере 10 % годовых и амортизацией, при которой каждый год выплачивается 200 долл. В этом случае платежи по данной облигации будут уменьшаться с каждым годом, так как часть номинала будет погашаться ежегодно.

Таблица 3.1 – Расчет амортизации облигации

Год	Купон	Номинал
1	$1000 · 10 % = $100	1000 − 200 = $800
2	$800 · 10 % = $80	800 − 200 = $600
3	$600 · 10 % = $60	600 − 200 = $400
4	$400 · 10 % = $40	400 − 200 = $200
5	$200 · 10 % = $20	Вместе с купоном инвестор получит последнюю часть номинала в размере $200

3.2 Свойства рыночной цены и доходности к погашению

Свойства доходности к погашению:

а) Облигация продается по номиналу ($V = N$) тогда и только тогда, когда ее доходность к погашению равна купонной ставке ($\rho = q$).

б) Облигация продается с дисконтом $I = N – V$ ($V < N$) тогда и только тогда, когда ее доходность к погашению больше купонной ставки ($\rho > q$).

в) Облигация продается с премией $J = V – N$ ($V > N$) тогда и только тогда, когда ее доходность к погашению меньше купонной ставки ($\rho < q$).

Это означает, что если рыночная цена облигации V растет, то ее доходность к погашению ρ уменьшается. Если рыночная цена облигации V падает, то ее доходность к погашению ρ увеличивается.

При постоянной доходности к погашению ρ величина дисконта $I = N – V$ или премии $J = V – N$ облигации уменьшается при уменьшении времени до погашения n.

Если две облигации имеют одну и ту же купонную ставку q, номинальную стоимость N и доходность к погашению ρ, то облигация с меньшим сроком обращения n будет продаваться с меньшим дисконтом или премией.

Формула для приближенного вычисления доходности к погашению облигации ρ, являющейся решением уравнений (3.6)–(3.8), при больших n имеет вид

$$\rho \approx \frac{q}{K} \cdot \frac{n^2 - K^2}{n^2 - K}, \qquad (3.10)$$

где q – купонная ставка процента; $K = V / N$ – курс облигации; n – количество лет до погашения облигации.

Однако при не очень больших $n < 10$ эта формула дает значительную погрешность. Поэтому в таких случаях используется другая, более точная приближенная формула, которая имеет вид

$$\rho \approx \frac{2(qn + 1 - K)}{K - 1 + n(K + 1)} . \quad (3.11)$$

3.3 Понятие дюрации

Согласно следствиям из теоремы (3.2) текущая стоимость облигации P отклоняется от ее номинальной стоимости N в зависимости от динамики рыночной процентной ставки r. Если купонная ставка q совпадает с текущей рыночной ставкой r, то облигация торгуется по ее номинальной стоимости, т. е. $P = N$. В случае, когда купонная ставка q превышает рыночную процентную ставку r, цена облигации будет выше номинала ($P > N$), что представляет собой премию к ее номинальной стоимости. Если же $q < r$, тогда рыночная цена облигации оказывается ниже номинала $P < N$, указывая на наличие дисконта. Таким образом, при повышении процентной ставки r наблюдается снижение текущей рыночной цены облигации P. Это явление свидетельствует о том, что даже инвестиции в высоконадежные, например, государственные облигации подвержены процентному риску, связанному с изменением ставок. Для более детальной оценки чувствительности текущей стоимости облигации P к изменениям ставки r можно воспользоваться модифицированным выражением формулы (3.1).

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1 + r)^t} , \quad (3.12)$$

где $C_t = C$ при $t < T$ и $C_t = C + N$ при $t = T$. Далее вычислим частную производную $\partial P / \partial r$:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\sum_{t=1}^{T} t \frac{C_t}{(1 + r)^{t+1}} .$$

Рассчитаем эластичность цены облигации P относительно изменения процентной ставки r, которая характеризует степень чувствительности процентного изменения цены облигации к процентному изменению ставки. Этот показатель позволяет определить, насколько пропорционально изменение стоимости облигации связано с изменениями рыночной процентной ставки.

$$\frac{\partial P / P}{\partial r / (1 + r)} = -\sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{P(1 + r)^t}. \quad (3.13)$$

Обозначим через $\omega_t = \frac{C_t}{P(1 + r)^t}$ долю в текущей стоимости облигации, которую вносит выплата в момент времени t. Разделив обе части (3.12) на P, получим, что

$$\sum_{t=1}^{T} \omega_t = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{P(1+r)^t} = 1.$$

Перепишем выражение (3.13) в виде

$$\frac{\partial P / P}{\partial r / (1+r)} = -\sum_{t=1}^{-T} t\omega_t .$$

Эластичность цены облигации по ставке процента равна средневзвешенному времени погашения с весами ω_t.

Дюрацию D определим следующим образом:

$$D = \sum_{t=1}^{T} t\omega_t = \sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{P(1+r)^t} = -\frac{\partial P / P}{\partial r / (1+r)} . \tag{3.14}$$

Данное понятие впервые ввел Фредерик Макалей в 1938 г.

Рассмотрим дюрацию бескупонной облигации со сроком погашения T. В этом случае $C_t = 0$ при $t < T$ и $C_t = N$, из (3.12) следует, что $P = \frac{N}{(1+r)^T}$, а из (3.14) получается, что $D = T$. Дюрация бескупонной облигации равна времени ее погашения. Для купонной облигации справедливо соотношение

$$D = \sum_{t=1}^{T} t\omega_t \le \sum_{t=1}^{T} T\omega_t = T\sum_{t=1}^{T} \omega_t = T.$$

Дюрация купонной облигации оказывается меньше времени ее погашения.

Если сумма денег предоставляется в заем на один год при однократном начислении процента, то для такой сделки $D = 1$.

Определим дюрацию портфеля D(П) как средневзвешенную сумму дюраций отдельных ценных бумаг, входящих в портфель, т. е.

$$D(П) = v_A D(A) + v_B D(B) + v_C D(C) + \ldots .$$

Заменим в формуле (3.14) частные производные на разностные отношения. Получим приближенную формулу

$$D \approx -\frac{\Delta P / P}{\Delta r / (1+r)}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -\frac{D}{1+r} \Delta r . \tag{3.15}$$

Эта формула позволяет в первом приближении определить процентное изменение рыночной стоимости облигации при небольших колебаниях процентной ставки Δr. Из выражения (3.15) следует, что если доходность двух облигаций с одинаковой дюрацией изменяется на одинаковую величину, то и рыночная стоимость этих облигаций изменится примерно на одинаковый процент. Это указывает на то, что облигации с идентичной дюрацией обладают схожей чувствительностью к изменениям процентных ставок и будут демонстрировать аналогичную реакцию на колебания доходности.

3.4 Основные свойства дюрации

Исследуем, как дюрация зависит от основных параметров, характеризующих облигационные инструменты. Дюрация $D = D(r)$ представляет собой функцию процентной ставки r, которая обладает свойством монотонного убывания при увеличении ставки. Это означает, что по мере роста процентной ставки величина дюрации уменьшается. Расчет дюрации облигации осуществляется по следующей формуле:

$$D = \frac{1+r}{r} - \frac{n(q-r)+1+r}{q((1+r)^n - 1)+r}, \tag{3.16}$$

где r – процентная ставка;

q – купонная ставка;

n – количество лет до погашения облигации.

Если $P = N$, то в (3.16) $q = r$.

В случае, когда облигация торгуется с премией, т. е. при условии, что $q > r$ (где q – купонная ставка, а r – текущая процентная ставка), дюрация $D(n)$ представляет собой возрастающую функцию по отношению к количеству лет до погашения n. Напротив, если облигация реализуется с дисконтом, т. е. при условии ($q < r$), функция дюрации $D(n)$ достигает своего максимального значения при $n = n_{\max}$, где

$$n_{\max} \approx \frac{1}{\ln(1+r)} + \frac{1+r}{r-q}. \tag{3.17}$$

В этом случае $D(n)$ возрастает при $n < n_{\max}$ и убывает при $n > n_{\max}$.

3.5 Выпуклость облигации

В формуле (3.15) предполагалось, что зависимость относительного изменения стоимости облигации $\Delta P / P(r)$ от изменения процентной ставки Δr является линейной, что упрощает расчет. Однако в действительности эта зависимость характеризуется нелинейностью, что требует более точного подхода для достоверной оценки. Чтобы скорректировать формулу (3.15) и учесть эффект нелинейных изменений, вводится понятие выпуклости облигации $W(r)$. Этот показатель позволяет учитывать влияние значительных колебаний процентной ставки на стоимость облигации, обеспечивая более точное прогнозирование ее цены.

Под выпуклостью облигации $W(r)$ понимается величина

$$W(r)=\frac{1}{P(r)}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(r), \tag{3.18}$$

где $P(r)$ – текущая стоимость облигации (3.1).

Используя формулы (3.19) и (3.12), можно показать, что

$$W(r)=\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)C_t}{P(r)\cdot(1+r)^{t+2}}. \tag{3.19}$$

Для уточнения формулы (3.15) применим разложение функции $P(r+\Delta r)$ в ряд Тейлора с центром в точке r. Учитывая только первые три члена этого разложения и используя определения дюрации и выпуклости облигации, мы можем получить более точное выражение для изменения цены облигации при небольших изменениях процентной ставки. Этот подход позволяет учесть как линейное влияние, связанное с дюрацией, так и квадратичное влияние, обусловленное выпуклостью, что существенно улучшает точность прогноза стоимости облигации.

$$\frac{\Delta P}{P(r)}\approx\frac{D(r)}{1+r}\Delta r+\frac{1}{2}\cdot W(r)\cdot(\Delta r)^2. \tag{3.20}$$

3.6 Защита портфеля облигаций от изменения процентной ставки

Дюрация представляет собой критически важный параметр для количественного анализа реакции стоимости облигаций или денежных потоков на колебания процентных ставок. Она играет ключевую роль в управлении процентным риском, который проявляется в изменении стоимости облигации вследствие изменения рыночных условий. В частности, повышение процентной ставки способствует увеличению доходности от реинвестирования купонных выплат, но одновременно приводит к снижению текущей рыночной стоимости самой облигации. Обратная ситуация возникает при снижении процентной ставки, когда рыночная стоимость облигации возрастает.

Экономист Пол Самуэльсон предложил фундаментальную теорему, которая позволяет заменить одну облигацию двумя другими таким образом, что при текущем уровне процентной ставки их совокупная стоимость остается неизменной. Однако при изменении процентных ставок их общая стоимость увеличивается. Это достигается за счет использования принципа выравнивания дюраций активов и обязательств. Балансировка дюраций позволяет минимизировать процентный риск и стабилизировать волатильность стоимости портфеля в условиях рыночных колебаний процентных ставок.

Рассмотрим ситуацию, при которой инвестор берет на себя обязательство погасить долг в размере C в момент времени t. Приведенная стоимость такого обязательства может быть определена через выражение $P_1(r)=\frac{C}{(1+r)^t}$, где

$D_1 = t$ – это дюрация данной задолженности, которая эквивалентна облигации типа I. Дюрация в данном контексте отражает временную чувствительность текущей стоимости обязательства к изменению процентной ставки.

Теперь проанализируем две бескупонные облигации A и B, номинальная стоимость которых равна N_A и N_B соответственно, а сроки погашения обозначены как t_A и t_B. Допустим, процентная ставка r является постоянной величиной и совпадает с доходностью данных облигаций к моменту их погашения. Формирование портфеля, состоящего из этих двух облигаций, можно обозначить как облигацию II. В таком случае приведенная стоимость портфеля P_2 может быть выражена через соответствующую математическую модель, основанную на текущих рыночных условиях и характеристиках облигаций.

$$P_2(r) = \frac{N_A}{(1+r)^{t_A}} + \frac{N_B}{(1+r)^{t_B}},$$

а дюрация D_2 портфеля П равна $D_2 = t_A\omega_A + t_B\omega_B$, где

$$\omega_A = \frac{N_A}{P_2 \cdot (1+r)^{t_A}}, \ \omega_B = \frac{N_B}{P_2 \cdot (1+r)^{t_B}},$$

причем $\omega_A + \omega_B = 1$.

Пусть текущая процентная ставка r_0 такова, что:

$$t_A < t < t_B, \tag{3.21}$$

$$P_1(r_0) = P_2(r_0) = P, \tag{3.22}$$

$$D_1 = D_2(r_0) = D. \tag{3.23}$$

Из равенств (3.23) и (3.24) следует, что

$$P_1^`(r_0) = P_2^`(r_0).$$

Следовательно, графики функций $P_1(r)$ и $P_2(r)$ касаются в точке (r_0, P).

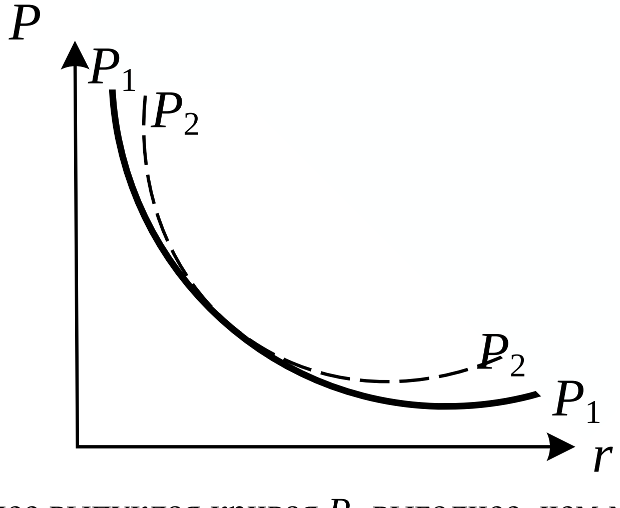


Рисунок 3.1– Более выпуклая кривая P_2 выгоднее, чем менее выпуклая P_1

Отсюда следует, что когда доходность к погашению возрастет на Δr, то текущая стоимость P_1 уменьшается сильнее, чем текущая стоимость P_2, т. е. $P_2(r_0 + \Delta r) > P_1(r_0 + \Delta r)$, и, наоборот, если доходность падает, то стоимость по облигации I растет медленнее, чем стоимость облигации II, т. е. $P_1(r_0 - \Delta r) < P_2(r_0 - \Delta r)$. Поэтому говорят, что стоимость облигации II «защищает» (*хеджирует)* стоимость облигации I или что облигация II *иммунизирует* облигацию I. Из приведенных выше рассуждений следует, что для «иммунизирующего портфеля», состоящего из двух облигаций A и B, «хеджирующие» доли ω_A и ω_B должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} \omega_A + \omega_B = 1, \\ D_A\omega_A + D_B\omega_B = D. \end{cases} \tag{3.24}$$

Этот подход позволяет минимизировать влияние изменений процентных ставок на общий портфель, обеспечивая сбалансированное изменение его стоимости при движении ставок на рынке.

С математической точки зрения иммунизация портфеля требует решения системы уравнений, которая учитывает такие параметры, как дюрация, текущая доходность к погашению и срок до погашения для обеих облигаций.

3.7 Примеры

Пример 3.1. Найдите купонный доход облигации с номиналом $N = 10\,000$ руб. и купонной ставкой $q = 5$ %.

Решение. Купонный доход равен

$$C = qN = \frac{10\,000 \cdot 5}{100} = 500 \text{ руб.}$$

Пример 3.2. Найдите текущую стоимость облигации номиналом $N = 12\,000$ руб., купленной за $n = 10$ лет до погашения, если купонная ставка $q = 5$ %, а годовая процентная ставка $r = 12$ %.

Решение. Воспользуемся формулой (3.2):

$$P = \frac{12\,000 \cdot 5}{12} + \frac{12\,000 \cdot (12 - 5)}{12 \cdot (1 + 0{,}12)^{10}} \approx 7253{,}81 \text{ руб.}$$

Пример 3.3. Найдите доходность к погашению для двухгодичной облигации $n = 2$ номинальной стоимостью $N = 10\,000$ руб. с купонной ставкой $q = 5$ %, которая продается по рыночной цене $V = 7120$, используя приближенную формулу (3.11).

Решение. Подставляя в формулу (3.11) $K = V\,/\,N = 0{,}712$, $n = 2$ и $q = 0{,}05$, получим

$$\rho \approx \frac{2(0{,}05 \cdot 2 + 1 - 0{,}712)}{0{,}712 - 1 + 2(0{,}712 + 1)} \approx 0{,}247.$$

Видно, что результат мало отличается от результата предыдущего примера.

Пример 3.4. Найдите доходность к погашению ρ для пятилетней облигации $n = 5$, номинальной стоимостью $N = 10$ тыс. руб. и купонной ставкой $q = 7$ %, если ее рыночная цена V равна: а) 10 000 руб., б) 10 100 руб., в) 9900 руб.

Решение. а) Облигация продается по номиналу, поэтому по теореме (3.2) $p = q = 0{,}07$.

б) По формуле (3.11) при $K = V / N = 1{,}01$, $n = 5$ и $q = 0{,}07$, получим

$$\rho \approx \frac{2(0{,}07 \cdot 5 + 1 - 1{,}01)}{1{,}01 - 1 + 5(1{,}01 + 1)} \approx 0{,}068.$$

в) По формуле (3.11) при $K = V / N = 0{,}99$, $n = 5$ и $q = 0{,}07$, получим

$$\rho \approx \frac{2(0{,}07 \cdot 5 + 1 - 0{,}99)}{0{,}99 - 1 + 5(0{,}99 + 1)} \approx 0{,}072.$$

Пример 3.5. Найдите изменение рыночной цены пятилетней облигации $n = 5$, номинальной стоимостью $N = 10$ тыс. руб. и купонной ставкой $q = 7$ %, если ее доходность к погашению *p:*

а) увеличилась с 7 до 8 %, б) уменьшилась с 7 до 6 %.

Решение. $V_0 = V(7\ \%) = N = 10\,000$.

а) $V_+ = V(8\ \%) = \{(3{,}8)\} \approx 9600{,}73$; $\Delta V_+ = V_+ - V_0 \approx -399{,}27$;

б) $V_- = V(6\ \%) = \{(3{,}8)\} \approx 10\,421{,}24$; $\Delta V_- = V_- - V_0 \approx 421{,}24$.

Отметим, что $|\Delta V_-| > |\Delta V_+|$, что соответствует теореме (3.4).

Пример 3.6. Найдите величину дисконта пятилетней облигации номинальной стоимостью $N = 10$ тыс. руб. и купонной ставкой $q = 7$ %, если ее рыночная цена за 5 лет до погашения равна $V = 9600{,}73$ руб. и облигация продается: а) за 5 лет до погашения; б) за 4 года до погашения.

Решение. По формуле (3.11) найдем доходность к погашению $\rho \approx 0{,}8$. Через год при условии, что доходность облигации не изменилась и по-прежнему равна $\rho \approx 0{,}8$, облигация будет продаваться по цене, которую найдем из формулы (3.8):

$$V_1 = \frac{10\,000 \cdot 7}{8} + \frac{10\,000 \cdot (8 - 7)}{8 \cdot (1 + 0{,}08)^4} \approx 9668{,}79 \text{ руб.}$$

Дисконт I_5 за 5 лет до погашения равен

$$I_5 = N - V = 10\,000 - 9600{,}73 = 399{,}27 \text{ руб.},$$

а за 4 года до погашения год составит

$$I_4 = N - V_1 = 10\,000 - 9668{,}79 = 331{,}21 \text{ руб.}$$

Таким образом, дисконт облигации уменьшился с 399,27 до 331,21 руб., т. е. на 68,06 руб.

Пример 3.7. Найдите дюрацию пятилетней облигации номинальной стоимостью N = 10 тыс. руб. и купонной ставкой q = 7 %, если ее рыночная цена за 5 лет до погашения равна V = 9600,73.

Решение. По формуле (3.11) найдем доходность к погашению $\rho \approx 0{,}8$. Затем по формуле (3.16)

$$D = \frac{1+0{,}08}{0{,}08} - \frac{5(0{,}07 - 0{,}08) + 1 + 0{,}08}{0{,}07\left((1+0{,}08)^5 - 1\right) + 0{,}08} \approx 4{,}37 \text{ лет.}$$

Пример 3.8. Найдите, на сколько процентов изменится цена облигации при уменьшении доходности к погашению с 10 до 9 %, если ее дюрация равна 10 лет.

Решение. Воспользуемся приближенной формулой (3.15):

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{10}{1+0{,}1}(0{,}09 - 0{,}1) \approx 0{,}091.$$

Цена облигации увеличится на 9,1 %.

Пример 3.9. Сформируйте портфель из трех- и семилетней бескупонных облигаций, иммунизирующий шестилетнюю бескупонную облигацию номинальной стоимостью 10 тыс. руб. при 12 % годовой ставке.

Решение. Из системы уравнений (3.31)

$$\begin{cases} \omega_{\text{A}} + \omega_B = 1, \\ 3\omega_A + 7\omega_B = 6 \end{cases}$$

найдем хеджирующие доли облигаций: ω_A = 0,25 и ω_B = 0,75.

Далее определим текущие стоимости всех облигаций:

$$P = 10\,000 \cdot 1{,}12^{-6} \approx 5066{,}31 \text{ руб.},$$

$$P_A = 0{,}25P \approx 1266{,}58 \text{ руб.},$$

$$P_B = 0{,}27P \approx 3799{,}73 \text{ руб.}$$

Найдем номинальные стоимости бескупонных облигаций, входящих в портфель: $N_A = P_A \cdot 1{,}12^3 \approx 1779{,}45$ руб., $N_B = P_B \cdot 1{,}12^7 \approx 8400$ руб.

Следовательно, искомый иммунизирующий портфель состоит из трехлетней бескупонной облигации номинальной стоимостью 1779,45 руб. и семилетней бескупонной облигации номиналом 8400 руб.

3.8 Задачи для самостоятельной работы

1. Инвестор через два года должен осуществить за счет своего портфеля платеж 1 млн ден. ед. Инвестор рассматривает возможности инвестирования в облигации двух видов А1 и А2, параметры которых приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Исходные данные для задачи 1

Вид облигации	Номинал N, ден. ед.	Купонная ставка g, %	Число платежей в год p	Срок гашения n, лет
А1	1000	7	1	1
А2	1000	8	1	3

Процентные ставки на рынке одинаковы для всех сроков и составляют 10 % годовых. Считая, что сразу после формирования портфеля процентные ставки поднялись до 11 %, сформировать иммунизированный портфель, позволяющий инвестору через два года выполнить его обязательство.

2. В начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 8 % годовых. На рынке имеются два вида купонных облигаций, параметры которых приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Исходные данные для задачи 2

Вид облигации	Номинал N, ден. ед.	Купонная ставка g, %	Число платежей в год p	Срок гашения n, лет
А1	100	10	1	2
А2	100	10	1	4

Инвестор формирует портфель облигаций стоимостью 1000 ден. ед. инвестиционным горизонтом 3 года. Рассчитать стратегию иммунизации этого портфеля для следующего изменения процентных ставок: 9 % годовых сразу после формирования портфеля, 8 % годовых непосредственно после момента $t = 1$.

3. Найдите текущую цену облигации, номинальная стоимость которой составляет 100 тыс. руб., срок до погашения – 4 года, ежегодная купонная ставка – 7 %, процентная ставка – 12 % годовых.

4. Найдите текущую цену трехлетней облигации с номиналом в 100 тыс. руб. и купонной ставкой $q = 8$ %, если купонный доход выплачивается 4 раза в год, а процентная ставка равна 12 % годовых.

5. Три облигации с одинаковой номинальной стоимостью 25 тыс. руб, сроком погашения 5 лет, купонной ежегодной ставкой 9 % имеют различные доходности к моменту погашения 6, 9 и 12 %. Найдите рыночные стоимости этих облигаций. Объясните результат.

6. Две облигации имеют одинаковые номинальные стоимости 75 тыс. руб., купонные ставки 6 % и доходности к погашению 10 %, но разные сроки погашения 10 и 5 лет соответственно. Найдите курсы этих облигаций. Объясните результат.

7. Найдите изменение стоимости облигации со сроком обращения $n = 5$ лет и купонной ставкой $q = 7$ %, продаваемой по номиналу $N = 100$ тыс. руб. при увеличении и уменьшении доходности на 1 %. Объясните результат.

8. Выгодно ли сегодня продать облигацию, номинальная стоимость которой 100 тыс. руб. срок погашения 10 лет, купонная ставка процента 7 %, доходность равна 12 %, а рыночная цена облигации равна 75 тыс. руб.? Ответ обоснуйте.

9. Найдите доходность к погашению облигации номинальной стоимости 5000 руб., сроком погашения 7 лет, ежегодной купонной ставкой 6 % и рыночной стоимостью 5142 руб.

10. Найдите величину премии пятилетней облигации номинальной стоимостью 10 тыс. руб. и купонной ставкой 10 %, если ее рыночная цена за 5 лет до погашения равна 10 806,45 руб. и облигация продается: а) за 3 года до погашения; б) за год до погашения.

11. Найдите дюрацию облигации сроком до погашения 7 лет и ежегодной купонной ставкой 7 %, если ее доходность к моменту погашения равна 10 %.

12. Найдите дюрацию облигации сроком до погашения 7 лет, купонной ставкой 7 % и номиналом 100 тыс. руб., которая продается по цене 85 тыс. руб.

13. Инвестиционный портфель содержит 15 % облигаций с дюрацией 2 года, 25 % облигаций с дюрацией 4 года, 40 % с дюрацией 3 года и 20 % облигаций с дюрацией 5 лет. Найдите дюрацию такого портфеля.

14. Расположите облигации по возрастанию дюрации (таблица 3.4). Поясните ход рассуждений.

Таблица 3.4 – Исходные данные для задачи 14

Облигация	Срок до погашения, лет	Купонная ставка, %	Доходность к погашению, %
A	11	8	8
B	11	0	8
C	11	8	5
D	4	8	8

15. Найдите изменение дюрации семилетней облигации с купонной ставкой 7 % (ежегодные купонные выплаты), продаваемой по номиналу, при уменьшении доходности до 5 %. Объясните результат.

16. Найдите, на сколько процентов изменится цена облигации с дюрацией 7 лет при увеличении доходности к погашению с 10 до 11 %.

17. Используя дюрацию, найдите в первом приближении ожидаемую цену облигации номиналом 100 тыс. руб., купонной ставкой 7 % (с ежегодной выплатой), рыночной ценой за 7 лет до погашения 85 тыс. руб., если ожидается рост доходности на 2 %.

18. Фирме необходимо через 4 года выплатить долг в размере 1 млн руб. Найдите количество двухлетних бескупонных облигаций и десятилетних бескупонных облигаций с номиналами 1 тыс. руб., которые следует купить, чтобы хеджировать риск изменений процентной ставки, равной 10 %. Нарисуйте график зависимости текущей стоимости иммунизирующего портфеля от величины процентной ставки.

Тема 4. Анализ акций

4.1 Общие сведения

Акция – именная эмиссионная ценная бумага, свидетельствующая о вкладе в уставный фонд акционерного общества, эмитируемая на неопределенный срок в бездокументарной форме и удостоверяющая определенный объем прав владельца в зависимости от ее категории (простая (обыкновенная) или привилегированная), типа (для привилегированной акции).

В Республике Беларусь акции являются именными, что подразумевает, что права, связанные с акциями, принадлежат только одному определенному лицу. Термин «эмиссионный» указывает на то, что акции выпускаются партиями, при этом каждая акция предоставляет владельцу равный объем прав. Акции существуют в бездокументарной форме, т. е. не имеют физического выражения и не оформляются как документ, соответствующий установленным требованиям. Учет прав на акции выполняют депозитарии, которые ведут специальные именные счета – счета «депо», доступные каждому владельцу. Для подтверждения своих прав акционер может в любой момент получить выписку со своего счета «депо» в депозитарии.

Акционерное общество вправе выпускать акции двух категорий: простые (обыкновенные) и привилегированные. Различие их состоит в объеме удостоверяемых ими прав (таблица 4.1).

Таблица 4.1 – Различия обыкновенных и привилегированных акций

Простые (обыкновенные) акции	Привилегированные акции
1	2
Предоставляют право на	
– участие в общем собрании акционеров с правом голоса по всем вопросам повестки дня	– участие в общем собрании акционеров с правом голоса только в случаях: принятия решения о реорганизации и ликвидации общества; внесении в устав изменений, ограничивающих их права; либо в случае, если на предыдущем собрании было принято решение о невыплате (неполной выплате) дивидендов по привилегированным акциям

Продолжение таблицы 4.1

1	2
– получение дивидендов при распределении прибыли, оставшейся в распоряжении предприятия, в случае принятия общим собранием акционеров решения о выплате дивидендов по простым (обыкновенным) акциям	– получение фиксированных размеров дивидендов при распределении прибыли, оставшейся в распоряжении предприятия, в порядке и сроки, определенные уставом
– получение в случае ликвидации общества части имущества общества или его стоимости	– получение в случае ликвидации общества фиксированной стоимости имущества либо части имущества общества
Ограничения по количеству	
нет	не более 25 % общего объема уставного фонда
Выплата дивидендов со стороны общества	
право	обязательство
Очередность выплаты дивидендов	
во вторую очередь	в первую очередь

Решение о выпуске привилегированных акций одного или нескольких типов принимается акционерным обществом на этапе учредительного собрания, а затем на общем собрании акционеров. Это решение обязательно фиксируется в уставе общества. В Республике Беларусь существуют акционерные общества, уставной фонд которых полностью состоит из простых (обыкновенных) акций, что является наиболее распространенной практикой. Однако есть и такие общества, где часть уставного капитала распределена между простыми акциями, а не более 25 % составляют привилегированные.

Право голоса является фундаментальным элементом корпоративного управления и играет решающую роль в обеспечении акционеров возможностью влиять на стратегические решения компании. На общем собрании акционеров рассматриваются вопросы, касающиеся ключевых аспектов деятельности компании, таких как ликвидация, реорганизация, утверждение дивидендной политики и распределение прибыли. Эти решения определяют дальнейшее развитие организации и стратегию ее финансового управления.

Каждая обыкновенная акция предоставляет акционеру право голоса, которое используется для участия в принятии решений на собраниях. Это право голосования позволяет акционерам выражать свое мнение по поводу распределения чистой прибыли компании: либо направить ее на реинвестирование в бизнес для долгосрочного роста, либо использовать часть средств для выплаты дивидендов акционерам. Кроме того, право на получение дивидендов является важным стимулом для инвесторов, так как оно обеспечивает регулярные выплаты на основе результатов деятельности компании.

В случае ликвидации общества акционеры также имеют законное право претендовать на долю имущества, оставшегося после удовлетворения требований кредиторов, что делает их собственниками не только финансовых активов компании, но и ее материальных ресурсов.

В корпоративной структуре право акционеров на участие в управлении компанией распределяется в зависимости от количества акций, которыми они владеют. Определенные пороговые значения долей акций предоставляют владельцам различные полномочия и возможности влияния на ключевые аспекты деятельности общества.

Права:

– акционеры общества вправе получать информацию о деятельности общества и знакомиться с его документацией в объеме и порядке, установленных уставом общества;

– 1 % акций общества (плюс к вышеперечисленному) дает право на ознакомление с полным списком лиц, имеющих право на участие в общем собрании акционеров;

– 10 % акций предоставляют акционерам значимые контрольные права, включая возможность инициировать внеочередное собрание акционеров, а также требовать проведения аудита или проверки финансово-хозяйственной деятельности компании. Эти механизмы служат инструментом обеспечения прозрачности и контроля за деятельностью менеджмента компании, что особенно важно в случае подозрений на неэффективное управление или нарушения в отчетности;

– 25 % + 1 акция, так называемый блокирующий пакет, наделяет акционера правом блокировать решения общего собрания акционеров, для которых требуется кворум в размере не менее трех четвертей голосов. Это позволяет владельцам такого пакета эффективно предотвращать принятие решений, которые могут оказать негативное влияние на их интересы, включая изменения в уставе компании, реорганизацию или крупные сделки;

– 50 % + 1 акция, или контрольный пакет, представляет собой ключевую долю, которая предоставляет акционеру возможность оказывать решающее влияние на все решения, принимаемые на общем собрании акционеров. Владелец контрольного пакета фактически определяет направление развития компании, поскольку его голос является определяющим в большинстве голосований. Такой пакет также позволяет акционеру признать собрание акционеров правомочным и таким образом контролировать общие собрания и принятие всех значимых корпоративных решений.

Каждое из указанных пороговых значений акций играет стратегическую роль в корпоративном управлении и существенно влияет на баланс сил между акционерами, предоставляя различный уровень контроля и защиты их интересов.

4.2 Оценка акций

Рассмотрим процесс оценки стоимости обыкновенных акций с учетом двух основных источников дохода для их держателя:

1. Дивидендные выплаты – регулярные выплаты, которые акционер получает в зависимости от прибыли компании.
2. Изменение рыночной цены акций – потенциальная выгода (или убыток), связанная с изменением стоимости акций на рынке.

Цена акций на рынке отражает ожидания инвесторов по поводу этих двух компонентов дохода. Для оценки текущей рыночной стоимости акций, или их приведенной стоимости (P_0), примем обозначения: последовательные годовые дивиденды как D_0, D_1, D_2 и т. д., а цены акций на конец каждого года как P_0, P_1, P_2 и т. д.

Предположим, что инвестор держит акцию в течение одного года. В конце этого года он получает дивиденд D_1 и может продать акцию за рыночную цену P_1. Чтобы определить приведенную стоимость этой акции на текущий момент времени, необходимо дисконтировать будущие доходы с использованием ставки дисконтирования r (ставки доходности, требуемой инвестором). Это позволяет учесть временную стоимость денег и определить текущую рыночную стоимость акции учетом будущих выплат и изменения цены.

Формально приведенная стоимость акции на текущий момент может быть рассчитана как сумма дисконтированных будущих дивидендов и цены продажи акции, что записывается в виде уравнения (4.1):

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+r)} + \frac{P_1}{(1+r)}. \tag{4.1}$$

Этот подход является основой для оценки стоимости акций с учетом их доходности и инвестиционного горизонта и позволяет инвестору определить целесообразность вложения с учетом предполагаемой доходности.

Предположим, что акция куплена в конце первого года за P_1 долл. США в и остается на руках в течение следующего года. Тогда

$$P_1 = \frac{D_2}{(1+r)} + \frac{P_2}{(1+r)},$$

а если подставить это выражение в уравнение (4.1), вместо P_1 получим

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+r)^1} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{P_2}{(1+r)^2}.$$

В общем случае для N лет жизни акции это выражение примет вид

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+r)^1} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{D_N}{(1+r)^N} + \frac{P_N}{(1+r)^N}.$$

Теперь предположим, что N становится неопределенно большим. Тогда последний член уравнения обращается в нуль (фактически для этого нужно предположить, что в конечном счете цена акций будет расти с меньшей скоростью, чем r) и мы получаем

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t}. \tag{4.2}$$

Приведенная стоимость обыкновенной акции. При любом инвестиционном горизонте оценка справедливой стоимости обыкновенной акции сводится к расчету суммы всех ожидаемых дивидендных выплат, дисконтированных к текущему моменту. Этот подход основывается на предположении, что акции представляют собой право на получение будущих доходов в виде дивидендов, и их стоимость определяется через приведение этих выплат к настоящему времени.

Теперь представим, что корпорация решила не выплачивать дивиденды в текущем году и не планирует делать это в будущем. Встает вопрос: станет ли стоимость акций равна нулю? Ответ – нет. Даже если компания приостановила выплаты дивидендов, ее акции не обесценятся полностью. Причиной этого является наличие другого ключевого фактора в модели – предполагаемой цены продажи акции в будущем, обозначаемого параметром P. Найдется покупатель, который будет готов приобрести акцию, полагая, что в будущем ситуация изменится и компания возобновит дивидендные выплаты. Это явление иногда называют теорией «еще большего дурака», где новый инвестор верит, что сможет продать акцию в будущем по более высокой цене, опираясь на надежду на восстановление дивидендной политики компании.

Однако в реальных условиях инвесторы не обладают точной информацией о том, какие дивиденды компания выплатит в будущем, что добавляет неопределенности в оценку акций. Рыночная стоимость акций в значительной мере зависит от ожиданий и предположений о возможных будущих доходах от дивидендов. В условиях неопределенности инвесторы вынуждены делать прогнозы, основываясь на информации о текущем финансовом состоянии компании и ее будущем потенциале.

Для упрощения расчетов часто используется модель постоянного роста дивидендов, предполагающая, что дивиденды будут увеличиваться с постоянной скоростью. Это предположение позволяет упростить математическую модель, поскольку вместо оценки всех будущих дивидендных выплат необходимо лишь оценить начальный дивиденд и скорость его роста. Такая модель делает анализ более практичным и применимым на практике, особенно в случае стабильных компаний с прогнозируемой политикой дивидендных выплат.

4.3 Модели изменения дивидендов

Рассмотрим процесс оценки текущей стоимости акции с учетом дивидендов, выплачиваемых акционерам. Пусть D_t обозначает величину дивидендов, выплачиваемых по акции в периоде владения t. Предполагается, что дивиденды поступают в конце каждого периода, а их капитализация осуществляется с использованием сложных процентов. Применяя метод дисконтирования будущих платежей к данному потоку дивидендов, необходимо учитывать следующие важные особенности:

1. Поток дивидендных выплат $\{D_t\}$ $(t = 1, 2, \ldots, T)$ представляет собой потенциально бесконечную последовательность, так как акции могут существовать неограниченное время. Следовательно, число периодов обращения акций T стремится к бесконечности: $T = \infty$.

2. Непостоянство дивидендного дохода – в отличие от доходов по облигациям, которые фиксируются условиями эмиссии, дивиденды по обыкновенным акциям зависят от финансовых результатов компании и не гарантируются. Таким образом, при расчете текущей стоимости акций используются прогнозные значения будущих дивидендов, которые основаны на ожидаемых показателях компании.

Допустим, что ставка дисконтирования, интерпретируемая как ожидаемая доходность вложений с аналогичным уровнем риска, остается неизменной на всем протяжении обращения акций и равна R. В этом случае в рамках метода дисконтирования текущая стоимость акции определяется как сумма приведенных стоимостей всех будущих ожидаемых дивидендов:

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+R)^t} . \tag{4.3}$$

Это уравнение показывает, что текущая стоимость акции – это сумма всех будущих дивидендов, дисконтированных по соответствующей ставке доходности R. Такая модель особенно важна в условиях неопределенности, так как позволяет учесть долгосрочные ожидания инвесторов в отношении доходности актива и сопоставить их с текущей рыночной ситуацией.

Следовательно, для эффективного использования формулы (4.1) инвестор должен иметь прогнозные значения всех будущих дивидендов $\{D_t\}$ (t = 1, 2, …). Поскольку акции обладают «неограниченным сроком жизни», предсказание бесконечного потока дивидендов становится невозможным без дополнительных предположений, основанных на конкретных *моделях изменения дивидендов*. В дальнейшем мы рассмотрим традиционные модели изменения дивидендов и применим их для расчета текущей стоимости, NPV и IRR акций.

Будем предполагать, что поток дивидендов по акциям порождается следующей рекуррентной формулой:

$$D_t = D_{t-1}(1+g_t), \; t = 1, 2, \ldots, \tag{4.4}$$

где D_0 – некоторое известное значение, например величина последних дивидендов, выплаченных по данным акциям. Величина g_t определяется из соотношения

$$g_t = \frac{D_t - D_{t-1}}{D_{t-1}}, \; t = 1, 2, \ldots, \tag{4.5}$$

т. е. является *темпом прироста дивидендов* за период владения t.

Различные предположения относительно темпов прироста дивидендов $\{g_t\}$ приводят к различным моделям изменения дивидендов. Наиболее известными являются модели нулевого, постоянного и переменного роста дивидендов.

Модель нулевого роста дивидендов описывается соотношением (4.4) при условии, что

$$g_t = 0, \; t = 1, 2, \ldots \tag{4.6}$$

Условие (4.4) означает, что в будущем в течение всего срока обращения акций по ним ожидаются фиксированные дивиденды, т. е. $D_1 = D_2 = \ldots = D_T$, где D_0 – некоторая заданная величина дивидендов.

В практическом применении данная модель демонстрирует свою полезность при анализе привилегированных «не участвующих» акций, для которых не предусмотрено никаких выплат, кроме фиксированных дивидендов.

В дальнейшем мы выведем формулы для расчета текущей стоимости, чистой приведенной стоимости (*NPV*) и внутренней нормы доходности (*IRR*) акций в соответствии с ранее описанными моделями изменения дивидендов.

Формально применение метода дисконтирования дивидендных платежей в модели нулевого роста аналогично анализу «бессрочных» облигаций, рассмотренному ранее.

Обозначим, как и ранее, $d = (1 + R)^{-1}$ – дисконтный множитель. Тогда на основании уравнений (4.3), (4.4) текущая стоимость акции в случае модели нулевого роста дивидендов допускает представление

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+R)^t} = \frac{D_0}{1+R} \sum_{t=0}^{\infty} d^t \ . \qquad (4.6)$$

Так как $d < 1$, то по свойству суммы бесконечной геометрической прогрессии имеем: $\sum_{t=0}^{\infty} d^t = \frac{1}{1-d}$, что с учетом (4.6) влечет

$$V = \frac{D_0}{R} \ . \qquad (4.7)$$

Из уравнения (4.7) можно сделать вывод, что текущая стоимость акции находится в прямой зависимости от величины выплачиваемых дивидендов и в обратной зависимости от ожидаемой доходности инвестиций с аналогичным уровнем риска.

Для оценки инвестиционной привлекательности акций, аналогично облигациям, применяются такие показатели, как чистая приведенная стоимость (*NPV*) и внутренняя норма доходности (*IRR*). Обозначим P как текущую рыночную цену акции (цену приобретения). Исходя из условия $NPV = V - P = 0$, получаем выражение для вычисления внутренней нормы доходности акции:

$$R^* = \frac{D_0}{P} \ . \qquad (4.8)$$

Ставка вида (4.8) обычно называется ставкой дивидендной доходности акции. Соотношение (4.8) подтверждает известный факт: доходность актива тем больше, чем больше ожидаемые по нему выплаты и чем меньше цена покупки данного актива.

Модель постоянного роста дивидендов предполагает, что ожидается рост дивидендов с постоянным темпом, т. е. в (4.2) следует положить, что

$$g_t = g = \text{const}, \ \ t = 1, 2, \ldots,$$

где g – постоянный ожидаемый темп прироста дивидендов.

Поскольку на выплату дивидендов может направляться лишь некоторая доля чистой прибыли корпорации, то следует положить, что $g < R$.

Таким образом, в данном случае поток дивидендов $\{D_t\}$ удовлетворяет следующему соотношению (D_0 – известная величина):

$$D_t = D_{t-1}(1+g) = D_0(1+g)^t, \quad t = 1, 2, \ldots \qquad (4.9\ )$$

Предположение о неизменности дивидендов на протяжении всего срока обращения акций является малореализуемым на практике. Тем не менее такая модель может быть полезна для оценки обыкновенных акций компаний, которые следуют определенной дивидендной политике, направленной на поддержание рыночной стоимости акций через стабильный (хотя, возможно, и невысокий) рост дивидендов.

Подставив данное предположение в уравнение (4.2), можно получить формулу для расчета приведенной стоимости.

$$P_0 = D_0 \sum_{t=1}^{\infty} \left[\frac{(1+g)^t}{(1+r)^t}\right].$$

С помощью алгебраических преобразований можно показать, что если темп ростам g меньше ставки дисконтирования r, то

$$P_0 = \frac{D_1}{(r-g)}\ . \qquad (4.10)$$

Этот результат, известный как модель Гордона (Gordon), дает возможность легко оценивать обыкновенные акции.

*Н*а основании уравнений (4.1), (4.5) текущая стоимость акции в случае модели постоянного роста дивидендов определяется по формуле

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+R)^t} = \frac{D_0(1+g)}{1+R} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^t = \frac{D_0(1+g)}{1+R} \sum_{t=0}^{\infty} q^t\ , \qquad (4.11)$$

где использовано обозначение $q = \dfrac{1+g}{1+R} < 1$.

С учетом свойства суммы бесконечной геометрической прогрессии из уравнений (4.11) следует

$$V = \frac{D_0(1+g)}{R-g} = \frac{D_1}{R-g}. \qquad (4.12)$$

Из условия $NPV = V - P = 0$ (где P – рыночная цена покупки акции) получаем соотношение для внутренней доходности акции:

$$R^* = \frac{D_0(1+g)}{P} + g\ . \qquad (4.13)$$

Формулы (4.10) и (4.11) соответствуют ранее установленным закономерностям. В частности, при q = 0 из них выводятся формулы (4.9) и (4.10), применимые для модели с нулевым ростом дивидендов. В случаях, когда на разных стадиях развития компании-эмитента применяются различные схемы выплат дивидендов, для анализа акций может быть использована модель с переменным ростом дивидендов.

Пример 4.1. Корпорация выплатила дивиденды на одну обыкновенную акцию в размере 5 долл., и прогнозируется, что ежегодный рост дивидендов составит 6 %. Задача заключается в том, чтобы рассчитать приведенную стоимость акции с учетом дисконтирования будущих дивидендов. Инвесторы ожидают, что для оценки будущих доходов можно использовать ставку дисконтирования 10 % годовых.

Для решения этой задачи используется модель расчета стоимости акции на основе дивидендов с постоянным ростом, также известная как модель Гордона. Она предполагает, что стоимость акции равна сумме будущих дивидендных выплат, приведенных к текущему моменту, с учетом ставки дисконтирования и предполагаемой скорости роста дивидендов. Основное уравнение выглядит следующим образом:

$$P_0 = \frac{D_1}{(r-g)},$$

где P_0– текущая стоимость акции;

D_1 – размер дивиденда в следующем периоде;

r – ставка дисконтирования (ожидаемая доходность);

g – темп роста дивидендов.

Исходя из задачи, начальный размер дивиденда D_0 составляет 5 долл. Прогнозируемый темп роста дивидендов равен 6 % (т. е. g = 0,06), а ставка дисконтирования – 10 % (r = 0,10).

Сначала необходимо рассчитать D_1 – ожидаемый дивиденд в следующем году. Для этого используется формула

$$D_1 = D_0 \cdot (1+g).$$

Подставив значения, получим

$$D_1 = 5 \cdot (1 + 0{,}06) = 5{,}3 \text{ долл.}$$

Теперь подставим все значения в основное уравнение для расчета текущей стоимости акции:

$$P_0 = \frac{5{,}3}{(0{,}10 - 0{,}06)} = 132{,}50 \text{ долл.}$$

Таким образом, приведенная стоимость акции с учетом прогнозируемого роста дивидендов и ставки дисконтирования составляет 132,50 долл. (таблица 4.2).

Этот пример демонстрирует, как модель Гордона помогает оценить справедливую стоимость акции при стабильных и предсказуемых дивидендных выплатах. Важно понимать, что результат сильно зависит от предполагаемой ставки роста дивидендов и ставки дисконтирования, что требует осторожного подхода к их выбору.

Мы выяснили, что текущая стоимость акции определяется как сумма всех будущих дивидендных выплат, скорректированных на коэффициент дисконтирования. Однако это не подразумевает, что расчет актуален только в случае, если акционер планирует держать акцию бесконечно долго. Даже при перепродаже акции те же принципы сохраняют свою применимость. Для подтверждения этого утверждения вернемся к примеру 4.1 и продолжим анализ. Предположим, что ставка дисконтирования и темп роста дивидендов остаются неизменными на всем протяжении владения акцией. Доход инвестора складывается не только из регулярных дивидендов, но и из увеличения рыночной стоимости акций. Мы приняли, что дивиденды будут расти стабильно с заданной скоростью. Следующим шагом станет оценка того, как изменится цена акции в будущем, учитывая этот постоянный рост дивидендов и влияние рыночных факторов. Продолжив использование уравнения (4.10) на следующий год, получаем формулу для расчета цены акции в конце первого года:

$$P_1 = \frac{D_2}{(r-g)} = \frac{(1+g)D_1}{(r-g)} = (1+g)P_0.$$

Продолжая этот процесс в будущее, получаем общее выражение:

$$P_t = (1+g)^t P_0.$$

Модель Гордона демонстрирует, что при сохранении постоянного темпа роста дивидендов и ставки дисконтирования стоимость акций увеличивается теми же темпами, что и дивиденд на одну акцию. В таблице 4.2 приведены прогнозы на 10 лет.

Во второй колонке таблицы представлены цены акций, которые ежегодно увеличиваются на 6 % от начальной стоимости, равной 132,50 долл. Этот темп роста отражает предполагаемый устойчивый рост рынка и стоимости компании. В третьей колонке указаны дивиденды на акцию, которые также растут с тем же ежегодным темпом 6 %, начиная с исходного значения в 5 долл. Такое увеличение дивидендов соответствует прогнозируемому стабильному финансовому положению компании и ее способности увеличивать доходы акционеров.

Третья колонка демонстрирует приведенную стоимость будущих дивидендов, рассчитанную с учетом дисконтирования. Для каждого года будущий дивиденд дисконтируется на текущий момент с использованием соответствующей ставки дисконтирования. Например, на пятый год ожидаемый дивиденд составит 6,69 долл. Для расчета приведенной стоимости этого дивиденда применяется ставка дисконтирования, которая отражает временную стоимость денег и риски, связанные с будущими выплатами. Приведенная стоимость дивиденда на пятый год будет равна

$$PV = \frac{6{,}69 \text{ долл.}}{(1{,}10)^5} = 4{,}15 \text{ долл.}$$

Таким образом, таблица позволяет отслеживать не только прогнозируемый рост цен акций и дивидендов, но и их реальную текущую стоимость с учетом дисконтирования. Такой подход помогает инвесторам принимать более обоснованные решения относительно долгосрочных вложений, принимая во внимание не только будущие выплаты, но и их значение в контексте текущего времени.

Рассчитанные значения приведенных стоимостей дивидендов представлены в пятой колонке таблицы 4.2. Например, если инвестор владеет акцией на протяжении пяти лет, то суммарная приведенная стоимость всех полученных дивидендов составит: 4,82 + 4,64 + 4,48 + 4,31 + 4,15 = 22,40 долл. В шестой колонке таблицы приведены оценки будущих цен акций, которые выражают приведенную стоимость дохода от их продажи в будущем.

Важно учитывать, что приведенная стоимость с течением времени уменьшается из-за влияния дисконтирования. Например, если предполагается, что акция будет продана через пять лет по цене 177,31 долл., ее текущая приведенная стоимость составит:

$$PV = \frac{177{,}31 \text{ долл.}}{(1{,}10)^5} = 110{,}10 \text{ долл.}$$

В последней колонке таблицы 4.2 представлены суммы, полученные путем сложения значений из двух предыдущих колонок.

Эти суммы отражают полную стоимость владения акцией, учитывающую как приведенные стоимости дивидендов, так и прибыль от продажи акции в будущем. Результирующее значение является исходной ценой покупки акции. В данном примере эта стоимость составляет 132,5 долл.

Стоит отметить, что независимо от того, когда акция будет продана, ее приведенная стоимость остается постоянной при условии неизменной ставки дисконтирования и стабильного темпа роста дивидендов. Это объясняется тем, что дисконтирование корректирует все будущие доходы (как дивиденды, так и продажу) до текущей стоимости. Таким образом, суммарная приведенная стоимость будущих дивидендов и продажи всегда равняется начальной цене приобретения акции. Это важный вывод, который подчеркивает, что временной фактор в финансовых моделях корректируется за счет применения дисконтирования, обеспечивая стабильность оценки стоимости акции на момент покупки.

Таблица 4.2 – Расчет приведенной стоимости акций из примера 4.1, находящихся во владении в течение 10 лет

Год	Цена акции, долл.	Получено дивидендов, долл.	Приведенная стоимость дивидендов, долл.	Накопленная приведенная стоимость дивидендов, долл.	Текущее значение цены, долл.	Суммарная приведенная стоимость, долл.
0	132,50	0	0	0	132,5	132,50
1	140,45	5,30	4,82	4,82	127,68	132,50
2	148,88	5,62	4,64	9,46	123,04	132,50
3	157,81	5,96	4,48	13,94	118,56	132,50
4	167,28	6,31	4,31	18,25	114,25	132,50
5	177,31	6,69	4,15	22,40	110,10	132,50
6	187,95	7,09	4,00	26,40	106,10	132,50
7	199,23	7,52	3,86	30,26	102,24	132,50
8	211,18	7,97	3,72	33,98	98,52	132,50
9	223,86	8,45	3,58	37,56	94,94	132,50
10	237,29	8,95	3,45	41,01	91,49	132,50

На рисунке 4.1 представлена динамика изменения цен акций, сопровождаемая одновременным уменьшением их приведенной стоимости. Эта противоположная направленность изменений объясняется тем, что с течением времени акционеры начинают получать дивиденды, которые постепенно сокращают ожидаемую будущую стоимость активов.

Выплата дивидендов приводит к тому, что часть стоимости акций реализуется в виде денежных выплат, что, в свою очередь, снижает приведенную стоимость оставшихся будущих доходов. Таким образом, наблюдаемая разнонаправленность динамики цен на акции и их приведенной стоимости является естественным следствием того, что инвесторы получают фактические выплаты, что влияет на общую оценку активов в портфеле.

Если приведенная стоимость будущих поступлений неизменно равна 132,50 долл., независимо от того, когда именно акция будет продана, тогда текущее значение цены акции должно падать, чтобы сбалансировать возрастание приведенной стоимости полученных дивидендов. Эти соотношения изображены на рисунке 4.2: накапливаемая приведенная стоимость дивидендов растет, текущее значение цены акции падает, а сумма этих двух показателей остается неизменной.

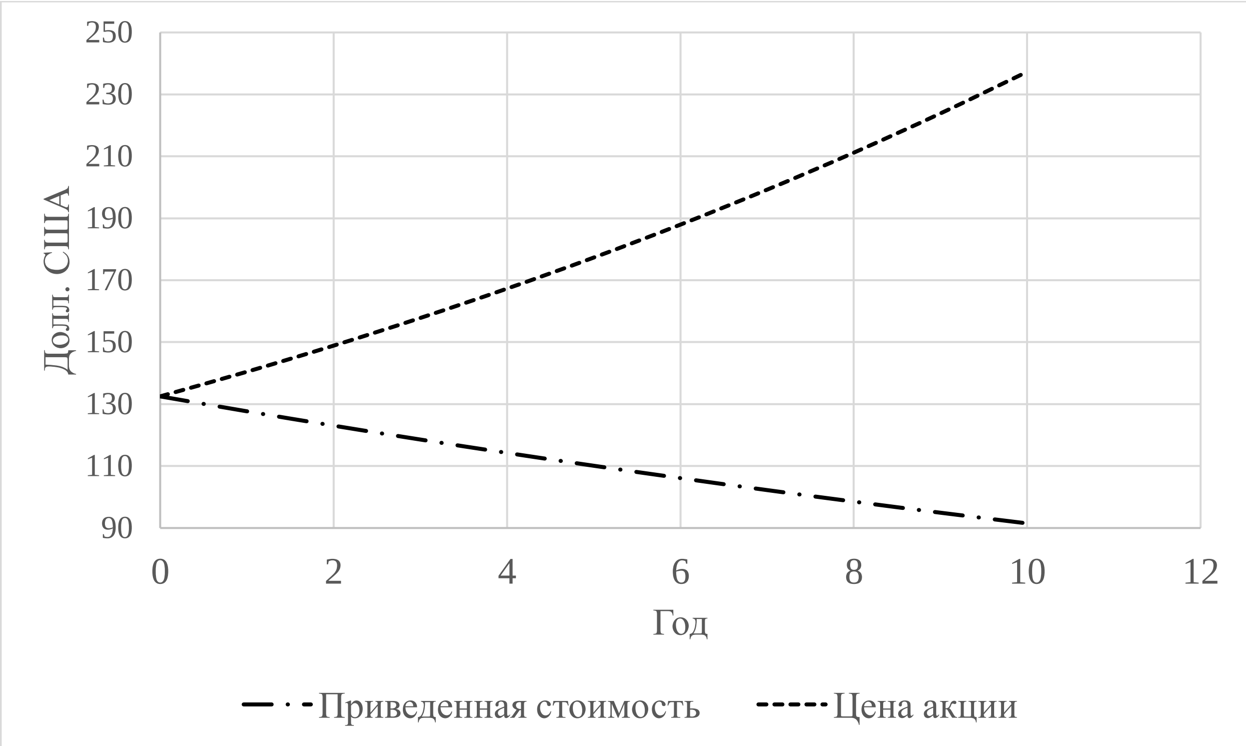


Рисунок 4.1 – Динамика роста цен акции и соответствующее уменьшение их приведенной стоимости

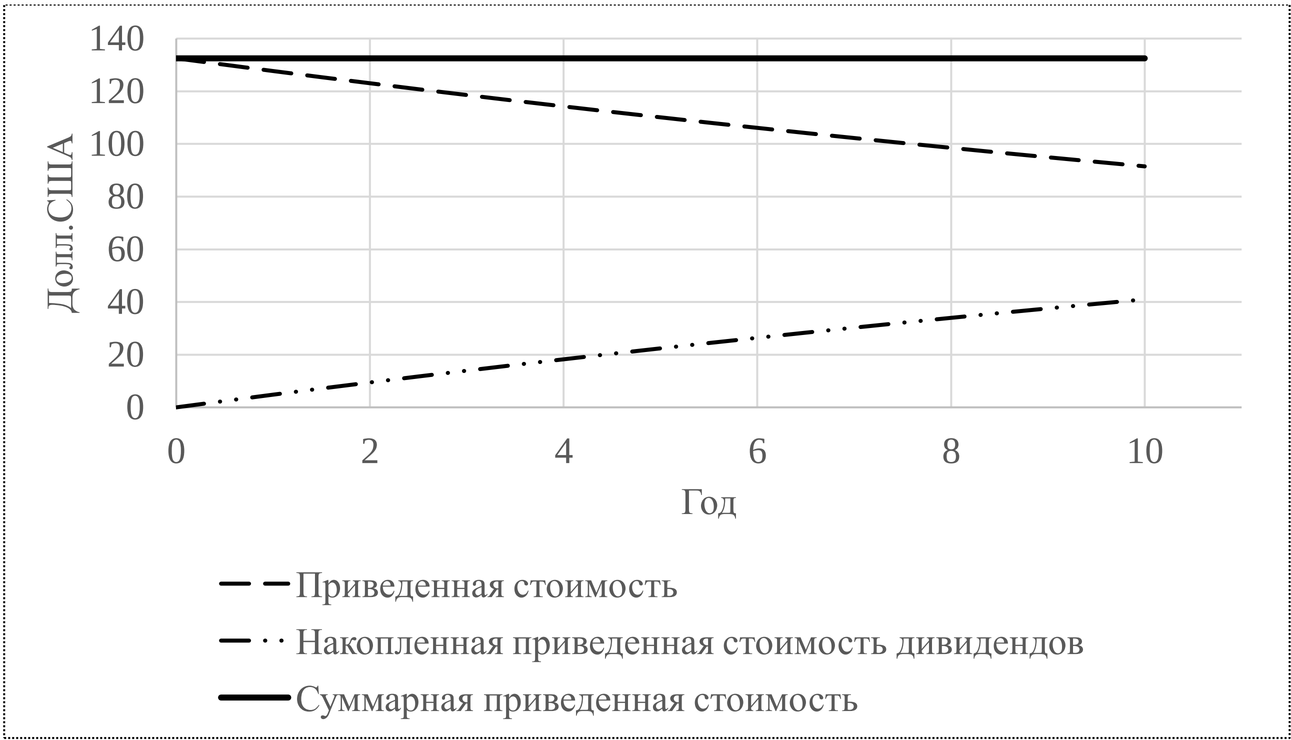


Рисунок 4.2 – Сумма накопленной приведенной стоимости дивидендов и текущего значения цены акций остается постоянной

Ставка дохода

Предположим, что акция куплена по цене P_0, а через год продана по цене P_1. Общий доход инвестора – это сумма полученного дивиденда D_1 и дохода от прироста цены акции, т. е.

$$\text{Доход} = D_1 + (P_1 - P_0).$$

Ставка дохода, или годовая доходность, этого вложения составляет

$$\text{Ставка дохода} = \frac{D_1 + (P_1 - P_0)}{P_0}.$$

В соответствии с моделью Гордона, в которой дивиденды ежегодно возрастают со скоростью g, а ставка дисконтирования будущих поступлений остается постоянной, цена акции также возрастает с постоянной скоростью g, так что

$$P_1 = (1 + g)P_0.$$

Ставка дохода – это ставка дисконтирования, получаемая при решении уравнения (4.10) относительно r:

$$\text{Ставка дохода} = \frac{D_1 + \left[(1 - g)P_0 - P_0\right]}{P_0} = \frac{D_1 + gP_0}{P_0} = \frac{D_1}{P_0} + g\,. \qquad (4.14)$$

Из этого мы делаем следующий вывод: **в соответствии с моделью Гордона ставка дисконтирования будущих поступлений – это ставка дохода, получаемого владельцами акций.**

Хотя данное утверждение было подтверждено только в контексте продажи акции через год после ее приобретения, аналогичный вывод сохраняет свою актуальность для любого срока продажи. Это обусловлено тем, что приведенная стоимость не зависит от времени, когда происходит продажа, что иллюстрируется таблицей 4.1.

Инвесторы иногда называют требуемую ставку доходности *уровнем рыночной капитализации*. Согласно уравнению (4.14) уровень рыночной капитализации представляет собой сумму доходности, рассчитанной на основе дивиденда (D_1 / P_0), и темпа роста дивидендов (g), который в соответствии с моделью Гордона равен темпу роста цены акции.

Пример 4.2. Обыкновенная акция торгуется по цене 120 долл. Текущие дивиденды составляют 6 долл., с ожидаемым ежегодным ростом на 7 %. Какой уровень доходности предполагают инвесторы?

Используем обозначения уравнения (4.9): P_0 = 120 долл., g = 0,07, D_0 = 6 долл., D_1 = 6(1 + 0,07) = 6,42 долл. Подставив эти значения в уравнение (4.14), получим

$$r = \frac{6{,}42 \text{ долл.}}{1120 \text{ долл.}} + 0{,}07 = 0{,}1235\,.$$

Приемлемая для инвесторов годовая доходность равна 12,35 %.

Риск и требуемая доходность. Инвесторы, приобретающие обыкновенные акции, сталкиваются с различными рисками, что обуславливает их стремление к более высокой доходности по сравнению с безрисковыми активами. К основным аспектам относятся:

1. В ситуации банкротства корпорации акционеры занимают более низкую позицию по сравнению с держателями облигаций в порядке удовлетворения требований. Поэтому акционеры подвергаются большему риску убытков, чем облигационеры.

2. В условиях общего повышения процентных ставок приведенная стоимость ожидаемых дивидендов становится менее привлекательной для инвесторов. Это приводит к увеличению доходности при неизменных условиях и снижению цен на акции. Таким образом, общее увеличение рыночной процентной ставки влечет за собой риск убытков или меньшего, чем ожидалось, роста капитала.

3. При покупке акций невозможно с полной уверенностью оценить размер будущих дивидендов или темп их роста. Если в результате неэффективного управления или неблагоприятной экономической ситуации инвесторам приходится пересматривать свои ожидания в отношении дивидендов, это приводит к снижению приведенной стоимости акций, что также создает риск утраты капитала.

Таким образом, ожидаемая инвесторами доходность по обыкновенным акциям учитывает все возможные риски, связанные с инвестициями.

Модели переменного роста дивидендов предполагают наличие двух и более этапов в жизни корпорации, отличающихся схемами выплат дивидендов. Приведем примеры подобных моментов.

Пусть модель включает два этапа. Первый этап состоит из фиксированного числа $T < \infty$ периодов владения, начиная с текущего момента времени, второй этап – весь остальной срок обращения акций. Предполагается, что $D_1 = D_2 = \ldots = D_T$ – заданные прогнозные значения дивидендов для первых T периодов владения. На втором этапе ожидается изменение дивидендов в соответствии с моделью постоянного роста дивидендов и темпом прироста g:

$$D_{T+t} = D_{T+t-1}(1+g) = D_T(1+g)^t, \quad t = 1, 2, \ldots$$

Модель переменного роста дивидендов. Для определения текущей стоимости акции V на основе модели переменного роста дивидендов (4.2) применим метод дисконтирования платежей.

Введем обозначения V^- – текущая стоимость платежей по акции за первые T периодов; V^+ – текущая стоимость платежей по акции за оставшийся спустя T периодов срок обращения. Тогда текущая стоимость акции будет равна $V = V^- + V^+$. Величина V^- определяется как текущая стоимость актива с фиксированным потоком платежей, примером которого является купонная облигация. Поэтому, согласно (4.1), имеем

$$V^- = \sum_{t=1}^{T} \frac{D_t}{(1+R)^t}, \tag{4.15}$$

где R – ожидаемая доходность активов с сопоставимым риском.

Для нахождения V^+ вычислим вначале текущую стоимость акции V_T в предположении, что текущим моментом является момент T и имеет место модель постоянного роста дивидендов. Согласно уравнению (4.16)

$$V_T = \sum_{t=T+1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+R)^t} = \frac{D_{T+1}}{R-g}. \tag{4.16}$$

Величину V_T можно интерпретировать как единовременное поступление, равноценное потоку платежей после периода T (например, как финальную выплату по T-периодной облигации). Поэтому для нахождения ее текущей стоимости к найденному значению V_T вида (4.16) следует применить процедуру дисконтирования:

$$V^+ = \frac{V_T}{(1+R)^T} = \frac{D_{T+1}}{(R-g)(1+R)^T}. \tag{4.17}$$

На основании формул (4.12), (4.14) и соотношения $V = V^- + V^+$ получаем выражение для текущей стоимости акции в соответствии с моделью переменного роста дивидендов:

$$V = \sum_{t=1}^{T} \frac{D_t}{(1+R)^t} + \frac{D_{T+1}}{(R-g)(1+R)^T}.$$

4.4 Оценка привилегированных акций

Большинство привилегированных акций дают акционеру право на неопределенно длительное получение фиксированных дивидендных выплат. Величина выплат не может расти, поэтому выражение $(1 + g)$ изымается из модели оценки. Обозначив годовой дивиденд через D_0, а требуемый уровень доходности через r, можно в уравнение (4.1) подставить $D_0 = D$, для $t = 1, 2, 3, ...$, и тогда мы получим уравнение оценки привилегированных акций:

$$P_0 = D_0 \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t} = \frac{D_0}{r}. \tag{4.18}$$

Пример 4.3. Привилегированная акция, приносящая ежегодно по 5 долл. дохода, продается за 52 долл. Найдите доходность, требуемую инвесторами по этой акции.

Примем P_0 = 52 долл. и D_0 = 5 долл. Поскольку по уравнению (4.18)

$$r = \frac{D_0}{P_0},$$

то требуемый уровень доходности равен

$$r = \frac{5}{52} = 0{,}0962.$$

Следовательно, инвесторы требуют от этих привилегированных акций доходности 9,62 % в год.

4.5 Прибыль на акцию и оценка акций

Когда финансовые издания анализируют перспективы изменения курсов акций, внимание уделяется не только размеру дивидендов, но и прибыли на акцию (earnings per share). Данные о доходах отражают бухгалтерскую прибыль (accounting earnings) и включают как чистый финансовый доход, так и нереализованные прибыли и убытки, т. е. элементы, которые существуют лишь в учетной системе.

Одной из сложных задач при интерпретации финансовых показателей компании является необходимость учета выбранной методологии бухгалтерского учета. Например, показатели прибыли за отчетный период могут значительно изменяться в зависимости от применяемых методов расчета амортизации, учета затрат или подходов к налоговым обязательствам. Одним из основных ограничений бухгалтерских данных является их неспособность полностью отразить динамику стоимости компании, которая может изменяться под воздействием будущих инвестиционных возможностей, способных принести доходы в долгосрочной перспективе.

В отличие от этого экономические доходы (economic earnings) предлагают более широкую концепцию, поскольку они учитывают не только текущие результаты деятельности, но и будущие выгоды от новых проектов и вложений. Хотя их расчет может представлять определенные сложности, именно экономические доходы являются ключевым объектом внимания финансовых рынков, стремящихся к объективной оценке стоимости акций и активов компании.

Бухгалтерские доходы иногда используются как заменитель (прокси) для экономических доходов, однако их точность и репрезентативность могут значительно уступать последним, что создает потенциальные риски для инвесторов при анализе финансовой информации на основе лишь бухгалтерских данных. Экономическая оценка компании, таким образом, требует более глубокого анализа и прогноза будущих финансовых потоков, нежели просто опоры на стандартные учетные показатели.

Для формирования будущих доходов корпорация реинвестирует часть своей нераспределенной прибыли, а оставшаяся доля используется для выплаты дивидендов акционерам. Проанализируем, как инвестиции в производственные активы и распределение прибыли между дивидендами и реинвестициями влияют на стоимость компании. Для этого введем следующие обозначения: P_t – стоимость акции в году t; D_t – дивиденд на акцию в году t; E_t – прибыль на акцию в году t.

Некоторые ключевые финансовые показатели можно определить следующим образом:

– коэффициент реинвестирования (retention ratio) – доля прибыли, направляемая на реинвестиции: $b = (E - D) / E$;

– коэффициент выплаты дивидендов (payout ratio) – доля прибыли, выплачиваемая в виде дивидендов: $1 - b = D / E$;

– доходность на капитал (return on equity) – рентабельность производственных вложений k.

Рассмотрим частный случай, при котором все доходы выплачиваются в виде дивидендов, т. е. реинвестирование отсутствует, а темпы роста равны нулю. В этом случае, используя модель Гордона, можно выразить приведенную стоимость акции следующим образом:

$$P_0 = \frac{E}{r},$$

где r – требуемая норма доходности, которую можно выразить через отношение прибыли на акцию к текущей рыночной стоимости акции:

$$r = \frac{E}{P_0}.$$

Следовательно, уровень рыночной капитализации компании определяется отношением ее прибыли на акцию к рыночной цене этой акции. Это показывает, что без реинвестирования стоимость акций напрямую зависит от текущей прибыли, выплачиваемой в виде дивидендов, и требуемой доходности инвесторов.

Рассмотрим более распространенную ситуацию, когда корпорация удерживает часть своей прибыли для целей реинвестирования. Обозначим долю прибыли, направляемую на реинвестиции, через b. Если данное соотношение сохраняется неизменным с течением времени, тогда дивиденды на акцию D_t можно выразить через прибыль на акцию E_t следующим образом:

$$D_t = (1 - b)E_t.$$

Предположим, что доходность производственных инвестиций составляет k. Теперь проследим, как будут изменяться показатели прибыли и дивидендов на акцию в течение нескольких лет.

Год 1-й. Корпорация получает прибыль E, выплачивает дивиденды в размере $(1 – b)E$, а на реивестирование направляет bE.

Год 2-й. Поскольку реинвестированная прибыль приносит доходность k, общая прибыль корпорации за второй год составит $E + kbE$, или $(1 + kb)E$. Соответственно, выплаченные дивиденды составят $(1 – b)(1 + kb)E$, а на реинвестирование будет выделено $b(1 + kb)E$.

Год 3-й. К этому моменту общая прибыль увеличится до $E + kbE + kb(1 + kb)E = (1 + kb)^2 E$. Таким образом, дивиденды, выплаченные в третий год, составят $(1 – b) (1 + kb)^2E$, а на реинвестирование будет направлено $b(1 + kb)^2E$.

Данная схема демонстрирует, как реинвестирование части прибыли позволяет компании увеличивать свою прибыль на акцию и дивиденды на акцию с течением времени. В этой модели доходность производственных инвестиций k напрямую влияет на темпы роста показателей прибыли и дивидендов, что также иллюстрируется в таблице изменения прибыли на акцию, дивидендов и реинвестируемой прибыли за несколько периодов.

Таким образом, динамика финансовых показателей акций в условиях реинвестирования прибыли показывает, что рост дивидендов и прибыли на акцию во многом зависит от доходности производственных вложений и доли реинвестируемой прибыли (таблица 4.3).

Таблица 4.3 – Динамика показателей прибыли на акцию

Год	Прибыль на акцию	Дивиденд на акцию	Нераспределенная прибыль на акцию
1-й	E	$(1 – b)$E	bE
2-й	$(1 + kb)E$	$(1 – b)(1 + kb)E$	$b(1 + kb)E$
3-й	$(1 + kb)^2E$	$(1 – b)(1 + kb)^2E$	$b(1 + kb)^2E$
4-й	$(1 + kb)^3E$	$(1 – b)(1 + kb)^3E$	$b(1 + kb)^3E$
5-й	$(1 + kb)^5E$	$(1 – b)(1 + kb)^4E$	$b(1 + kb)^4E$
6-й	$(1 + kb)^5E$	$(1 – b)(1 + kb)^5E$	$b(1 + kb)^5E$

Продолжая анализ реинвестирования нераспределенной прибыли корпорации, можно отметить, что дивидендные выплаты демонстрируют стабильную динамику увеличения с постоянным темпом роста $g = kb$, где k – это доходность реинвестиций, а b – доля прибыли, направленная на реинвестирование. Данный показатель отражает устойчивый рост дивидендов на акцию за счет увеличения доходов от реинвестированных средств.

Используя этот факт, мы можем перейти к формулировке текущей стоимости акции, основываясь на методе дисконтирования будущих дивидендных потоков. В контексте модели постоянного роста дивидендов и с учетом показателя рыночной капитализации r, определяемого как требуемая доходность инвесторов, приведенная стоимость акции P_0 рассчитывается следующим образом:

$$P_0 = \frac{D_1}{r-g} = \frac{(1-b)E}{r-kb},$$

где D_1 – ожидаемый дивиденд в следующем периоде;

r – требуемая норма доходности на капитал;

g – темп роста дивидендов.

Эта формула выводится из предположения о постоянном росте дивидендов и отражает зависимость текущей стоимости акции от ожидаемых будущих выплат, доходности реинвестиций и предпочтений инвесторов в отношении доходности (ставки дисконтирования). Таким образом, повышение доли реинвестируемой прибыли b при условии высокой доходности k способствует увеличению темпа роста дивидендов и, следовательно, повышению текущей рыночной стоимости акций.

Используя алгебраические преобразования, можем получить следующее выражение:

$$P_0 = \frac{E}{r} + \frac{b(k-r)E}{r-kb} \cdot \frac{E}{r}. \tag{4.19}$$

Когда доходность производственных инвестиций совпадает с процентной ставкой, по которой инвесторы дисконтируют ожидаемые будущие доходы, приведенная стоимость акций остается неизменной, независимо от доли нераспределенной прибыли. В этом контексте уравнение (4.19) принимает вид, характеризующий ситуацию, в которой все доходы идут на выплаты дивидендов и отсутствует рост доходов компании.

4.6 Примеры решения задач

Задача 4.1. Обыкновенные акции предприятия «Ф» продаются по 25,00. В конце периода $t=1$ ожидаются выплаты дивидендов в размере 2,00. Требуемая инвестором доходность составляет 12 %.

а) Определите стоимость акции, если ожидается, что в следующие 3 года дивиденды будут расти на 12 % в год, на 4-й и 5-й год – на 11 %, а начиная с 6-го – на 5 %.

б) Изменит ли текущую стоимость акции предположение о ее продаже к концу 5-го года? Подкрепите выводы соответствующими расчетами.

Решение:

а) Рассчитаем стоимость акции:

$$V = V_T + V_{T+1} = \sum_{t=1}^{T} \frac{DIV_t}{(1+r)^t} + \frac{DIV_{T+1}}{(r-g)(1+r)^T},$$

где $DIV_t = DIV_t - 1(1+g)$ – дивиденды в период t;

r – требуемая доходность.

$$V = \frac{2}{(1+0{,}12)} + \frac{2\cdot(1+0{,}12)}{(1+0{,}12)^2} + \frac{2\cdot(1+0{,}12)^2}{(1+0{,}12)^3} + \frac{2\cdot(1+0{,}12)^3}{(1+0{,}12)^4} + \frac{2\cdot(1+0{,}12)^3(1+0{,}11)}{(1+0{,}12)^5} +$$

$$+ \frac{2\cdot(1+0{,}12)^3(1+0{,}11)^2}{(1+0{,}12)^6} + \frac{2\cdot(1+0{,}12)^3(1+0{,}11)^2(1+0{,}05)}{(0{,}12-0{,}005)(1+0{,}12)^6} = 36{,}62.$$

б) Рассчитаем, изменит ли текущую стоимость акции предположение о ее продаже к концу 5-го года:

$$V = \sum_{t=1}^{T} \frac{DIV_t}{(1+r)^t} + \frac{P_1}{(1+r)^T},$$

где P_1 – цена акции на начало периода t = 1;

$\dfrac{P_1}{(1+r)^T}$ – дисконтированная цена акции, так как не предполагается направлять прибыль на развитие предприятия и увеличение акционерного капитала.

$$V = \frac{2}{(1+0{,}12)} + \frac{2\cdot(1+0{,}12)}{(1+0{,}12)^2} + \frac{2\cdot(1+0{,}12)^2}{(1+0{,}12)^3} + \frac{2\cdot(1+0{,}12)^3}{(1+0{,}12)^4} + \frac{25}{(1+0{,}12)^5} = 21{,}36\ .$$

Таким образом, предположение о продаже к концу 5-го года акции изменит ее текущую стоимость, и она составит 21,36, что на 3,64 меньше, чем продажная цена $P_1 = 25$.

Задача 4.2. Корпорация удерживает для реинвестирования 60 % дохода, и ожидается, что так будет и впредь. Есть мнение, исходящее из прежних значений показателя доходности активов, что годовая доходность инвестиций составит 18 %. На следующий год прогнозируется прибыль на акцию в размере 10 долл. Если рынок дисконтирует будущие доходы по ставке 15 % годовых, то:

1) Какова приведенная стоимость этих акций?

2) На какую скорость роста дивидендов на акцию можно рассчитывать?

Примем обозначения: $b = 0{,}60$; $k = 0{,}18$; $E = 10$ долл.; $r = 0{,}15$.

Приведенная стоимость составит

$$P_0 = \frac{10}{0{,}15} + \frac{0{,}60(0{,}18 - 0{,}15)}{0{,}15 - 0{,}18 \cdot 0{,}6} \cdot \frac{10}{0{,}15} = 95{,}24 \text{ долл.}$$

Итак, приведенная стоимость акции составляет 95,24 долл. Наконец, ожидаемая скорость увеличения дивидендных выплат равна

$$g = kb = 0{,}18 \cdot 0{,}60 = 0{,}108,$$

что означает годовой рост на 10,8 %, а дивиденд на акцию в будущем году должен составить 4 долл. на акцию [(1 – 0,60) ·10]. Величина текущей доходности акций (dividends yield) должна составить

$$\frac{4 \text{ долл.}}{95{,}24 \text{ долл.}} = 0{,}042,$$

или 4,2 %. Здесь, как и всегда в модели Гордона, ожидается, что цена акции растет на 10,8 % в год, с той же скоростью, что и величина дивиденда на акцию. Отсюда следует, разумеется, что сумма текущей доходности акций и скорости роста цены акции равна показателю рыночной капитализации, т. е. 15 %.

4.7 Задачи для самостоятельной работы

1. Предложите свою задачу, в которой используется модель переменного роста дивидендов. Решите ее при конкретных исходных данных.

2. Предложите свою задачу, в которой используется модель постоянного роста дивидендов. Решите ее при конкретных исходных данных.

Тема 5. Оптимизация портфеля ценных бумаг

5.1 Портфель ценных бумаг и его характеристики

Для целей получения дохода многие организации, такие как банки и инвестиционные фонды, а также частные лица приобретают различные финансовые активы, включая акции, облигации и депозитные вклады. Основной целью таких инвестиций является получение дохода в виде процентов, дивидендов или прироста капитала. Процесс распределения инвестиций между различными финансовыми активами называется диверсификацией (diversification), а совокупность этих активов в рамках одной стратегии носит название инвестиционного портфеля (portfolio).

Инвестиционный портфель представляет собой набор финансовых инструментов, сформированный на основе определенных инвестиционных целей и стратегии. Структура портфеля характеризуется распределением активов между различными видами ценных бумаг, такими как акции, облигации, деривативы и другие финансовые инструменты. В зависимости от стратегии различают несколько типов портфелей:

– односторонние (целевые) – портфели, которые сосредоточены на одной инвестиционной цели или классе активов;

– сбалансированные – портфели, в которых акценты расставлены на достижении нескольких целей одновременно (например, на росте капитала и обеспечении стабильного дохода).

Цели формирования инвестиционного портфеля могут быть разнообразными, однако чаще всего они сводятся к следующим ключевым аспектам:

– доходность – стремление получить регулярные денежные потоки от инвестиций, таких как дивиденды или купоны;

– сохранение капитала – защита имеющихся активов от инфляционных потерь или рыночных рисков;

– рост капитала – увеличение стоимости портфеля за счет повышения рыночной стоимости активов, таких как акции, чья цена имеет тенденцию к росту при благоприятных экономических условиях.

Выбор ценных бумаг и их пропорциональное распределение внутри портфеля зависят от множества факторов, включая инвестиционные цели, допустимый уровень риска и прогнозируемую доходность каждого инструмента.

Для получения прибыли различные организации, такие как банки и инвестиционные фонды, а также частные инвесторы, часто вкладываются в разнообразные ценные бумаги, включая акции, облигации или, как крайний вариант, делают банковские депозиты с целью получения процентного дохода и приумножения капитала. Практика приобретения различных видов активов для снижения рисков и увеличения потенциала доходности называется **диверсификацией** (diversification), а структурированный набор активов – **инвестиционным портфелем** (portfolio). Ключевой задачей в создании такого портфеля является определение оптимального состава и объема ценных бумаг.

Инвестиционный портфель представляет собой структурированную комбинацию различных типов активов, сформированных по определенной стратегии. Структура портфеля – это соотношение разных видов бумаг в нем. Существуют следующие основные типы инвестиционных портфелей:

– целевой направленности;

– сбалансированные по различным финансовым целям.

Цели формирования портфелей могут варьироваться и включать:

1) обеспечение текущего дохода;

2) сохранение капитала;

3) капиталовложения, направленные на увеличение стоимости активов за счет роста их курсовой стоимости (таблица 5.1).

Таблица 5.1 – Классификация портфелей ценных бумаг

Классификация ЦБ	Виды
1	2
По целям	- получение дохода; - прирост капитала; - сохранение капитала
По характеру	- консервативный; - агрессивный; - бессистемный
По составу	- фиксированный - меняющийся
По виду ценных бумаг	- однопрофильные (одного вида); - многопрофильные (разных видов)

Продолжение таблицы 5.1

1	2
По срокам действия ценных бумаг	- краткосрочные; - среднесрочные; - долгосрочные
По территориальному признаку	- иностранных ценных бумаг; - отечественных ценных бумаг; - региональных ценных бумаг
По отраслевой принадлежности	- специализированные; - комплексные

Портфели ценных бумаг различаются по своим характеристикам и уровням риска, что обусловливает их назначение в инвестиционной стратегии. Рассмотрим три основные категории инвестиционных портфелей:

– консервативный портфель (или сбалансированный). Этот тип портфеля формируется из финансовых инструментов с минимальным уровнем риска, таких как государственные облигации или стабильные акции крупных компаний. Основная цель данного подхода заключается в сохранении капитала и минимизации рисков при относительно низком уровне доходности. Такой портфель выбирают инвесторы, ориентированные на надежность и стабильность вложений;

– агрессивный портфель. Этот вид портфеля формируется из ценных бумаг с высоким уровнем риска, таких как акции быстрорастущих компаний или спекулятивные инвестиции. Основная цель такого подхода – максимизация доходности, что сопряжено с высокой вероятностью колебаний стоимости активов. Агрессивный портфель подходит для инвесторов, готовых к существенным рисковым факторам в обмен на потенциально высокий доход;

– бессистемный портфель. В данном случае активы выбираются случайным образом, без применения определенной стратегии или анализа рисков и доходности. Инвестирование в такой портфель часто является неуправляемым и может привести к непредсказуемым результатам. Отсутствие структуры в распределении активов делает этот тип портфеля менее подходящим для долгосрочных инвестиций.

Теперь рассмотрим конкретный пример формирования портфеля ценных бумаг.

Пример 5.1. Предприятие создает диверсифицированный портфель, включающий:

– 20 % облигаций государственного сберегательного займа;

– 15 % обыкновенных акций ОАО «Межрегионгаз»;

– 15 % привилегированных акций коммерческих банков и страховых компаний;

– 20 % депозитных сертификатов коммерческих банков;

– 30 % корпоративных облигаций ОАО «Нефтепродукты».

В данном портфеле акции занимают 30 %, из которых 15 % приходится на обыкновенные акции, являющиеся высокорискованным, но более доходным активом, и 15 % – на привилегированные акции, обеспечивающие фиксированный дивиденд и право на долю активов компании в случае ее ликвидации. Остальная часть портфеля состоит из долговых инструментов, таких как государственные и корпоративные облигации (всего 50 %) и депозитные сертификаты (20 %), которые отличаются меньшей доходностью, но при этом более низким риском.

Таким образом, данный портфель представляет собой *сбалансированную* инвестиционную стратегию с элементами как сохранения капитала (70 % в долговых инструментах), так и роста (30 % в акциях). Это сочетание делает портфель подходящим для инвесторов, предпочитающих умеренный риск и стабильный доход.

Рассмотрим вторую ситуацию. В портфеле данного предприятия представлены акции компаний, занимающихся добычей, транспортировкой и реализацией нефтепродуктов, а также акции предприятий, производящих химические продукты на основе этих нефтепродуктов. Такой финансовый портфель можно охарактеризовать как агрессивный и высокорискованный. Все эмитенты представляют собой звенья одной технологической цепи, охватывающей добычу, транспортировку, переработку и продажу нефти и нефтепродуктов. Банкротство одного из этих предприятий может привести к серьезным последствиям для остальных участников цепочки, что, в свою очередь, несет риск потери вложенных средств для инвесторов.

Портфель ценных бумаг представляет собой комбинацию различных активов, созданную для достижения определенных целей, таких как обеспечение гарантированной доходности инвестиций. В состав этого портфеля должны входить как надежные, но менее доходные, так и более рискованные, но потенциально более прибыльные бумаги, эмитируемые разными компаниями из различных отраслей. Такой портфель может быть ориентирован либо на безопасность (консервативный), либо на высокую доходность (агрессивный). Портфели ценных бумаг можно классифицировать на фиксированные и изменяемые. Фиксированные портфели сохраняют свою структуру на протяжении определенного времени, который определяется сроками погашения входящих в них активов. В отличие от них изменяемые или управляемые портфели имеют гибкую структуру, позволяя постоянно обновлять состав ценных бумаг с целью максимизации экономической эффективности.

Имеются специализированные портфели, в состав которых входят иностранные и отечественные ценные бумаги. Первый тип портфелей фокусируется на определенных странах или целых регионах, преимущественно развивающихся, что помогает уменьшить риски, связанные с каждой отдельной страной. Эти портфели предоставляют зарубежным инвесторам возможность исследовать новые рынки с относительно низким уровнем риска и быстро избавляться от местных акций при необходимости.

5.2 Механизм формирования

Принципы формирования инвестиционного портфеля играют ключевую роль в разработке стратегии управления активами. Они включают следующие аспекты:

– безопасность – это минимизация риска потерь капитала. Инвестор стремится выбрать такие ценные бумаги, которые обеспечивают надежность вложений;

– доходность – потенциал ценных бумаг генерировать доход, будь то в виде дивидендов, процентных выплат или прироста капитала;

– ликвидность – способность активов быть быстро проданными без значительных потерь стоимости, что важно для гибкости управления портфелем;

– рост капитала – это долгосрочное увеличение стоимости активов в портфеле за счет повышения рыночных котировок ценных бумаг.

Этапы формирования портфеля включают последовательные шаги, направленные на создание сбалансированного и эффективного портфеля. Основные этапы:

1) Выбор типа портфеля: определение основной цели инвестирования, будь то получение стабильного дохода или прирост капитала. Это включает анализ предпочтений инвестора по отношению к риску и доходности.

2) Оценка портфельного риска: анализ и оценка степени подверженности рискам различных активов, включаемых в портфель. Это необходимо для балансировки доходности и надежности вложений.

3) Моделирование структуры портфеля: распределение активов по различным классам, таким как акции, облигации или другие инструменты, с учетом целей и предпочтений инвестора.

4) Оптимизация структуры портфеля: процесс регулярной корректировки состава активов для достижения максимальной доходности при минимальном уровне риска.

Основной задачей инвестора является достижение оптимального баланса между риском и доходностью, что предполагает постоянный контроль за рыночной ситуацией и корректировку структуры портфеля.

Классификация инвесторов в мировой практике является более детализированной, что позволяет учитывать их различный подход к риску:

– консервативные инвесторы – предпочитают минимальные риски и стабильные доходы, часто выбирают долговые инструменты;

– умеренно агрессивные инвесторы – готовы к определенному риску, ориентируясь на сбалансированный рост капитала и доходов;

– агрессивные инвесторы – активно инвестируют в высокорискованные активы, стремясь к высокой доходности;

– опытные инвесторы – имеют глубокое понимание рынков и стремятся к оптимальному сочетанию риска и доходности с использованием сложных финансовых инструментов;

– изощренные инвесторы – это профессионалы, которые используют сложные стратегии управления активами и стремятся к максимальной выгоде за счет глубокого анализа и использования инновационных решений.

Таким образом, формирование инвестиционного портфеля требует тщательного анализа и расчета для выбора наиболее эффективной стратегии с учетом индивидуальных характеристик инвестора.

Принципами формирования портфеля ценных бумаг являются:

1) безопасность;

2) доходность;

3) ликвидность;

4) рост капитала.

Обычно главная цель инвестора при формировании портфеля ценных бумаг – это достижение оптимального соотношения между риском и доходом.

Основные типы инвесторов показаны в таблице 5.2.

Консервативные инвесторы фокусируются на сохранности капитала и минимизации риска своих вложений. Их основная задача – защита инвестированных средств, что достигается за счет выбора стабильных активов с предсказуемой доходностью. Умеренно агрессивные инвесторы, в отличие от консервативных, стремятся не только к сохранению капитала, но и к получению умеренного дохода, балансируя между риском и вознаграждением. Агрессивные инвесторы проявляют высокую толерантность к риску, их стратегия направлена на значительное увеличение капитала за счет инвестиций в более волатильные и потенциально доходные активы.

Таблица 5.2 – Основные типы инвесторов

Тип инвестора	Цели инвестирования
Консервативные	Безопасность вложений
Изощренные	Безопасность вложений + Доходность
Умеренно агрессивные	Доходность + Рост вложений
Агрессивные	Доходность + Рост вложений + Ликвидность
Опытные	Максимальная доходность

Опытные инвесторы обычно учитывают не только доходность, но и ликвидность активов, чтобы иметь возможность быстро реагировать на изменения рынка, обеспечивая доступ к капиталу без значительных потерь. Изощренные инвесторы идут дальше, стремясь к максимальной доходности через использование сложных стратегий и инструментов, таких как производные финансовые инструменты и активное управление портфелем.

Для снижения инвестиционных рисков портфельные инвесторы придерживаются принципа диверсификации, что предполагает распределение средств между активами разных эмитентов. Это позволяет минимизировать влияние негативных событий, связанных с отдельными компаниями или секторами экономики. В случае акций промышленных предприятий часто используется отраслевая диверсификация, что снижает зависимость от динамики одной отрасли. Взаимные фонды денежного рынка, которые инвестируют в краткосрочные ценные бумаги, также применяют диверсифицированный подход, включающий широкий спектр активов, таких как государственные облигации, краткосрочные ценные бумаги муниципалитетов и сертификаты участия других финансовых институтов.

Управление диверсифицированным портфелем требует постоянного мониторинга и своевременной коррекции его структуры. Это подразумевает активную работу с ценными бумагами, в том числе продажу активов, демонстрирующих негативную динамику. Например, если акции компании начинают терять в стоимости, важно быстро продать их, заменив на более перспективные активы. В условиях неопределенности на рынке акций инвесторам может быть выгодно переводить капитал в облигации, которые обычно характеризуются более стабильной доходностью и меньшей волатильностью.

Таким образом, поддержание сбалансированного и эффективного портфеля предполагает не только начальное распределение активов, но и регулярные корректировки в зависимости от изменения рыночной ситуации, что позволяет снижать риски и повышать доходность.

Консервативные инвесторы фокусируются на максимальной безопасности своих вложений, стремясь минимизировать возможные потери капитала. Умеренно агрессивные инвесторы ставят задачу не только сохранить средства, но и получать умеренный доход. В отличие от них агрессивные инвесторы стремятся к значительному увеличению капитала, принимая на себя более высокие риски для достижения значительной прибыли. Опытные инвесторы ориентированы на получение дохода при одновременном наращивании капитала и сохранении ликвидности активов, т. е. возможности быстрой продажи ценных бумаг при необходимости. Инвесторы с высокими амбициями нацелены на максимизацию доходности своих вложений.

Для обеспечения стабильности портфеля ценных бумаг инвесторы часто ограничивают долю активов одного эмитента, что помогает снизить риск концентрации. При инвестициях в акции промышленных предприятий также широко применяется отраслевое распределение вложений. Взаимные фонды денежного рынка, ориентированные на краткосрочные инструменты частных и государственных эмитентов, осуществляют диверсификацию, комбинируя государственные облигации, краткосрочные бумаги муниципалитетов и сертификаты участия в капитале других инвестиционных фондов.

Эффективное управление диверсифицированным портфелем предполагает регулярный пересмотр его структуры и корректировку состава активов для поддержания его рыночной стоимости и прибыльности. Например, если акции компании «Автомобиль» в портфеле начинают падать в цене, их следует оперативно заменить на более стабильные или растущие активы. В условиях неопределенности в движении курсов акций может быть целесообразно их продать и приобрести облигации, имеющие более предсказуемую стоимость.

5.3 Стратегия управления портфелем ценных бумаг

Портфельные стратегии, разрабатываемые в процессе формирования портфелей ценных бумаг, представляют собой четко определенные направления, нацеленные на достижение конкретных инвестиционных целей, установленных инвестором. В основном такие стратегии разрабатываются инвестиционными фондами и профессиональными управляющими компаниями, которые действуют как институциональные инвесторы на рынке ценных бумаг.

Важно отметить, что инвестиционные компании и фонды, как правило, не предоставляют своим клиентам гарантии получения фиксированного дохода. Их основная задача заключается в профессиональном управлении капиталом с целью достижения максимальной доходности при разумном уровне риска. Тем не менее инвесторы не получают твердых гарантий относительно уровня будущих доходов. В этой связи вкладчики могут выбирать среди различных портфелей ценных бумаг, которые предлагают различные фонды, что позволяет им адаптировать свои инвестиционные стратегии в зависимости от личных предпочтений и рисковых аппетитов. Каждый портфель может включать различные классы активов, что помогает оптимизировать соотношение между риском и доходностью в соответствии с финансовыми целями инвестора.

В зависимости от проводимой инвестиционной стратегии фонды и компании можно условно классифицировать на несколько категорий:

– фонды, инвестирующие капитал в ценные бумаги с ограниченными рисками колебаний их стоимости;

– фонды, ориентированные на увеличение прибыли при высоком риске колебаний курсов ценных бумаг;

– фонды, осуществляющие диверсификацию финансовых активов;

– фонды, специализирующиеся на капитализации процентных ставок на денежном рынке.

Первая группа включает в себя инвестиционные компании и фонды, которые преимущественно приобретают государственные, муниципальные и корпоративные облигации. Эти финансовые инструменты считаются наиболее безопасными на западном фондовом рынке, что делает их привлекательными для консервативных инвесторов, стремящихся минимизировать риски. Как правило, комиссии у таких компаний невысоки: плата за подписку не превышает 4 %, а управление ценными бумагами осуществляется за счет комиссионных в диапазоне от 0,25 до 0,60 %.

Во вторую группу входят инвестиционные компании, сосредоточенные на долгосрочных вложениях в акции, конвертируемые облигации и производные финансовые инструменты, такие как опционы на фондовые индексы и варранты. Эти организации обслуживают клиентов, которые готовы принимать повышенный уровень риска в обмен на потенциально более высокую доходность. Комиссионные сборы в данной категории, как правило, выше, подписка может достигать 6 %, а управление – до 1,5 %. Примеры таких компаний включают американские объединенные инвестиционные трасты и управляющие фирмы, предлагающие клиентам различные инвестиционные решения.

Третья группа состоит из компаний и фондов, которые применяют стратегию диверсификации своих долгосрочных инвестиций по различным видам ценных бумаг. Этот подход служит надежным методом ограничения риска потери капитала, однако для его успешной реализации необходим значительный капитал. Уровень комиссионных в этой группе находится на среднем уровне: подписка составляет не более 5 %, а управление – около 1 %.

Четвертую группу составляют компании, специализирующиеся на управлении активами с учетом колебаний процентных ставок на денежном рынке, включая ранее упомянутые взаимные фонды денежного рынка. Эти организации занимаются краткосрочными инвестициями, в том числе однодневными сделками, что значительно снижает риск потерь капитала. Клиентами таких компаний являются как частные инвесторы, стремящиеся к более высоким процентным ставкам по своим сбережениям, так и корпоративные клиенты, которые хотят эффективно разместить свободные средства. Обычно в этой ситуации комиссии за подписку не взимаются, поскольку речь идет о краткосрочных вложениях, что делает такие инвестиции особенно привлекательными для тех, кто не готов к длительному ожиданию доходности.

Для снижения инвестиционных рисков важно учитывать различные факторы, среди которых ключевыми являются доходность, уровень налогообложения и срок финансовых вложений. Принцип равенства доходности предполагает, что прибыльность различных вариантов инвестирования должна быть сопоставима. В противном случае начнется активная скупка более доходных активов, что приведет к притоку капитала в одни отрасли в ущерб другим.

Инвестиционные компании и фонды формируют свои стратегии на основе определенных целевых установок, которые варьируются в зависимости от типа инвесторов. Эти цели могут включать получение стабильного текущего дохода или дивидендов, а также увеличение стоимости ценных бумаг и вложенного капитала. В некоторых случаях возможно комбинирование этих целей для достижения оптимального результата. При разработке инвестиционной стратегии необходимо учитывать так называемое золотое правило инвестирования, согласно которому доход от вложений прямо пропорционален риску, на который готов пойти инвестор для достижения желаемого результата. Эта связь между уровнем риска и ожидаемой нормой прибыли определяется следующим образом: минимально необходимая норма прибыли для инвестора равна норме безрисковых инвестиций плюс премия за риск, связанная с конкретными инвестициями.

Управление портфельными стратегиями осуществляется высококвалифицированными специалистами, известными как портфельные менеджеры. Эти профессионалы несут ответственность за формирование и поддержание устойчивого портфеля финансовых активов, а также за мониторинг его доходности на протяжении времени. Договор, заключаемый для управления портфелем, называется договором портфельного управления и регулирует все аспекты взаимодействия между клиентом и управляющей компанией. Такой договор позволяет инвесторам делегировать управление своими активами, что дает им возможность сосредоточиться на других аспектах финансового планирования, при этом доверяя профессионалам оптимизацию их инвестиционного процесса.

5.4 Методы управления портфелем ценных бумаг

Существуют два основных подхода к управлению портфелем ценных бумаг: пассивный и активный. Пассивный подход заключается в создании тщательно диверсифицированного портфеля с заранее определенным уровнем риска, который поддерживается в неизменном виде на протяжении длительного времени. Основные методы пассивного управления включают:

– диверсификацию;

– индексный подход (или зеркальный метод);

– поддержание портфеля.

Диверсификация означает включение в портфель различных ценных бумаг с разными характеристиками для снижения риска. Индексный метод заключается в том, что в качестве модели берется конкретный эталонный портфель, структура которого отражает определенные рыночные индексы, после чего этот портфель копируется. Однако использование данного метода может быть затруднено сложностью выбора подходящего эталона. Поддержание портфеля заключается в сохранении его структуры и характеристик на неизменном уровне. Однако это не всегда возможно из-за нестабильности на фондовых рынках, что вынуждает приобретать новые активы.

Активное управление портфелем, в отличие от пассивного, подразумевает регулярные операции с ценными бумагами и постоянный пересмотр состава портфеля. Основные черты активного подхода включают постоянное взаимодействие с финансовыми инструментами, анализ и корректировку портфеля для повышения его доходности.

Активное управление портфелем ценных бумаг включает ряд важных действий:

– отбор конкретных ценных бумаг;

– определение времени для покупки и продажи активов;

– регулярная ротация (свопинг) бумаг внутри портфеля;

– обеспечение чистого дохода.

Одновременно с изменением состава портфеля меняется и стоимость входящих в него активов. Это создает дополнительные сложности, связанные с приростом или сокращением капитала. В случае если доход от продажи ценных бумаг превышает их стоимость при покупке, происходит рост капитала. Эти дополнительные средства рекомендуется реинвестировать в новые активы. При этом важно поддерживать качество и структуру портфеля на высоком уровне. Учитывая высокую волатильность рынка ценных бумаг, возникает необходимость регулярной переоценки активов с учетом их текущей рыночной стоимости. Если бумаги не имеют котировок, их оценивают по номинальной или оценочной стоимости. Переоценка может проводиться как еженедельно, так и ежедневно, и за эту процедуру могут отвечать банк-депозитарий или портфельный менеджеруб.

5.5 Задача Марковица (определение структуры оптимального портфеля)

Гарри Марковиц, известный американский экономист, сыграл ключевую роль в развитии теории управления портфелем. В середине XX века он опубликовал статью под названием «Выбор портфеля», в которой рассмотрел взаимосвязь между риском, доходностью и корреляцией инвестиционных инструментов. Важнейший вывод, сделанный Марковицем, заключается в том, что оценка риска должна производиться для всего портфеля в целом, а не для каждого отдельного актива. Его работа стала основополагающей для создания современной портфельной теории, за что он был удостоен Нобелевской премии.

Ключевая концепция метода Марковица заключается в учете корреляции между активами. Корреляция измеряет степень взаимозависимости между доходностями двух активов. При идеальной положительной корреляции (равной +1) доходности активов изменяются в одинаковом направлении на протяжении всего времени. В случае идеальной отрицательной корреляции (равной –1) динамика их цен движется в противоположных направлениях. Активы могут иметь любые значения корреляции между этими двумя крайностями, от –1 до +1.

Взаимозависимость активов является важным элементом в управлении рисками. Например, если цены на нефть растут, акции нефтедобывающих компаний обычно повышаются в стоимости, что демонстрирует положительную корреляцию между этими активами. Однако для авиакомпаний, чья прибыль зависит от цен на топливо, рост стоимости нефти может привести к снижению акций, что иллюстрирует отрицательную корреляцию между акциями этих компаний и ценами на нефть. Таким образом, наличие активов с отрицательной корреляцией в портфеле помогает снижать совокупный риск.

Диверсификация – один из главных инструментов снижения рисков, что отражает известную рекомендацию не инвестировать все средства в один актив, каким бы надежным он ни казался. Размещение капитала в различных валютах, таких как рубли, евро и доллары, также способствует уменьшению рисков, связанных с колебаниями отдельных рынков. Чем больше активов в портфеле, тем выше степень его диверсификации и, соответственно, ниже риски.

Основной тезис теории Марковица заключается в том, что существует связь между доходностью и риском актива. Риск определяется как функция разброса доходностей за различные временные периоды. Согласно этому подходу в портфеле не должны присутствовать короткие позиции, что исключает спекулятивные элементы. Кроме того, доходность всего портфеля не может превышать максимальную доходность одного из его активов. Оптимально составленный портфель должен быть сбалансирован с точки зрения риска и доходности таким образом, чтобы стремиться к постоянному росту. Однако при этом некоторые активы в его составе могут временно терять в стоимости.

Наиболее эффективные комбинации активов, которые обеспечивают максимальную доходность при заданном уровне риска, называются эффективными портфелями. Эти портфели имеют уникальное свойство: их нельзя улучшить, не увеличив одновременно уровень риска.

На рисунке 5.1 кривая эффективных портфелей иллюстрирует максимально оптимальные сочетания инвестиционных инструментов с точки зрения соотношения риска и доходности. Особенностью этой кривой является то, что прирост доходности превышает сопутствующее увеличение риска. Например, инструмент В демонстрирует более высокую доходность по сравнению с инструментом Е, но сопровождается и большим риском. Однако инструмент А, при аналогичной доходности как у В, характеризуется еще более высоким уровнем риска. Таким образом, видно, что портфель, включающий инструменты Е и В, является более предпочтительным, чем портфели, сформированные из Е и А или В и А.

Кривая неэффективных портфелей отличается тем, что для них прирост риска превышает прирост доходности. Несмотря на это, такие портфели также могут рассматриваться в качестве возможных вариантов для инвесторов. Все портфели, расположенные между кривыми эффективных и неэффективных портфелей, составляют множество допустимых портфелей. Комбинации активов, выходящие за пределы этого множества, относятся к категории недопустимых портфелей и исключаются из дальнейшего анализа.

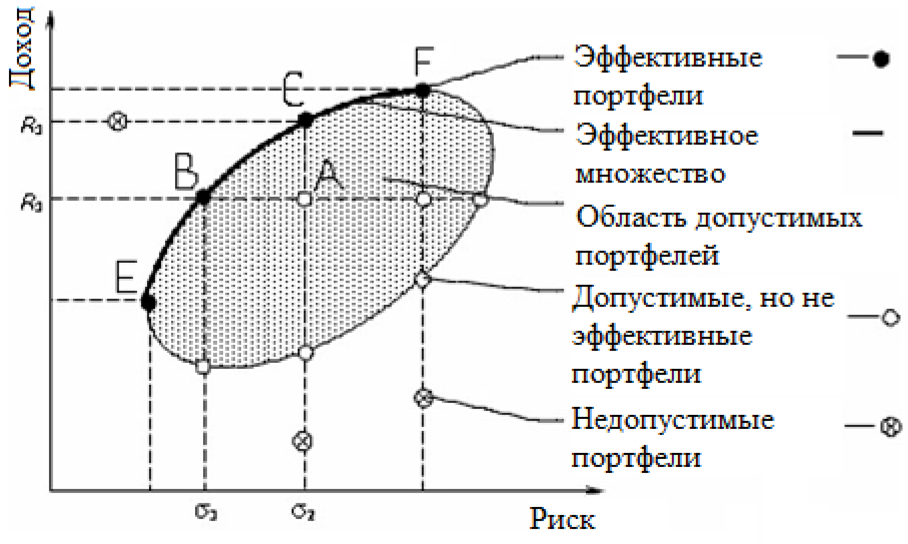


Рисунок 5.1 – Кривая эффективных портфелей

Слабые стороны теории Марковица. При восходящем рынке теория Марковица облегчает задачу инвестору, однако проблемы начинают проявляться, когда рынок меняет направление. Основной принцип пассивного управления капиталом «купить и держать» на падающем рынке может приводить к увеличению убытков. Математическое ожидание доходности определяется выбранным временным интервалом: чем он больше, тем медленнее это ожидание адаптируется к новым данным. Это похоже на использование скользящих средних с большим периодом, что приводит к задержке реакции на рыночные изменения.

Кроме того, теория Марковица не предоставляет инструментария для определения оптимальных моментов входа и выхода из позиции. В результате портфель необходимо регулярно пересчитывать, исключая активы, которые показывают падение. Поскольку короткие позиции исключены из подхода Марковица, на медвежьем рынке понятие «эффективного портфеля» может потерять свою актуальность. Также стоит учитывать, что прошлое поведение активов не гарантирует его повторения в будущем. В современных условиях активные или смешанные стратегии, которые объединяют элементы портфельной теории с техническим анализом, становятся более популярными, поскольку они позволяют быстрее реагировать на изменения на рынке.

Инвестиционные портфели, характеризующиеся минимальными рисками при заданной доходности или максимальной доходностью при определенном уровне риска, называют эффективными. Формирование эффективного портфеля сводится к тому, чтобы определить оптимальные доли капитала, которые необходимо распределить между различными активами для достижения:

– минимизации риска при заданной доходности (таблица 5.4);

– максимизации доходности при определенном уровне риска (таблица 5.5).

Задача 5.1. Пусть имеются следующие данные.

Таблица 5.4 – Ожидаемая доходность ценных бумаг

Вид ценной бумаги, i	1	2	3
Ожидаемая доходность, m_i	10,8	4	3,5

Таблица 5.5 – Ковариации доходностей ценных бумаг

Ковариации, $\sigma_{ij;}$	1	2	3
1	471	35	18
2	35	60	1,4
3	18	1,4	56

Задача 5.1 известна как задача Марковица и ее оптимальное решение, т. е. структура эффективного портфеля инвестиций (активов, ценных бумаг), определяется формулой

$$X^* = V^{-1} \frac{m_p(E \cdot I_{12} - m \cdot I_1) + m \cdot I_{12} - E \cdot I_2}{I_{12}^2 - I \cdot I_2}, \qquad (5.1)$$

где

$X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}$ – вектор-столбец оптимальных долей капитала, вложенного в i-й вид ценных бумаг.

$$m = \begin{pmatrix} 10,8 \\ 4 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$ – вектор-столбец доходностей ценных бумаг;

$$V = \begin{pmatrix} 471 & 35 & 18 \\ 35 & 60 & 1,4 \\ 18 & 1,4 & 58 \end{pmatrix}$$ – матрица ковариаций доходностей ценных бумаг;

$$V_p = X^T \cdot V \cdot X \,. \qquad (5.3)$$

В результате вычислений получили зависимость дисперсии эффективного портфеля от его доходности:

$$V_p = 8,96 m_p^2 - 68 m_p + 158,68 \cdot$$

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство: для того чтобы дисперсия была положительна для любого значения m_p, необходимо чтобы дискриминант был неположительным. В задаче: $D = -1062$.

Уравнение среднего квадратического отклонения, т. е. кривой риска имеет вид

$$\sigma_p = \sqrt{8,96 m_p^2 - 68 m_p \ - 158,68.}$$

Для определения доходности портфеля с минимальным риском определим точку минимума кривой риска, используя необходимое условие существования экстремума функции одной переменной: $\sigma_p'(m_p) = 0$.

Оценкой эффективного портфеля является точка с координатами (3,80; 5,44), т. е. если инвестор не склонен к риску, то он может сформировать портфель минимального риска 5,44 % с ожидаемой доходностью 3,8 %.

В результате вычислений получаем линейную зависимость структуры оптимального портфеля от его доходности:

$$X^* = a \cdot m_p + b \,, \qquad (5.2)$$

$$X^* = \begin{pmatrix} 0,1404 \\ -0,049 \\ -0,091 \end{pmatrix} \cdot m_p + \begin{pmatrix} -0,525 \\ 0,6642 \\ 0,8608 \end{pmatrix}.$$

Задаваясь различными желаемыми доходностями, можно определить оптимальную структуру портфеля ценных бумаг.

Пусть желаемая доходность портфеля m_p = 4 %, тогда

$$X^* = \begin{pmatrix} 0,0365 \\ 0,4673 \\ 0,4962 \end{pmatrix},$$

т. е. для получения портфеля доходностью 4 % необходимо: 3,65 % денежных средств инвестировать в 1-й вид ценных бумаг (активов), 46,73 % – во 2-й, 49,62 % – в 3-й.

5.6 Модификация портфеля ценных бумаг (задача Тобина)

Оказалось, что решение задачи резко упрощается и приобретает новые особенности, если учесть простой факт: кроме рисковых бумаг на рынке имелись и безрисковые типа государственных обязательств с фиксированным доходом.

Итак, как должен инвестор скомбинировать рисковую и безрисковые части портфеля, чтобы минимизировать дисперсию портфеля при выбранной или средней эффективности портфеля m_p?

Точки, расположенные на эффективной границе, соответствуют портфелям, сконструированным из рисковых ценных бумаг, – рыночным портфелям. При наличии государственных обязательств с фиксированным доходом любой инвестор будет комбинировать эти безрисковые ценные бумаги с рыночным портфелем, чтобы отрегулировать соотношение «риск – доходность» своего портфеля. Такие комбинированные портфели будут соответствовать точкам линии рынка капитала (Capital Market Line, CML) – касательной к эффективной границе, проведенной из точки с координатами (m_0 = 3; σ_0 = 0) при наличии абсолютно безрисковых ценных бумаг с доходностью m_0 = 3 %. Координаты точки касания $M(m_1, \sigma_1)$ найдем, используя уравнение касательной к графику функции:

$$\sigma_p'(m_p) \cdot (m_1 - m_0) = \sigma_p'(m_1) - \sigma_0 . \qquad (5.4)$$

Ожидаемая доходность рыночного портфеля ценных бумаг невысока – 7,95 %, риск также достаточно невысок – 13,59 %. Определим структуру портфеля, используя формулу (5.2):

$$X^* = \begin{pmatrix} 0,5916 \\ 0,2727 \\ 0,1357 \end{pmatrix},$$

или 59,16 % инвестировать в 1-й вид ценной бумаги;

27,27 % инвестировать во 2-й вид ценной бумаги;

13,57 % инвестировать в 3-й вид ценной бумаги.

Если в такой портфель вложить лишь часть имеющихся денежных средств, а остальные оставить на безрисковом вкладе, то можно не только получить комбинированный портфель с меньшим риском, но и проиграть в эффективности.

Выведем уравнение прямой Capital Market Line (CML) – линии рынка капитала:

$$m_p - m_0 = \frac{m_r - m_0}{\sigma_r} \sigma_p , \qquad (5.5)$$

где m_r, σ_r – доходность и среднее квадратическое отклонение рискового портфеля соответственно.

Для данного рынка ценных бумаг уравнение линии рынка капитала будет иметь вид

$$m_p = 3 + 0{,}3647\ \sigma_p.$$

Любой инвестор будет выбирать портфель так, чтобы ожидаемая доходность и риск лежали на этой прямой.

Зависимость риска комбинированного портфеля от его доходности имеет вид

$$\sigma_p = -8{,}227 + 2{,}7422\ m_p.$$

Пример 5.1. Известны ожидаемая доходность ценных бумаг трех видов и ковариации их доходностей (таблицы 5.1, 5.2). Требуется:

1. Найти структуру эффективного портфеля ценных бумаг (модель Марковица):

1.1 Построить модель эффективного портфеля.

1.2 Задаваясь желаемой доходностью портфеля, определить его структуру.

1.3 Построить кривую риска. Оценить портфель с минимально возможным риском.

2. Найти оптимальную структуру рискового портфеля при условии наличия абсолютно безрисковых ценных бумаг с доходностью 3 % (модель Тобина):

2.1 Определить доходность и структуру комбинированного портфеля при наличии абсолютно безрисковых ценных бумаг.

2.2 Построить линию рынка капитала (CML).

Результаты расчетов модели Марковица и формулы представлены на рисунках 5.2–5.14.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	Таблица 1 - Ожидаемая доходность ЦБ					Таблица 2 - Ковариации ЦБ					
3	Вид ЦБ	1	2	3		Ковариации	1	2	3		
4	Доходность	10,8	4	3,5		1	471	35	18		
5						2	35	59	1,4		
6						3	18	1,4	56		
7	**Решение**										
8	**1 Определение структуры эффективного портфеля ценных бумаг (модель Марковица)**										
9	**1.1 Модель эффективного портфеля (модель Марковица)**										
10		471	35	18		10,8		1		x1	
11	V=	35	59	1,4	m=	4	E=	1	X=	x2	
12		18	1,4	56		3,5		1		x3	
13											
14		0,0022473	-0,0013168	-0,0006894		E^T=	1	1	1		
15	V^{-1}=	-0,0013168	0,0177308	-0,0000200							
16		-0,0006894	-0,0000200	0,0180792		E^T*V^{-1}=	0,00024	0,01639	0,01737		
17											
18			$l_1=E^T*V^{-1}*E=$	**0,034004859**							
19											
20	m^T=	10,8	4	3,5		m^T*V^{-1}=	0,01659	0,05663	0,05575		
21											
22			$l_2=m^T*V^{-1}*m=$	**0,600839117**		l_{12}=	**0,12897**		$l_{12}*l_{12}-l_1*l_2$=	-0,0038	

Рисунок 5.2 – Исходные данные и начало расчетов

	A	B	C	D	E	F
7	**Решени**					
8	**1 Опре**					
9	**1.1 Мод**					
10		=G4	=H4	=I4		=B4
11	V=	=G5	=H5	=I5	m=	=C4
12		=G6	=H6	=I6		=D4
13						
14		=МОБР(B10:D12)	=МОБР(B10:D12)	=МОБР(B10:D12)		
15	V^{-1}=	=МОБР(B10:D12)	=МОБР(B10:D12)	=МОБР(B10:D12)		
16		=МОБР(B10:D12)	=МОБР(B10:D12)	=МОБР(B10:D12)		
17						
18			$l_1=E^T*V^{-1}*E=$	**=МУМНОЖ(G16:I16;H10:H12)**		
19						
20	m^T=	=ТРАНСП(F10:F12)	=ТРАНСП(F10:F12)	=ТРАНСП(F10:F12)		
21						
22			$l_2=m^T*V^{-1}*m=$	**=МУМНОЖ(G20:I20;F10:F12)**		

Рисунок 5.3 – Начало расчетов, столбцы A – K (формулы)

	E	F	G	H	I	J
1						
2		Таблица 2 - К				
3		Ковариации	1	2	3	
4		1	471	35	18	
5		2	=H4	59	1,4	
6		3	=I4	=I5	56	
7						
8						
9						
10		=B4		1		x1
11	m=	=C4	E=	1	X=	x2
12		=D4		1		x3
13						
14		E^T=	=ТРАНСП(H1	=ТРАНСП(H10:H12)	=ТРАНСП(H10:H12)	
15						
16		E^T*V^{-1}=	=МУМНОЖ(G	=МУМНОЖ(G14:I14;B14:D16)	=МУМНОЖ(G14:I14;B	
17						
18						
19						
20		m^T*V^{-1}=	=МУМНОЖ(B	=МУМНОЖ(B20:D20;B14:D16)	=МУМНОЖ(B20:D20;E	
21						
22		I_{12}=	**=МУМНОЖ(G**		I_{12}*I_{12}-I_1*I_2=	=G22*G22-D18*D22

Рисунок 5.4 – Начало расчетов, стобцы E – J (формулы)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
23											
24			0,128974		0		-0,238278509				
25		E*I_{12}-m*I_1=	0,128974	-	0	=	-0,007045468				
26			0,128974		0		0,009956962				
27											
28			1,3929189		1		0,792079743				
29		m*I_{12}-E*I_2=	0,5158959	-	1	=	-0,084943243				
30			0,4514089		1		-0,149430227				
31											
32				-0,000533081				0,001995			
33			V^{-1}(E*I_{12}-m*I_1)=	0,000188647			V^{-1}(m*I_{12}-E*I_2)=	-0,002546			
34				0,000344434				-0,003246			
35											
36	***Структура эффективного портфеля***										
37			**0,1403891**		**#**						
38	**X*=**	**m_p**	**-0,049681**	**+**	**1**						
39			**-0,090708**		**1**						
40			a		b						
41	**1.2 Определение структуры портфеля при желаемой доходности:**								**m_p=**	4	%
42											
43		**0,0361772**		3,62%	инвестиции в 1-й вид ЦБ						
44	X*=	**0,4718132**	или	47,18%	инвестиции во 2-й вид ЦБ						
45		**0,4920096**		49,20%	инвестиции в 3-й вид ЦБ						
46											

Рисунок 5.5 – Расчет оптимальной структуры портфеля

	B	C	D	E	F	G
23						
24		=МУМНОЖ(H10:H12;G22)		=МУМНОЖ(F10:F12;D18)		=C24-E24
25	$E*l_{12}-m*l_1=$	=МУМНОЖ(H10:H12;G22)	-	=МУМНОЖ(F10:F12;D18)	=	=C25-E25
26		=МУМНОЖ(H10:H12;G22)		=МУМНОЖ(F10:F12;D18)		=C26-E26
27						
28		=МУМНОЖ(F10:F12;G22)		=МУМНОЖ(H10:H12;D22)		=C28-E28
29	$m*l_{12}-E*l_2=$	=МУМНОЖ(F10:F12;G22)	-	=МУМНОЖ(H10:H12;D22)	=	=C29-E29
30		=МУМНОЖ(F10:F12;G22)		=МУМНОЖ(H10:H12;D22)		=C30-E30
31						

Рисунок 5.6 – Предварительные расчеты (формулы)

	B	C	D	E	F	G	H
31							
32			=МУМНОЖ(B14:D16;G24:G26)				=МУМНОЖ(B14:D16;G28:G30)
33		$V^{-1}(E*l_{12}-m*l_1)=$	=МУМНОЖ(B14:D16;G24:G26)			$^{-1}(m*l_{12}-E*l_2)=$	=МУМНОЖ(B14:D16;G28:G30)
34			=МУМНОЖ(B14:D16;G24:G26)				=МУМНОЖ(B14:D16;G28:G30)
35							
36							
37		=D32/$J$22		=H32/$J$22			
38	m_p	=D33/$J$22	+	=H33/$J$22			
39		=D34/$J$22		=H34/$J$22			
40		a		b			
41							
42							
43	=C37*$J$41+E37		=B43	инвестиции в			
44	=C38*$J$41+E38	или	=B44	инвестиции вс			
45	=C39*$J$41+E39		=B45	инвестиции в			
46							

Рисунок 5.7 – Расчет оптимальной стуктуры портфеля (формулы)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
46										
47	**1.3 Построение кривой риска. Оценка минимально возможного риска**									
48										
49	$a^{T}=$	0,14039	-0,05	-0,090708215		$b^{T}=$	-0,53	0,67053675	0,8548425	
50										
51	*V=	62,7517	1,855	-2,622209461		$b^T*V=$	-209	22,37017469	39,353104	
52										
53	*a=	8,95533				$b^T*V*b=$	158,2			
54										
55	*b=	-33,966				$b^T*V*a=$	-34			
56										
57	***Уравнение кривой риска (дисперсии)***									
58										
59	Vp=	8,95533	m_p^2	+	-67,9	m_p	+	158,2336105		
60										

Рисунок 5.8 – Расчет уравления кривой риска

	A	B	C	D
46				
47	**1.3 Постр**			
48				
49	**a^{T}=**	=ТРАНСП(C37:C39)	=ТРАНСП(C37:C39)	=ТРАНСП(C37:C39)
50				
51	**a^{T}*V=**	=МУМНОЖ(B49:D49;B10:D12)	=МУМНОЖ(B49:D49;B10:D12)	=МУМНОЖ(B49:D49;B10:D12)
52				
53	**a^{T}*V*a=**	=МУМНОЖ(B51:D51;C37:C39)		
54				
55	**a^{T}*V*b=**	=МУМНОЖ(B51:D51;E37:E39)		

Рисунок 5.9 – Предварительные расчеты уравнения кривой риска, столбцы A – D (формулы)

	F	G	H	I
48				
49	**b^{T}=**	=ТРАНСП(E37:E39)	=ТРАНСП(E37:E39)	=ТРАНСП(E37:E39)
50				
51	**b^{T}*V=**	=МУМНОЖ(G49:I49;B10:D12)	=МУМНОЖ(G49:I49;B10:D12)	=МУМНОЖ(G49:I49;B10:D12)
52				
53	**b^{T}*V*b=**	=МУМНОЖ(G51:I51;E37:E39)		
54				
55	**b^{T}*V*a=**	=МУМНОЖ(G51:I51;C37:C39)		
56				

Рисунок 5.10 – Предварительные расчеты уравнения кривой риска, столбцы F – I (формулы)

	A	B	C	D	E	F	G	H
57	***Уравнен***							
58								
59	**Vp=**	**=B53**	**m_p^2**	**+**	**=G55+B55**	**m_p**	**+**	**=G53**
60								

Рисунок 5.11 – Расчет уравнения кривой риска (формулы)

	A	B	C	D	E	F	G	H
60								
61	Условие неотрицательности дискриминанта						-1053,417503	*Выполняется*
62								
63	Доходность портфеля с минимальным риском					**m_p**	3,79	
64								
65	Размер минимального риска					**Gp**	5,42	
66								
67	Таблица 2 - Расчет координат точек эффективного множества (кривой риска)							

	№п/п	m_p	Gp
69	1	0	12,57909418
70	2	1	9,962791829
71	3	2	7,628334576
72	4	3	5,919156411
73	5	3,792809971	5,422873959
74	6	4	5,458204256
75	7	5	6,51599813
76	8	6	8,546059116
77	9	7	11,02373249
78	10	8	13,70842393
79	11	9	16,49938641
80	12	10	19,35069182
81	13	11	22,23914237
82	14	12	25,15194404

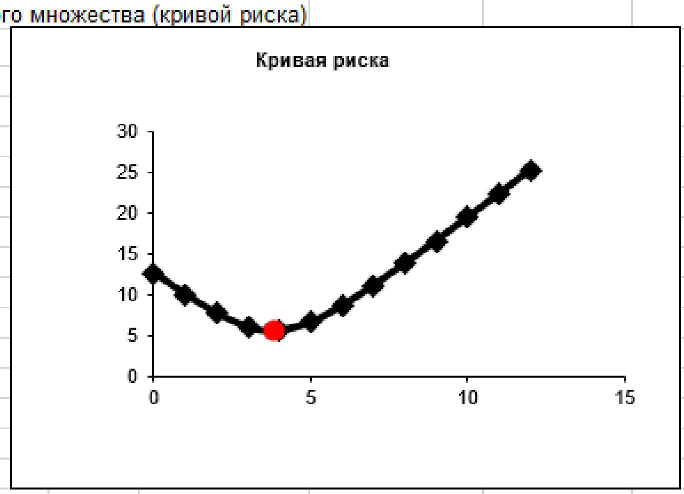


Рисунок 5.12 – График кривой риска

	F	G	H
60			
61		=E59*E59-4*B59*H59	*=ЕСЛИ(G61<0;"Выполняется";"Не выполняется")*
62			
63	**m_p**	=-E59/2/B59	
64			
65	**Gp**	=(B59*G63*G63+E59*G63+H59)^0,5	
66			

Рисунок 5.13 – Расчет доходности портфеля (формулы)

	A	B	C
66			
67	Таблица :		
68	№п/п	m_p	Gp
69	1	0	=($B$59*B69*B69+$E$59*B69+$H$59)^0,5
70	2	1	=($B$59*B70*B70+$E$59*B70+$H$59)^0,5
71	3	2	=($B$59*B71*B71+$E$59*B71+$H$59)^0,5
72	4	3	=($B$59*B72*B72+$E$59*B72+$H$59)^0,5
73	5	=G63	=($B$59*B73*B73+$E$59*B73+$H$59)^0,5
74	6	4	=($B$59*B74*B74+$E$59*B74+$H$59)^0,5
75	7	5	=($B$59*B75*B75+$E$59*B75+$H$59)^0,5
76	8	6	=($B$59*B76*B76+$E$59*B76+$H$59)^0,5
77	9	7	=($B$59*B77*B77+$E$59*B77+$H$59)^0,5
78	10	8	=($B$59*B78*B78+$E$59*B78+$H$59)^0,5
79	11	9	=($B$59*B79*B79+$E$59*B79+$H$59)^0,5
80	12	10	=($B$59*B80*B80+$E$59*B80+$H$59)^0,5
81	13	11	=($B$59*B81*B81+$E$59*B81+$H$59)^0,5
82	14	12	=($B$59*B82*B82+$E$59*B82+$H$59)^0,5
83			

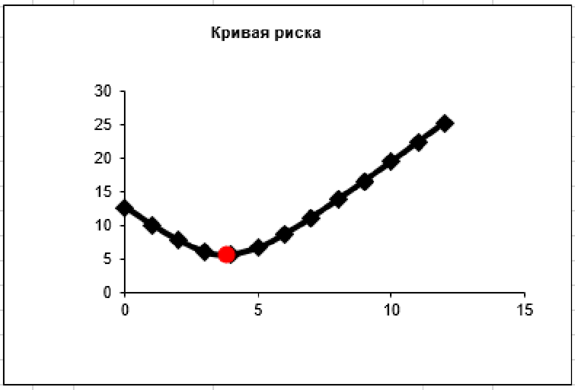


Рисунок 5.14 – Расчет для построения графика кривой риска (формулы)

Теперь найдем оптимальную структуру рискового портфеля при условии наличия абсолютно безрисковых ценных бумаг с доходностью 3 % (модель Тобина). Результаты расчетов для модели Тобина представлены на рисунке 5.15.

$|17,9155\ m_{p1}\ +\ -67,998|m_{p1}\ -\ 3|\ =\ 17,9155\ m_{p1}^2\ -\ -136\ m_{p1}\ +\ 317,358$

$14,2511\ m_{p1}\ =\ 113,365$

Доходность портфеля при наличии абсолютно безрисковых ценных бумаг

m_{p1} **7,95** %

Структура портфеля при наличии абсолютно безрисковых ценных бумаг

X*=	0,59157	или	59,16% инвестиции в 1-й вид ЦБ
	0,27273		27,27% инвестиции во 2-й вид ЦБ
	0,1357		13,57% инвестиции в 3-й вид ЦБ

Размер риска при наличии абсолютно безрисковых ценных бумаг **Gp1** **13,587** %

2.2 Построение линии рынка капитала (CML)

Таблица 3 - Расчет координат точек эффективного множества (кривой риска)

№п/п	mp	Gp	Gp1
1	0	12,5968	
2	1	9,98194	
3	2	7,64949	
4	3	5,94187	0
5	3,79546	5,44405	
6	4	5,47837	
7	5	6,52953	
8	6	8,55409	
9	7	11,0284	
10	**7,9548**	13,5871	**13,587**
11	8	13,7111	
12	9	16,5009	

Уравнение линии рынка капитала (CML)

$m_p = 3 + 0,36467\ Gp$ Контроль 7,95483

Зависимость риска комбинированного портфеля от доходности

$Gp = -8,2266 + 2,7422\ m_p$

Рисунок 5.15 – Результаты расчетов модели Тобина

5.7 Задачи для самостоятельной работы

1. Найти структуру эффективного портфеля ценных бумаг (ЦБ) (модель Марковица) по исходным данным по вариантам таблиц 5.6–5.15:

1.1 Построить модель эффективного портфеля.

1.2 Задаваясь желаемой доходностью портфеля, определить его структуру.

1.3 Построить кривую риска. Оценить портфель с минимально возможным риском.

Вариант 1

Таблица 5.6 – Ожидаемая доходность ЦБ

Вид ЦБ	1-й	2-й	3-й
Доходность	10	4,3	3

Таблица 5.7 – Ковариации ЦБ

Ковариация	Вид ЦБ		
	1-й	2-й	3-й
1-я	380	48	–10
2-я	48	59	–1
3-я	–10	–1	16

Вариант 2

Таблица 5.8 – Ожидаемая доходность ЦБ

Вид ЦБ	1-й	2-й	3-й
Доходность	11	4,3	5

Таблица 5.9 – Ковариации ЦБ

Ковариация	Вид ЦБ		
	1-й	2-й	3-й
1-я	387	52	0
2-я	50	64	4
3-я	–7	6	21

Вариант 3

Таблица 5.10 – Ожидаемая доходность ЦБ

Вид ЦБ	1-й	2-й	3-й
Доходность	10	5	3

Таблица 5.11 – Ковариации ЦБ

Ковариация	Вид ЦБ		
	1-й	2-й	3-й
1-я	380	53	–6
2-я	54	61	0
3-я	0	6	17

Вариант 4

Таблица 5.12 – Ожидаемая доходность ЦБ

Вид ЦБ	1-й	2-й	3-й
Доходность	10,8	5	5

Таблица 5.13 – Ковариации ЦБ

Ковариация	Вид ЦБ		
	1-й	2-й	3-й
1-я	385	57	–3
2-я	54	63	1
3-я	–7	8	22

Вариант 5

Таблица 5.14 – Ожидаемая доходность ЦБ

Вид ЦБ	1-й	2-й	3-й
Доходность	14	4	3,5

Таблица 5.15 – Ковариации ЦБ

Ковариация	Вид ЦБ		
	1-й	2-й	3-й
1-я	394	58	–2
2-я	57	61	6
3-я	–7	7	21

2. Найти оптимальную структуру рискового портфеля при условии наличия абсолютно безрисковых ценных бумаг с доходностью 3 % (модель Тобина):

2.1 Определить доходность и структуру комбинированного портфеля при наличии абсолютно безрисковых ценных бумаг.

2.2 Построить линию рынка капитала (CML).

Исходные данные находятся в таблицах 5.16–5.25.

Вариант 6

Таблица 5.16 – Ожидаемая доходность ЦБ

Вид ЦБ	1-й	2-й	3-й
Доходность	10,8	4	3,5

Таблица 5.17 – Ковариации ЦБ

Ковариация	Вид ЦБ		
	1-й	2-й	3-й
1-я	394	58	–2
2-я	57	61	
3-я	–7	7	21

Вариант 7

Таблица 5.18 – Ожидаемая доходность ЦБ

Вид ЦБ	1-й	2-й	3-й
Доходность	10,8	5	5

Таблица 5.19 – Ковариации ЦБ

Ковариация	Вид ЦБ		
	1-й	2-й	3-й
1-я	394	58	–2
2-я	57	61	6
3-я	–7	7	21

Вариант 8

Таблица 5.20 – Ожидаемая доходность ЦБ

Вид ЦБ	1-й	2-й	3-й
Доходность	10,8	4	3,5

Таблица 5.21 – Ковариации ЦБ

Ковариация	Вид ЦБ		
	1-й	2-й	3-й
1-я	394	56	4
2-я	52	68	0
3-я	–7	2	20

Вариант 9

Таблица 5.22 – Ожидаемая доходность ЦБ

Вид ЦБ	1-й	2-й	3-й
Доходность	12	5	3,5

Таблица 5.23 – Ковариации ЦБ

Ковариация	Вид ЦБ		
	1-й	2-й	3-й
1-я	394	56	4
2-я	52	68	0
3-я	–7	2	20

Вариант 10

Таблица 5.24 – Ожидаемая доходность ЦБ

Вид ЦБ	1-й	2-й	3-й
Доходность	12	3	4

Таблица 5.25 – Ковариации ЦБ

Ковариация	Вид ЦБ		
	1-й	2-й	3-й
1-я	389	63	–1
2-я	50	61	2
3-я	0	9	23

Тема 6. Расчет справедливой цены опционов европейского типа

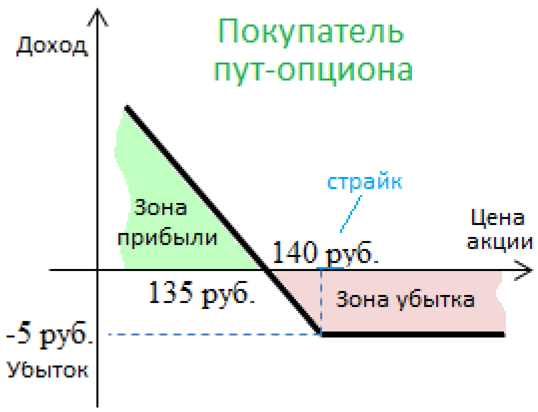
6.1 Пут-опцион и его особенности

Пут-опцион – это производный финансовый инструмент, предоставляющий его владельцу право продать актив по заранее установленной цене. Обладатель опциона может воспользоваться этим **правом** на заранее оговоренную дату, но не обязан этого делать. Применение опциона целесообразно, если рыночная стоимость актива на момент экспирации снижается, позволяя получить прибыль от разницы между установленной ценой продажи и текущей рыночной ценой.

Покупатель опциона пут. Рассмотрим пример: инвестор приобретает пут-опцион на 300 акций компании «Газпром» с ценой исполнения 140 руб., сроком на три месяца и премией в 1500 руб. (5 руб. на акцию). На момент покупки акции «Газпрома» торгуются по 140 руб. Инвестор ожидает, что цена акций упадет. Допустим, прогноз сбылся, и стоимость акций через три месяца составила 120 руб. В таком случае он покупает акции на спотовом рынке по цене 120 руб. и сразу реализует свое право по опциону, продавая их за 140 руб., что приносит ему прибыль. Расчет выгоды: (140 – 120) · 300 = 6000 руб., из которой необходимо вычесть уплаченную премию. В итоге доход составит 4500 руб.

Если цена акций вырастет, например, до 150 руб., инвестор не станет исполнять опцион, так как продать акции на рынке выгоднее, чем использовать опцион по цене 140 руб. Потери в этом случае составят лишь премию, уплаченную за опцион, т. е. 1500 руб.

Таким образом, пут-опцион принесет прибыль, если цена акций «Газпрома» окажется ниже 135 руб., а убытки ограничатся размером премии, если цена превысит 140 руб. (рисунок 6.1).



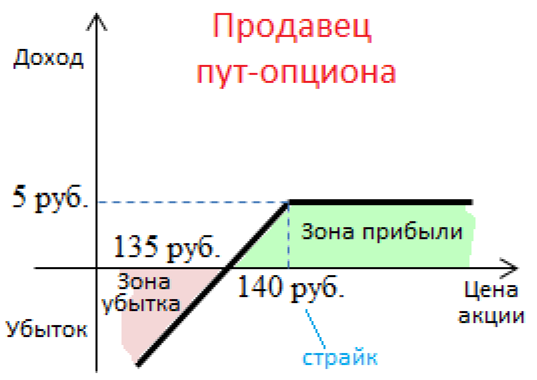
Как рассчитывается прибыль покупателя опциона пут

1. Если рыночная цена акции меньше страйка (цены исполнения), то прибыль = = страйк – рыночная цена акции – премия.

2. Если рыночная цена акции больше страйка, то результатом сделки будет убыток, равный размеру уплаченной премии.

Рисунок 6.1 – Расчет прибыли покупателя опциона пут

Продавец опциона пут. Продавец пут-опциона принимает на себя противоположные финансовые результаты по отношению к покупателю. Максимально возможная прибыль продавца ограничена суммой полученной премии, что достигается при неисполнении опциона. Такой исход возможен, если рыночная цена базового актива (например, акций «Газпрома») к моменту экспирации останется на уровне или выше установленной цены исполнения – в данном случае 140 руб. Это обеспечивает продавцу фиксированную доходность в размере премии при минимальных рисках. Схематически пример расчета приведен на рисунке 6.2.



Как рассчитывается прибыль продавца опциона пут

1. Если рыночная цена акции больше либо равна страйку (цене исполнения), то доход будет равен размеру опционной премии.

2. Если рыночная цена акции меньше страйка, то убыток = – (страйк – рыночная цена акции) + премия.

Рисунок 6.2 – Прибыль продавца опциона пут

Возможные убытки продавца пут-опциона не ограничены и потенциально могут стать весьма значительными, если рыночная стоимость базового актива претерпит значительное снижение, ограничиваясь лишь теоретическим минимумом – нулевой ценой акций. При рыночной цене актива в 135 руб. продавец опциона оказывается в точке безубыточности, поскольку потери, вызванные падением цены, уравновешиваются полученной премией, что приводит к нулевому финансовому результату.

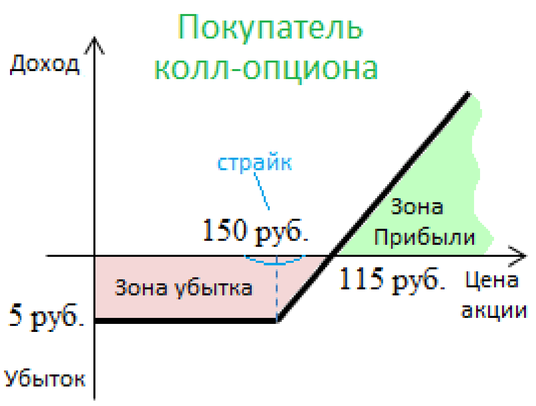
6.2 Колл-опцион

Колл-опцион представляет собой срочный финансовый контракт, обращаемый на бирже и предоставляющий его покупателю право, но не обязанность, приобрести базовый актив (фьючерс, акцию, облигацию и др.) по заранее зафиксированной цене (цене исполнения или страйк-цене) в пределах определенного срока. Продавец колл-опциона, в свою очередь, обязуется продать актив, если покупатель решит воспользоваться своим правом, что произойдет при благоприятных рыночных условиях, т. е. в случае роста стоимости базового актива.

Покупатель колл-опциона. Пример: инвестор приобретает колл-опцион на 200 акций компании «Белтелеком» с ценой исполнения 110 руб. за акцию, уплачивая премию в размере 1000 руб. (5 руб. на акцию). При текущей цене акций на уровне 110 руб. срок действия опциона составляет три месяца. Инвестор предполагает, что к моменту истечения опциона курс акций вырастет выше 110 руб. Если его прогноз оправдается и к дате экспирации цена акций поднимется до 120 руб., инвестор воспользуется своим правом, приобретет акции по цене 110 руб. и сразу сможет продать их на спотовом рынке за 120 руб.

Прибыль от этой сделки будет рассчитана как разница в цене: (120 – 110) · 200 = 2000 руб. После вычета опционной премии чистый результат составит 1000 руб. (2000 – 1000).

В случае если к моменту исполнения опциона цена акций снизится, скажем, до 103 руб., либо останется на уровне страйка (110 руб.), инвестор не станет реализовывать право на покупку, так как выгоднее купить актив по рыночной стоимости. В этом случае финансовый результат инвестора будет равен стоимости опционной премии – 1000 руб., поскольку это единственные понесенные затраты (рисунок 6.3).



Как рассчитывается прибыль покупателя опциона колл

1. Если рыночная цена акции больше страйка (цене исполнения), то прибыль = рыночная цена акции – страйк – премия.

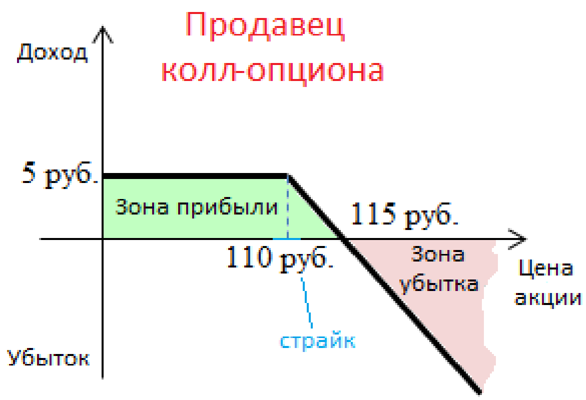
2. Если рыночная цена акции меньше либо равна страйку, то убыток = – (премия).

Рисунок 6.3 – Прибыль колл-опциона

Анализируя приведенные данные, можно отметить, что потенциальный убыток покупателя колл-опциона ограничивается суммой уплаченной премии, тогда как возможная прибыль теоретически неограничена и зависит от роста рыночной стоимости базового актива. Таким образом, инвестор начнет получать положительный финансовый результат, если рыночная цена акций превысит 115 руб. на дату исполнения опциона. При цене в 115 руб. результат сделки будет безубыточным, а если цена опустится ниже этой отметки, инвестор понесет убыток, ограниченный величиной премии.

Ситуация при цене базового актива между 110 и 115 рублями интересна тем, что инвестор решит исполнить колл-опцион, чтобы минимизировать свои затраты. Например, при рыночной цене акций в 113 руб. его прибыль от исполнения опциона составит (113 – 110) · 200 = 600 руб. Это позволяет сократить убыток с 1000 до 400 руб.

Продавец колл-опциона. Для продавца колл-опциона результаты сделки будут противоположны: его максимальная прибыль ограничена размером полученной премии, тогда как потенциальные убытки могут быть значительными при существенном росте цены базового актива, поскольку он обязуется продать акции по цене исполнения опциона, даже если их рыночная стоимость будет выше (рисунок 6.4).



Как рассчитывается прибыль продавца опциона колл

1. Если рыночная цена акции меньше либо равна страйку (цене исполнения), то доход равен размеру премии.

2. Если рыночная цена акции больше страйка, то результат по сделке равен: (рыночная цена акции – страйк) + премия.

Рисунок 6.4 – Прибыль продавца колл-опциона

Продавец колл-опциона может рассчитывать на фиксированную прибыль, которая не превышает размера премии, выплаченной покупателем за данный контракт. В то же время его потенциальные убытки не имеют верхней границы и напрямую зависят от роста рыночной стоимости базового актива. Чем выше стоимость актива на рынке по сравнению с ценой исполнения, тем значительнее финансовые обязательства продавца по контракту, что делает его позицию крайне уязвимой при существенном росте цены актива.

6.3 Страхование инвестиционного портфеля (снижение рисков) с помощью модели Блэка – Шоулза. Пример в Excel

Модель оценки опционов (Option Pricing Model, OPM) широко применяется для определения справедливой стоимости финансовых деривативов. Благодаря разработке формулы, использующейся для оценки стоимости опционов, модель обеспечила практическую возможность торговли такими инструментами, что существенно способствовало увеличению объемов операций с деривативами.

Модель Блэка – Шоулза – одна из наиболее популярных в данной области, основана на ряде критически важных допущений:

– базовый актив для колл-опциона не выплачивает дивиденды;

– операции по покупке и продаже активов не сопровождаются транзакционными издержками;

– безрисковая процентная ставка остается постоянной в течение срока действия опциона;

– нет ограничений на короткие продажи базового актива;

– исполнение опциона колл возможно только на дату истечения срока;

– доходности базового актива подчиняются логнормальному распределению.

Для минимизации рисков, связанных с неблагоприятным движением цен, использование опционов может служить эффективной страховкой. Так, стоимость опциона является надбавкой к цене актива, фактически представляя собой премию за защиту от неблагоприятного изменения стоимости.

Формула для расчета цены колл-опциона выглядит следующим образом:

$$C = SN(d_1) - Xe^{-\tau T}N(d_2);$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{N}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}};$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

где S – цена базового актива;

X – цена исполнения опциона;

T – срок погашения опциона;

r – процентная ставка;

σ – стандартное отклонение доходностей акций;

N – величина стандартного нормального распределения.

Теорема о паритете опционов пут и колл позволяет вычислить стоимость пут-опциона с тем же базовым активом и сроком исполнения, используя формулу

$$P = Xe^{-\tau T}N(d_2) - SN(-d_1).$$

В реальных условиях нередко встречаются ситуации, когда подходящий пут-опцион для конкретного актива отсутствует либо требуется защита не только для одного актива, но и для всего инвестиционного портфеля. В случае индексных портфелей, отслеживающих динамику таких индексов, как RTSI, S&P 100 или S&P 500, на рынке обычно имеются соответствующие опционы. Однако для большинства нестандартных портфелей такие инструменты не всегда доступны.

Для того чтобы решить данную проблему воспользуемся моделью ценообразования опционов Блэка – Шоулза. Как мы помним, опцион пут представляет собой совокупность базового актива (инвестиционный портфель) и безрисковой ценной бумаги, где доли вложенных средств в этот портфель постоянно корректируются. Под безрисковыми ценными бумагами будем подразумевать вложения в облигации.

Итак, попробуем смоделировать страхование инвестиционного портфеля, используя модель ценообразования Блэка – Шоулза, подразумевающую распределение средств инвестиционного портфеля между акциями и облигациями.

Предположим, мы располагаем капиталом в 1000 долл. и решаемся вложить его в акцию (инвестиционный портфель) на срок 1 год. Сейчас акция стоит 56 долл., смоделируем страхование вложения в акцию, чтобы по истечении одного года стоимость акции составила не менее 50 долл. Также предположим, что на рынке нет опционов, дающих нам такое страхование. Поэтому создадим собственный опцион за счет вложения средств в акции и безрисковые облигации. Безрисковая процентная ставка составляет 8 %. Волатильность акций – 30 %.

Для расчета доли вложения в акции воспользуемся формулой

$$w_0 = \frac{S_0 + N(d_1)}{S_0 + P_0}.$$

Для расчета долей облигаций в нашем инвестиционном портфеле необходимо $1 - w_0$.

Рассчитаем стоимость опциона пут (P_0) и другие необходимые переменные по приведенным в начале статьи формулам. Для облегчения расчетов воспользуемся пакетом Excel (рисунок 6.5).

d1 = (LN(C2/C3) + (C5 + 0.5*C6^2)*C4)/(C6*КОРЕНЬ(C4));

d2 = C8 – C6*КОРЕНЬ(C4);

N(d1) = НОРМСТРАСП(C8);

или

N(d1) = ГАУСС(C8) + 0,5

N(d2) = НОРМСТРАСП(C9);

или

N(d2) =ГАУСС(C9) + 0,5

Цена опциона колл = C2*C11 – C3*EXP(– C5*C4)*C12;

Цена опциона пут = C14 – C2 + C3*EXP(– C5*C4);

W0 =C2*C11/(C2 + C15) – доля капитала вложенного в акции.

	B	C	D	E	F
1	Расчет стоимости опциона пут				
2	Курс акции	S	56		
3	Цена исполнения	X	50		
4	Оставшийся срок	T	1		
5		r	0,08		
6	Волатильность	Sigma	0,3		
7					
8	d1		0,794429		
9	d2		0,494429		
10					
11	N(d1)		0,7865271	0,7865	
12	N(d2)		0,6894984	0,6895	
13					
14	Цена опциона колл		12,221158		
15	Цена опциона пут		2,3769756		
16	W0		0,7545016		

Рисунок 6.5 – Расчет по формуле Блэка – Шоулза

Теперь рассчитаем капитал, вложенный в акции и облигации. Данные по цене акции на начало и конец недели, а также значения переменных d1 и W0 сводим в таблицу. Поскольку начальная сумма капитала составляет 1000 долл., объем средств, предназначенных для инвестиций в акции, будет равен H20*W0. Для облигаций сумма составит (1 – W0)*H20. На конец недели цена акций достигла 60 долл., что представляет собой рост на 60 / 56 = 1,07. Итоговая стоимость акций соответственно стала равна: = (60/56)*F20 = 808,39 $ долл.

Рост стоимости облигаций является постоянным, и по прошествии недели он составит 1,00154: =exp((1/52)0,08). Общая стоимость инвестиционного портфеля (ИП) на конец недели определяется суммой стоимости акций и облигаций на указанную дату (рисунок 6.6).

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
17						Начало недели			Конец недели			Пассив.
18	неделя	курс акци	курс_конец	d1	W0	Акция	Облигаци	СтоимИП	Акция	Облигаци	СтоимИП	Управ.
19	0	56	60	0,7944	0,7545	754,5	245,50	1000	808,39	245,88	1054,27	1054,27

Рисунок 6.6 – Начало расчета

Для расчета результатов следующей недели принимаем начальную цену акции 60 долл., тогда на начало недели стоимость инвестиционного портфеля составляет 1054,27 долл. Затем определяем коэффициент распределения капитала (W0) и выполняем перераспределение средств между акциями и облигациями. Предположим, что к концу недели цена акции снизилась до 52 долл. Это снижение приведет к уменьшению стоимости акций до 52/60 от их начального значения, что составит 753,3 долл. Портфель облигаций при этом составит 185,02 долл. Таким образом, итоговая стоимость портфеля к концу недели окажется равной 938,66 долл. (рисунок 6.7).

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
17						Начало недели			Конец недели			Пассив.
18	недел	курс акци	курс_конец	d1	W0	Акция	Облигаци	СтоимИП	Акция	Облигаци	СтоимИП	Упрал.
19	0	56	60	0,7944	0,7545	754,5	245,50	1000	808,39	245,88	1054,27	1054,27
20	1	60	52	1,0244	0,8245	869,25	185,02	1054,27	753,35	185,30	938,66	913,70

Рисунок 6.7 – Расчет стоимости портфеля на первую наделю

Смоделируем изменения курсовой стоимости акций с помощью генератора случайных чисел из меню «Данные – Анализ данных – Генератор случайных чисел», чтобы спрогнозировать возможные сценарии. Таким образом, формируется картина изменения стоимости акций, на основе которой рассчитываются доли для распределения между акциями и облигациями.

Кроме того, для оценки доходности инвестиционного портфеля при пассивной стратегии, где средства инвестированы единожды без последующего перераспределения между активами, рассчитываем изменение стоимости портфеля. В колонке «М» выполняется расчет по следующей формуле (рисунок 6.8):

стоимость ИП при пассивном управлении =M20+M20*(C21–B21)/B21,

где M20 – начальная стоимость портфеля, а C21и B21 – значения курса акций на конец и начало рассматриваемого периода соответственно.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
17						Начало недели			Конец недели			Пассив.
18	недел	курс акци	курс_конец	d1	W0	Акция	Облигаци	СтоимИП	Акция	Облигаци	СтоимИП	Упрал.
19	0	56	60	0,7944	0,7545	754,5	245,50	1000	808,39	245,88	1054,27	1054,27
20	1	60	52	1,0244	0,8245	869,25	185,02	1054,27	753,35	185,30	938,66	913,70
21	2	52	43,92	0,5474	0,6647	623,94	314,71	938,66	526,99	315,20	842,19	771,73
22	3	43,92	43,58	-0,0155	0,4296	361,83	480,36	842,19	359,03	481,10	840,13	765,75
23	4	43,58	34,8	-0,0414	0,4188	351,82	488,31	840,13	280,94	489,06	770,00	611,48
24	5	34,8	38,31	-0,7914	0,1578	121,53	648,47	770,00	133,79	649,47	783,26	673,15
25	6	38,31	42,06	-0,471	0,2534	198,47	584,78	783,26	217,9	585,68	803,58	739,04
26	7	42,06	39,02	-0,1598	0,3701	297,38	506,21	803,58	275,88	506,99	782,87	685,63
27	8	39,02	38,91	-0,4098	0,2747	215,05	567,82	782,87	214,44	568,69	783,14	683,69
28	9	38,91	35,14	-0,4192	0,2714	212,51	570,62	783,14	191,92	571,50	763,42	617,45
29	10	35,14	32,35	-0,7589	0,1662	126,9	636,52	763,42	116,83	637,50	754,33	568,43
30	11	32,35	27,9	-1,0347	0,1039	78,388	675,94	754,33	67,605	676,98	744,59	490,24
31	12	27,9	25,57	-1,528	0,0381	28,345	716,24	744,59	25,978	717,35	743,32	449,30
32	13	25,57	20,58	-1,8187	0,0191	14,17	729,15	743,32	11,405	730,28	741,68	361,61
33	14	20,58	23,18	-2,5423	0,0025	1,8203	739,86	741,68	2,0503	741,00	743,05	407,30
34	15	23,18	25,53	-2,1458	0,008	5,9457	737,10	743,05	6,5484	738,24	744,79	448,59
35	16	25,53	22,43	-1,8239	0,0188	14,013	730,77	744,79	12,311	731,90	744,21	394,12
36	17	22,43	23,92468	-2,2554	0,0059	4,3569	739,85	744,21	4,6473	740,99	745,64	420,38
37	18	23,9247	20,289926	-2,0404	0,0107	7,9752	737,66	745,64	6,7635	738,80	745,56	356,52

Рисунок 6.8 – Продолжение расчетов стоимости портфеля

Для наглядного представления динамики изменения инвестиционного портфеля построим график, сравнивающий портфель с пассивным управлением и портфель с защитой, основанной на применении облигаций в рамках опционной модели Блэка – Шоулза. Как демонстрирует график на рисунке 6.9, в условиях снижения стоимости акций портфель с пассивным управлением повторяет поведение актива, в то время как страхуемый портфель показывает менее значительное снижение стоимости капитала.

Рисунок 6.9 – График страхования ИП с помощью облигаций

Если использовать страхование на растущем рынке, когда наблюдается рост стоимости акции, то использование данной схемы страхования снизит прибыль портфеля. На рисунке 6.10 показана динамика портфеля с использованием страхования и без него.

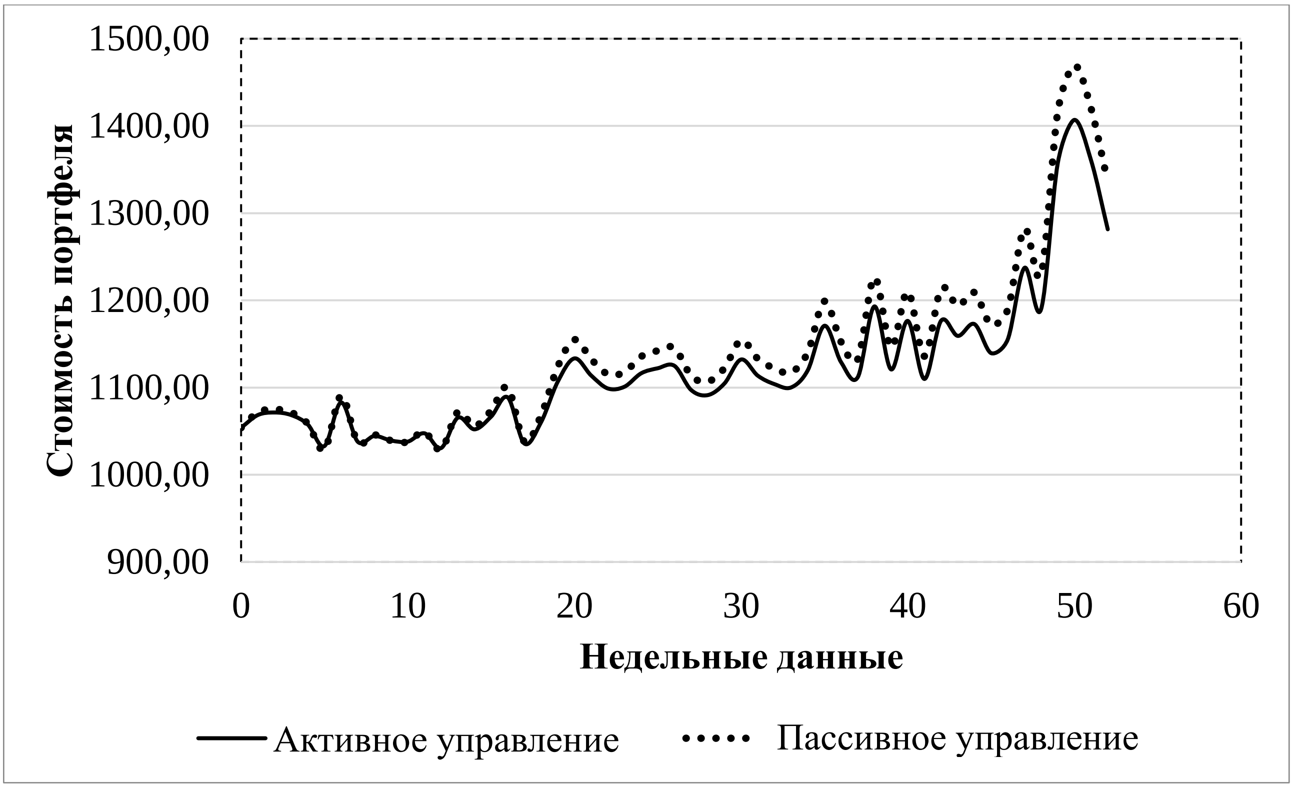


Рисунок 6.10 – График страхования ИП с помощью облигаций при растущей цене

Использование страховой стратегии, основанной на облигациях и модели опционного ценообразования Блэка – Шоулза, позволяет минимизировать убытки капитала. На растущем рынке такая защита может ограничивать темпы прироста портфеля, поскольку часть активов размещается в облигациях, отличающихся более консервативной доходностью.

6.4 Сочетания опционов и акций

6.4.1 Стеллажная сделка (стрэддл)

Стеллажная стратегия представляет собой комбинацию двух опционов: колл и пут на одну и ту же акцию, с одинаковой ценой исполнения и сроком истечения. В рамках этой стратегии инвестор может занять как длинную, так и короткую позицию, что делает ее полезной при ожидании значительных колебаний в цене акций, но без уверенности в направлении этих изменений. Если цена акции существенно изменится, инвестор получит прибыль. Продавец стеллажа, напротив, выигрывает при небольших колебаниях акций, рассчитывая на стабилизацию их курса.

Покупатель стеллажа уплачивает премии за оба опциона – колл и пут, что в дореволюционной России называлось «напряжением стеллажа». Если премии за опционы существенно различаются, это называлось «искусственным стеллажом».

Пример. Допустим, акция торгуется по 100 долл. Инвестор ожидает резкого движения цены в любую сторону и покупает стеллаж с ценой исполнения 102 долл., сроком на три месяца. Стоимость опциона колл составляет 4 долл., а опциона пут – 3 долл. Возможные сценарии развития событий:

1. Цена акции увеличилась до 102 долл.

Опционы не исполняются, и инвестор теряет сумму уплаченных премий (4 + 3 = 7 долл.).

2. Цена акции выросла до 110 долл.

Инвестор исполняет опцион колл и получает прибыль:

$$110 \text{ долл.} - 102 \text{ долл.} = 8 \text{ долл.}$$

Учитывая премии, чистая прибыль составит 1 доллар (8 долл. – 7 долл.).

3. Цена акции упала до 94 долл. Инвестор исполняет опцион пут и получает прибыль:

$$102 \text{ долл.} - 94 \text{ долл.} = 8 \text{ долл.}$$

Чистая прибыль также составит 1 доллар (8 долл. – 7 долл.).

4. Цена акции снизилась до 85 долл. Инвестор исполняет опцион пут и получает прибыль:

$$102 \text{ долл.} - 85 \text{ долл.} = 17 \text{ долл.}$$

После вычета уплаченных премий (7 долл.), чистая прибыль составит 10 долл.

5. Цена акции не изменилась и осталась на уровне 100 долл.

Ни один из опционов не исполняется, и инвестор теряет только сумму премий 7 долл.

Таким образом, стратегия стеллажа приносит прибыль, когда цена акций значительно отклоняется от 102 долл. – либо вверх, либо вниз. В противном случае, при небольших изменениях цены, покупатель несет убытки, в то время как продавец стеллажа выигрывает.

Если цена акций отклоняется от первоначального уровня в рамках «напряжения стеллажа», инвестор может воспользоваться одним из опционов (колл или пут) для снижения своих убытков. Предположим, что цена акций увеличилась до 103 долл. В этом случае покупатель исполняет опцион колл, что позволяет сократить убытки до:

$$7 \text{ долл.} - 103 \text{ долл.} + 100 \text{ долл.} = -6 \text{ долл.}$$

Если цена акций снизилась до 97 долл., покупатель исполняет опцион пут и его убытки уменьшаются:

$$7 \text{ долл.} - 100 \text{ долл.} + 97 \text{ долл.} = -6 \text{ долл.}$$

Таким образом, инвестор имеет возможность уменьшить свои потери в зависимости от изменений цены акций. Продавец «стеллажа», в свою очередь, получает прибыль, если цена акций останется в пределах «напряжения стеллажа», т. е. между 97 и 103 долл. В этом случае продавец не исполняет ни один из опционов и сохраняет все уплаченные премии.

Итоги прибыли и убытков покупателя «стеллажа» можно свести в таблицу 6.1. На графике можно проиллюстрировать, как меняются выигрыши и потери покупателя и продавца «стеллажа» в зависимости от изменения цены акций (рисунок 6.11).

Таблица 6.1 – Прибыль покупателя по «стеллажной» сделке

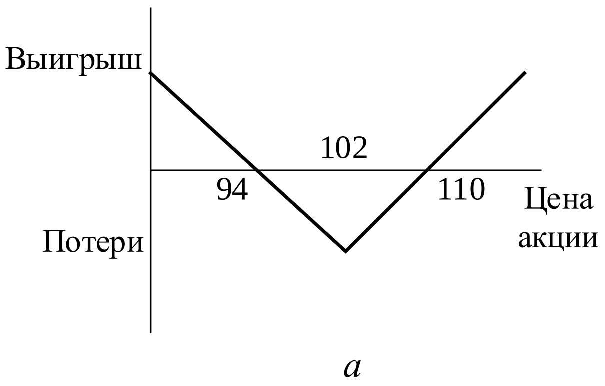
Цена акции	Сумма прибыли
$P < X$	$X - P - i$
$P = X$	$-i$
$P > X$	$P - X - i$

Примечания:

P – курс акций на день истечения контрактов;

X – цена исполнения;

i – сумма уплаченных премий



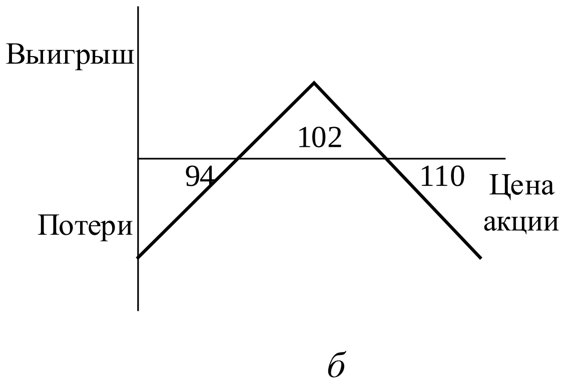


Рисунок 6.11 – Выигрыши-потери покупателя (*а*) «стеллажа» и продавца (*б*)

В рассматриваемом выше примере премии по опционам колл и пут были одинаковыми. При искусственном стеллаже ход рассуждений и расчетов будет точно таким же. Комбинацию покупателя иногда именуют как нижний или длинный стеллаж, продавца – верхний или короткий «стеллаж».

Комбинацию, аналогичную «стеллажной» сделке, можно получить также с помощью приобретения (продажи) одной акции и покупки (продажи) двух опционов колл или пут. Рассмотрим возможные сочетания.

1. Инвестор покупает одну акцию и продает два опциона колл (рисунок 6.12). Комбинированная позиция аналогична «короткому стеллажу».

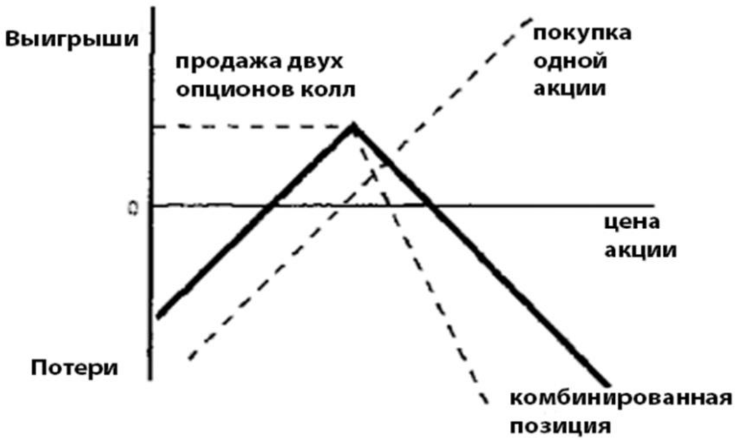


Рисунок 6.12 – Покупка одной акции и продажа двух опционов колл

2. Инвестор покупает одну акцию и два опциона пут (рисунок 6.13). Стратегия аналогична «длинному стеллажу».

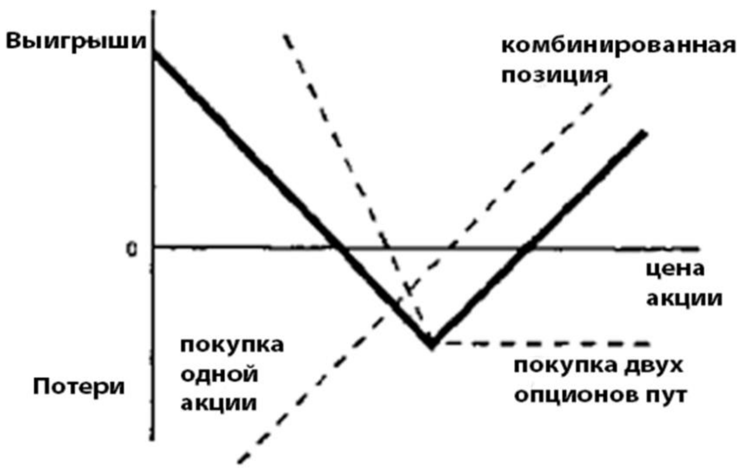


Рисунок 6.13 – Покупка одной акции и двух опционов пут

3. Инвестор продает одну акцию и покупает два опциона колл (рисунок 6.14). Стратегия аналогична «длинному стеллажу».

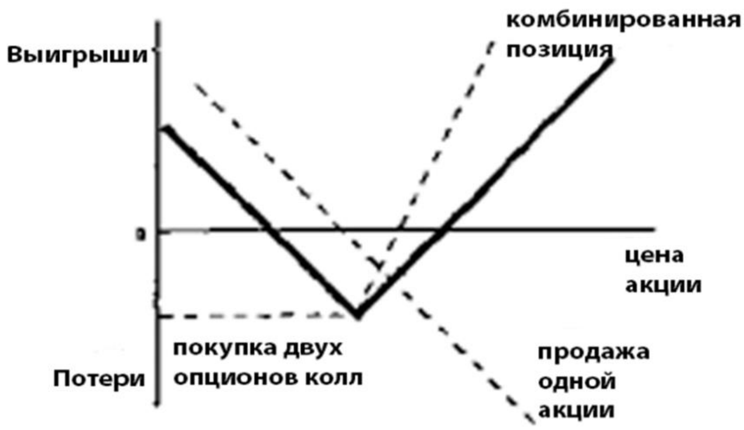


Рисунок 6.14 – Продажа одной акции и покупка двух опционов колл

4. Инвестор продает одну акцию и продает два опциона пут (рисунок 6.15). Стратегия аналогична «короткому стеллажу».

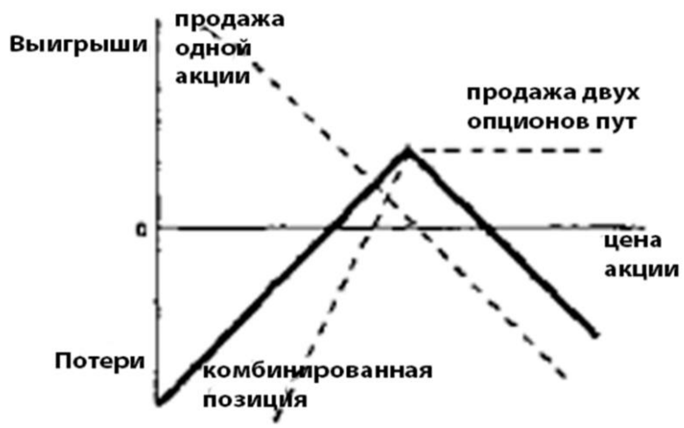


Рисунок 6.15 – Продажа одной акции и двух опционов пут

6.4.2 Стрэнгл

Стратегия «стрэнгл» представляет собой сочетание опционов колл и пут на один и тот же актив, которые имеют одинаковый срок истечения, но различаются ценами исполнения (страйками). В отличие от стратегии «стеллаж», стрэнгл предлагает более широкие ценовые границы для получения прибыли, что делает его привлекательным для продавцов опционов. При этом обычно страйк-цена опциона колл выше, чем у опциона пут.

Рассмотрим пример: инвестор использует стрэнгл с опционом колл, у которого цена исполнения составляет 60 долл., и опционом пут со страйком 55 долл. Оба опциона стоят по 5 долл., а текущая цена актива на рынке – 53 долл. Контракты рассчитаны на три месяца.

Прибыль для инвестора возможна, если цена поднимется выше 70 долл. или опустится ниже 45 долл. Убытки возникают, если стоимость акций останется в интервале от 45 до 70 долл., а максимальный убыток, равный 10 долл., возникает при движении цены между 55 и 60 долл. Если цена находится в диапазоне 45–55 долл., инвестор может исполнить опцион пут, чтобы сократить потери, а в промежутке 60 – 70 долл. – использовать опцион колл с той же целью. При цене точно 45 или 70 долл. сделка не принесет ни прибыли, ни убытка.

Продавец опционов получит прибыль, если цена акций останется между 45 и 70 долл. Визуализация данных в виде таблицы 6.2 и графика на рисунке 6.15 может помочь наглядно представить потенциальные результаты для обеих сторон. Инвестор, приобретающий стрэнгл, реализует стратегию «длинный стрэнгл», тогда как продавец – «короткий стрэнгл».

Таблица 6.2 – Прибыль покупателя по комбинации стрэнгл

Цена акции	Сумма прибыли
$P < X1$	$X1 - P - i$
$X1 \leq P \leq X2$	$-i$
$P > X2$	$P - X2 - i$

Примечания

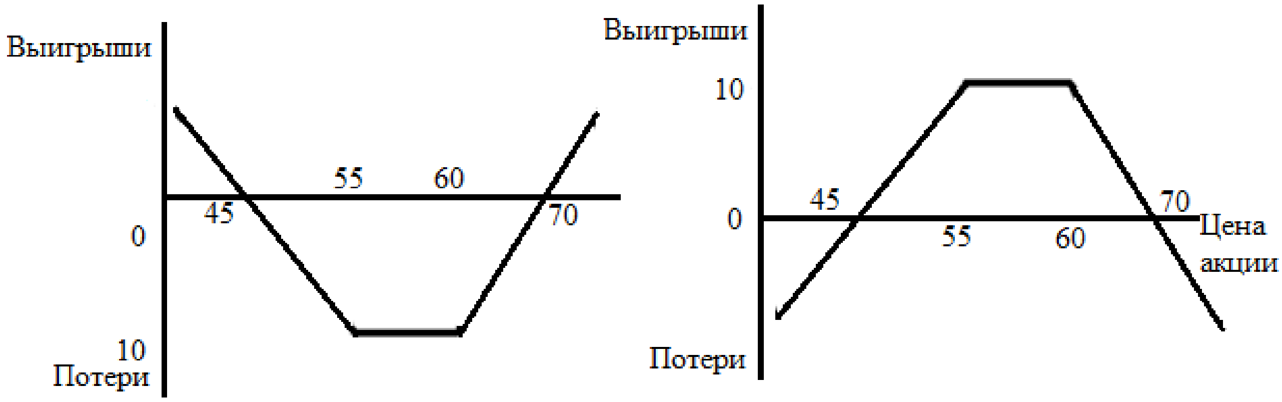
$X1$ – цена исполнения опциона пут;

$X2$ – цена исполнения опциона колл;

i – сумма уплаченных премий

6.4.3 Стрэп

Стратегия «стрэп» представляет собой комбинацию одного опциона пут и двух опционов колл, имеющих одинаковый срок истечения. Цены исполнения у этих опционов могут совпадать или различаться. В рамках данной стратегии инвестор принимает одну и ту же позицию по всем контрактам, занимая либо длинную позицию (покупка всех опционов), либо короткую (продажа всех опционов). Стратегия «стрэп» оптимальна в ситуации, когда инвестор предполагает, что вероятность роста цены базового актива выше, чем вероятность ее снижения.



а *б*

Рисунок 6.16 – Выигрыши-потери покупателя (*а*) стрэнгла и продавца (*б*)

Рассмотрим пример применения стратегии «стрэп»: инвестор покупает два опциона колл и один опцион пут с ценой исполнения 50 долл., в то время как текущая стоимость актива составляет 49 долл. Премия на каждый опцион равна 4 долл., и все контракты действуют в течение трех месяцев.

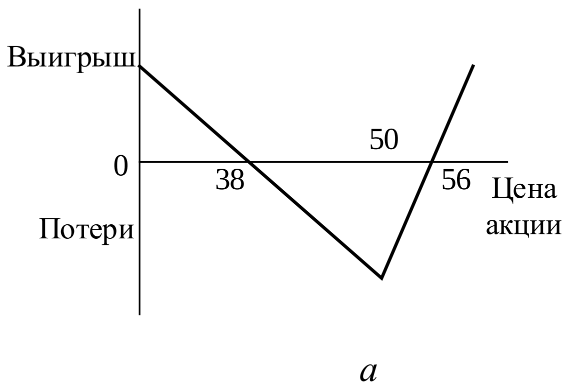
Прибыль для инвестора будет возможна, если стоимость актива либо превысит 56 долл., либо снизится ниже 38 долл. Если цена актива остается в диапазоне от 38 до 56 долл., инвестор столкнется с убытками, так как исполнение ни одного из опционов не принесет прибыли. В этом же диапазоне цен продавец стрэпа, напротив, получит прибыль. При достижении точек 38 и 56 долл. обе стороны останутся в безубыточном положении.

Для более наглядного анализа результатов данной стратегии удобно использовать таблицу 6.3 с показателями доходности и графическое представление результатов сделки (рисунок 6.17).

Таблица 6.3 – Прибыль покупателя по комбинации стрэп

Цена акции	Сумма прибыли
$P < X$	$X - P - i$
$P = X$	$-i$
$P > X$	$2(P - X) - i$

Согласно иллюстрациям стратегия «стрэп» структурно схожа со стратегией «стеллаж», но ее график характеризуется более выраженным наклоном в правой части, что связано с приобретением двух опционов колл. Если инвестор занимает позицию покупки по стратегии «стрэп», она называется «длинный стрэп», а если выступает в роли продавца – это «короткий стрэп».



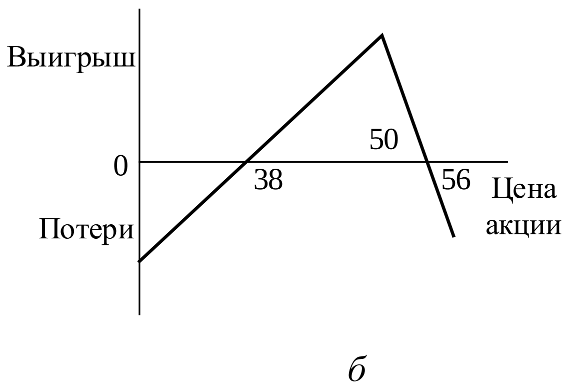


Рисунок 6.17 – Выигрыши-потери покупателя (*а*) «стрэпа» и продавца (*б*)

6.4.4 Стрип

Эта стратегия заключается в сочетании одного опциона колл и двух опционов пут, при этом все контракты имеют одинаковый срок действия. Цены исполнения могут совпадать или быть разными. Инвестор одновременно принимает одну и ту же позицию по всем опционам. Стратегия «стрип» применяется, когда существует высокая вероятность снижения стоимости акций по сравнению с ростом стоимости.

Пример. Инвестор покупает два опциона пут со страйком 40 долл. и один опцион колл со страйком 50 долл., при премии 4 долл. за каждый контракт и сроке действия три месяца. Для оценки возможных доходов и убытков по этой стратегии удобно использовать таблицу 6.4.

Таблица 6.4 – Прибыль покупателя по комбинации стрип

Цена акции	Сумма прибыли
$P < X1$	$2(X1 - P) - i$
$X1 \leq P \leq X2$	$-i$
$P > X2$	$P - X2 - i$

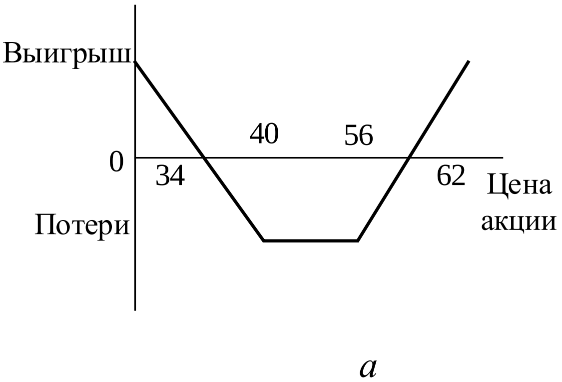
Примечания

$X1$ – цена исполнения опциона пут;

$X2$ – цена исполнения опциона колл

Покупатель получит прибыль, если цена акций выйдет за пределы диапазона 34 – 62 долл., т. е. при $P < 34$ долл. или $P > 62$ долл. Убытки будут возникать, если цена останется в пределах этого диапазона. Максимальные потери составят 12 долл. при цене акций от 40 до 50 долл. Продавец опционов, напротив, получит прибыль, если цена останется между 34 и 62 долл. В точках

34 и 62 долл. обе стороны сделки выйдут на нулевой результат. График, иллюстрирующий возможные прибыли и убытки по стрипу, представлен на рисунке 6.18.



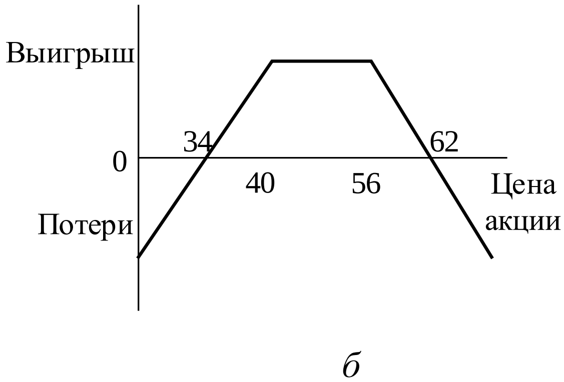


Рисунок 6.18 – Выигрыши-потери покупателя (*а*) стрипа и продавца (*б*)

6.4.5 Спреды

Стратегия «*бычий спред*» представляет собой метод, при котором инвестор приобретает колл-опцион с более низкой ценой исполнения и одновременно продает колл-опцион с более высокой ценой исполнения, оба опциона имеют одинаковый срок истечения. Такая стратегия требует начальных вложений, поскольку премия за опцион с более низким страйком выше, чем за опцион с более высоким. Когда инвестор выбирает данный подход, говорят, что он «покупает спред». Основная цель стратегии – извлечение прибыли в случае повышения стоимости базового актива, при этом она ограничивает как потенциальные убытки, так и максимальную прибыль фиксированной суммой.

График «бычьего спреда» имеет характерную форму, показаную на рисунке 6.19.

Пример. Инвестор приобретает колл-опцион с ценой исполнения 40 долл. за 4 долл. и продает колл-опцион с ценой исполнения 45 долл. за 2 долл. В результате начальные затраты составляют 2 долл. (4 долл. – 2 долл.).

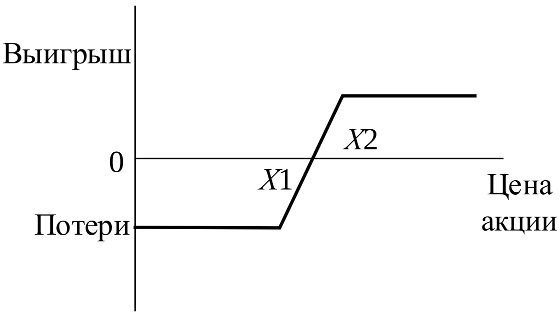


Рисунок 6.19 – «Бычий спред»

Если цена акций достигнет отметки 45 долл., инвестор сможет реализовать первый опцион, обеспечивая себе доход в размере:

45 долл. – 40 долл. – 2 долл. = 3 долл.

Если цена превысит 45 долл., скажем, поднимется до 48 долл., прибыль по первому опциону составит

48 долл. – 40 долл. – 2 долл. = 6 долл.

Однако в этом случае контрагент по второму опциону активирует свою длинную позицию, и это приведет к дополнительным затратам для инвестора:

48 долл. – 45 долл. = 3 долл.

Таким образом, совокупная прибыль инвестора останется фиксированной на уровне 3 долл.:

6 долл. – 3 долл. = 3 долл.

При уровне цен $P \geq 45$ долл. прибыль инвестора остается на уровне 3 долл. Если цена упадет до 40 долл. или ниже, убыток составит 2 долл., поскольку оба опциона останутся неисполненными. В случае цены $P = 42$ долл. результат будет нейтральным. Для удобства расчета возможной прибыли или убытков можно обратиться к таблице 6.5.

Таблица 6.5 – Прибыль по позиции «бычьего спреда»

Цена акции	Сумма прибыли
$P \leq X1$	$-i$
$X1 < P < X2$	$P - X1 - i$
$P \geq X2$	$X2 - X1 - i$

Примечания

$X1$ – цена исполнения длинного колла;

$X2$ – цена исполнения короткого колла

Аналогичный «бычий спред» возможен с опционами пут: покупка опциона пут с более низким страйком и продажа опциона пут с более высоким страйком. В отличие от стратегии с колл-опционами здесь инвестор получает денежный приток в момент создания спреда, что называется продажей спреда. График результатов этой стратегии имеет аналогичную форму, как показано на рисунке 6.19.

«*Спред медведя*» – это стратегия, в которой инвестор приобретает опцион колл с более высокой ценой исполнения и одновременно продает опцион колл с более низкой ценой исполнения. Эта комбинация используется, когда инвестор ожидает снижения стоимости акций, но при этом хочет ограничить возможные убытки, если цена пойдет вверх. Поскольку премия по проданному коллу выше, чем по купленному, эта стратегия предполагает первоначальный приток средств. Поэтому данную тактику называют продажей спреда. Для расчета выплат по этой позиции можно использовать таблицу 6.6.

Таблица 6.6 – Прибыль по позиции «спред медведя»

Цена акции	Сумма прибыли
$P \leq X1$	$+i$
$X1 < P < X2$	$-(P - X1) + i$
$P \geq X2$	$-(X2 - X1) + i$

Примечания

$X1$ – цена исполнения короткого колла;

$X2$ – цена исполнения длинного колла

Пример. Инвестор приобретает опцион колл со страйк-ценой 40 долл., заплатив за него премию 2 долл., и одновременно продает опцион колл со страйк-ценой 35 долл., за который получает премию 4 долл. Таким образом, чистый доход инвестора от премий составляет

$$4 \text{ долл.} - 2 \text{ долл.} = 2 \text{ долл.}$$

Если на момент истечения контрактов цена акций окажется на уровне 40 долл. или выше, убыток инвестора составит

$$-(40 \text{ долл.} - 35 \text{ долл.}) + 2 \text{ долл.} = -3 \text{ долл.}$$

Если же цена акций будет равна или ниже 35 долл., инвестор получит прибыль в размере

$$0 + 2 \text{ долл.} = 2 \text{ долл.}$$

При движении цены акций в диапазоне 35 < P < 37 долл. прибыль инвестора будет постепенно уменьшаться от 2 долл. до нуля. В пределах 37< P < 40 долл. его убытки будут варьироваться от –3 до 0 долл. График, иллюстрирующий распределение прибыли и убытков по данной позиции, представлен на рисунке 6.20.

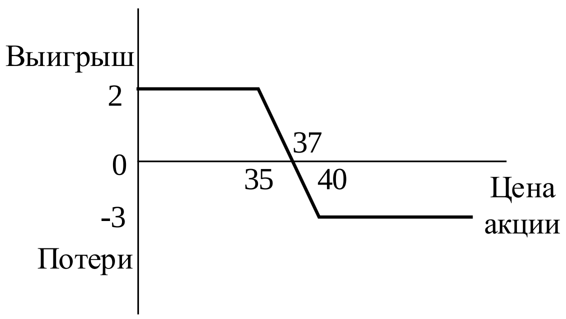


Рисунок 6.20 – «Медвежий спред»

«Медвежий спред» может быть сформирован путем продажи опциона пут с более низкой ценой исполнения и покупки опциона пут с более высокой ценой исполнения. В этом случае инвестор несет первоначальные расходы, так как премия за проданный опцион ниже, чем за купленный. Такая стратегия называется покупка спреда.

Обратный «бычий спред» строится через продажу опциона пут с более низкой ценой исполнения и покупку опциона колл с более высокой ценой исполнения. При этом премия за проданный опцион пут превышает премию за купленный опцион колл, что обеспечивает инвестору начальный приток денежных средств. Графическое представление этой стратегии можно увидеть на рисунке 6.21.

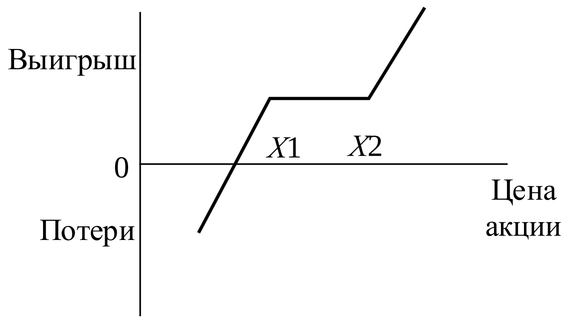


Рисунок 6.21 – Обратный «спред быка»

Инвестор использует данную стратегию, ожидая умеренного роста стоимости акций, при этом основной целью является получение прибыли в диапазоне $X1$–$X2$. Для удобного расчета потенциальной прибыли и убытков по этому спреду можно воспользоваться таблицей 6.7.

Таблица 6.7 – Прибыль по позиции обратный «бычий спред»

Цена акции	Сумма прибыли
$P < X1$	$–(X1 – P)+i$
$X1 \leq P \leq X2$	$+i$
$P > X2$	$P – X2 + i$

Примечания

$X1$ – цена исполнения короткого пута;

$X2$ – цена исполнения длинного колла

Реверсивный «медвежий спред» представляет собой стратегию деривативного рынка, при которой осуществляется приобретение опциона пут с более низкой ценой страйка и одновременно реализуется продажа опциона колл с более высокой ценой страйка. Графическое отображение данной комбинации можно проследить на рисунке 6.22. Данная тактика применяется инвестором, если прогнозируется общее снижение стоимости актива, при этом главная цель стратегии – генерация дохода в пределах ценового коридора $X1$–$X2$. Для вычисления возможных выплат по этой стратегии удобно использовать данные, представленные в таблице 6.8.

С использованием двух производных инструментов можно создать синтетическую позицию, имитирующую прямую покупку или продажу актива.

а) Инвестор может принять стратегию, заключающуюся в одновременной покупке опциона колл и продаже опциона пут при идентичных условиях – с равной ценой страйка и одинаковым сроком до истечения. Такая комбинация моделирует динамику владения акцией (рисунок 6.22).

Таблица 6.8 – Прибыль по позиции обратный «спред медведя»

Цена акции	Сумма прибыли
$P < X1$	$X1 - P + i$
$X1 \leq P \leq X2$	$+i$
$P > X2$	$-(P - X2)+i$

Примечания

$X1$ – цена исполнения длинного пута;

$X2$ – цена исполнения короткого колла

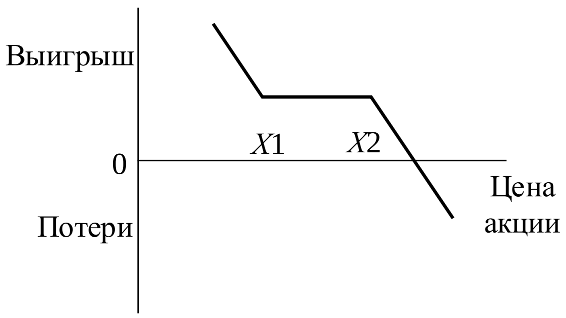


Рисунок 6.22 – Обратный «медвежий спред»

В случае если к моменту истечения опционов рыночная цена актива (P) превысит установленную цену страйка (X), пут-опцион останется неиспользованным, а инвестор зафиксирует прибыль по колл-опциону. Однако если рыночная цена окажется ниже цены исполнения, пут-опцион будет исполнен, что приведет к финансовым потерям для инвестора.

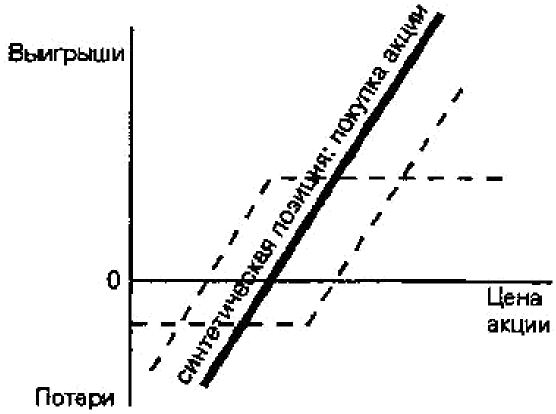


Рисунок 6.23 – Длинный колл и короткий пут. Синтетическая позиция: покупка акции

Как представлено на рисунке 6.23, в данной конструкции премия от проданного опциона пут превышает премию, выплаченную за приобретение опциона колл. В результате, формируя такую синтетическую позицию, инвестор фиксирует доход, равный разнице между этими премиями. В отличие от прямой покупки актива данный доход формируется сразу на этапе открытия позиции. В случае если бы премия колл-опциона оказалась выше премии пут-опциона, инвестор столкнулся бы с убытками, соответствующими разнице премий на момент формирования позиции.

б) При одновременной продаже опциона колл и покупке опциона пут создается синтетическая структура, эквивалентная короткой позиции по активу (рисунок 6.24).

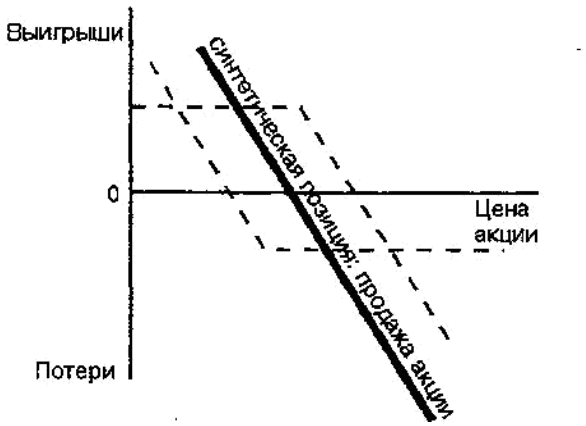


Рисунок 6.24 – Длинный пут, короткий колл. Синтетическая позиция: продажа акции

Бэкспред формируется с помощью одновременной покупки и продажи опционов колл или пут, имеющих одинаковый срок истечения. При этом количество купленных опционов превышает количество проданных.

В случае бэкспреда с опционами колл покупаются опционы с более высокой ценой исполнения, а продаются – с более низкой (рисунок 6.25). Для бэкспреда на основе опционов пут приобретаются опционы с более низкой ценой исполнения, а продаются – с более высокой (рисунок 6.26).

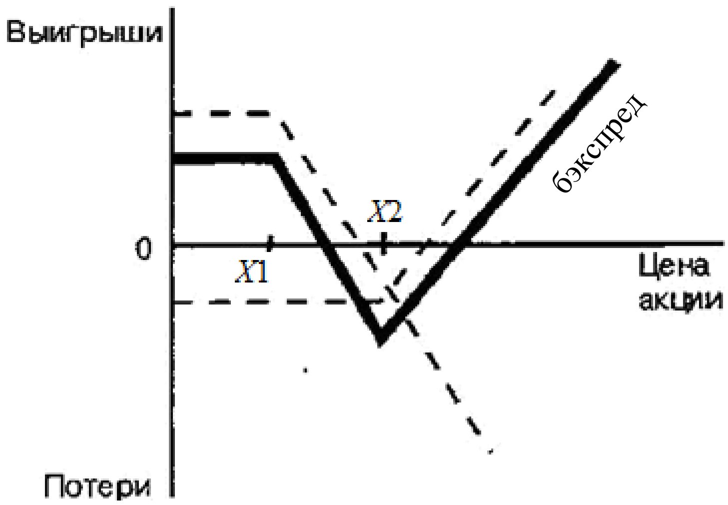


Рисунок 6.25 – Бэкспред: опционы колл

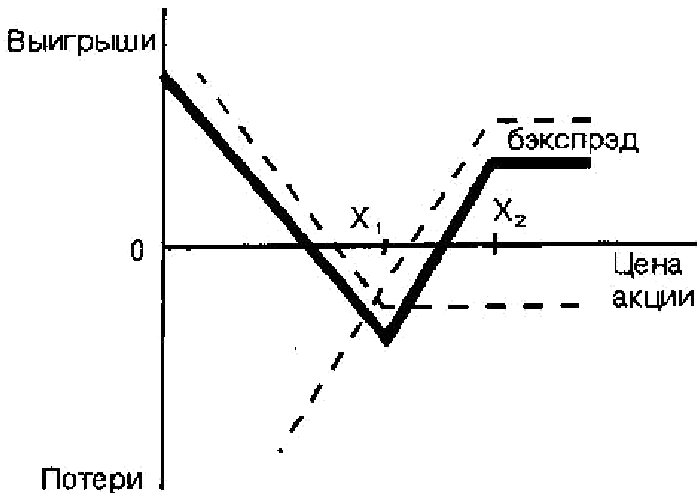


Рисунок 6.26 – Бэкспред: опционы пут

При формировании бэкспреда общая премия за проданные опционы превышает ту, что уплачена за купленные. Как видно на рисунках 6.25 и 6.26, такая стратегия принесет прибыль инвестору, если цена акций значительно возрастет или упадет. Однако если цена останется относительно стабильной, инвестор понесет убытки. Бэкспред на опционах колл используют, когда ожидается рост акций, поскольку эта стратегия предоставляет неограниченный потенциал прибыли при повышении цены. В то же время бэкспред на опционах пут применяется при ожидании снижения акций.

Рейтио-спред – противоположная бэкспреду стратегия, часто называемая вертикальным спредом. Здесь инвестор продает большее количество опционов, чем покупает. На рисунке 6.27 представлен рейтио-спред на опционах колл: продаются опционы с более высокой ценой исполнения, а покупаются – с более низкой. Рейтио-спред на опционах пут показан на рисунке 6.28: покупаются опционы с более высокой ценой исполнения, а продаются – с более низкой.

Эта стратегия используется, если инвестор ожидает, что цена акций останется стабильной. Он выберет рейтио-спред на опционах колл, если предполагает, что цены скорее упадут, и на опционах пут, если ожидает повышения цены.

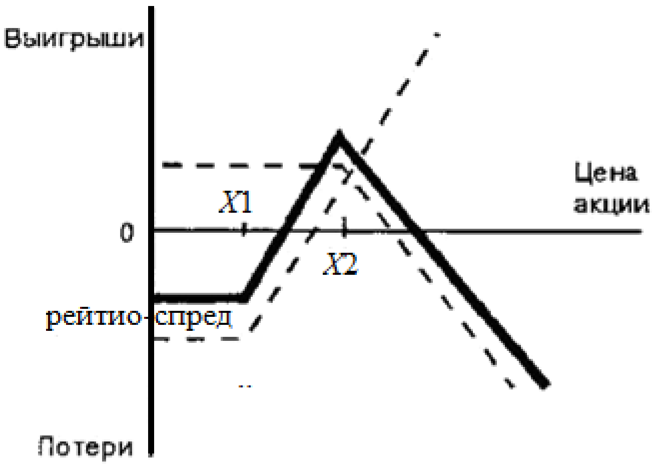


Рисунок 6.27 – Рейтио-спред: опцион колл

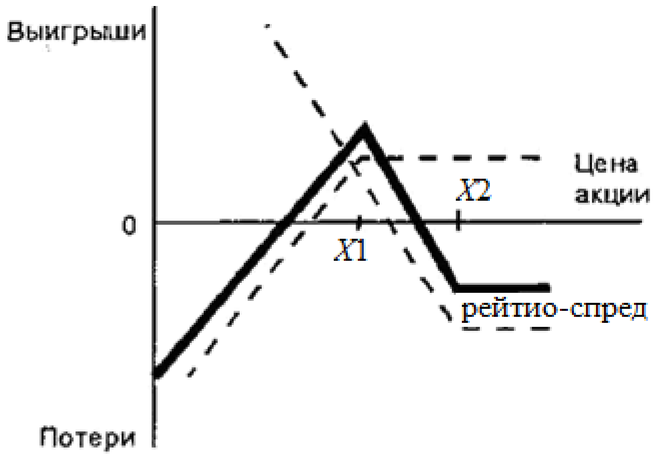


Рисунок 6.28 – Рейтио-спред: опцион пут

Опционная стратегия «*бабочка*», также называемая «сэндвич», представляет собой конструкцию из трех опционов с разными ценами исполнения, но с одинаковым сроком их истечения. Для формирования такой позиции инвестор приобретает один колл-опцион с более низкой ценой страйка

($X1$) и один колл-опцион с более высокой ценой страйка ($X3$), при этом продавая два колл-опциона с промежуточной ценой исполнения ($X2$), где выполняется соотношение: $X3 - X2 = X2 - X1$. Как правило, цена страйка $X2$ близка к текущей рыночной стоимости актива на момент заключения сделки.

Эта стратегия требует минимального первоначального капитала и оптимальна, когда инвестор прогнозирует незначительные колебания цены акций. Прибыль ожидается, если рыночная цена останется близкой к $X2$; при значительном росте или падении цены возможны умеренные убытки. График данной стратегии представлен на рисунке 6.29, а для анализа прибыли и убытков можно использовать данные из таблицы 6.9.

Таблица 6.8 – Прибыль по позиции спред «бабочка»

Цена акции	Сумма прибыли
$P \leq X1$	$-i$
$X1 < P \leq X2$	$P - X1 - i$
$X2 < P \leq X3$	$X3 - P - i$
$P > X3$	$-i$

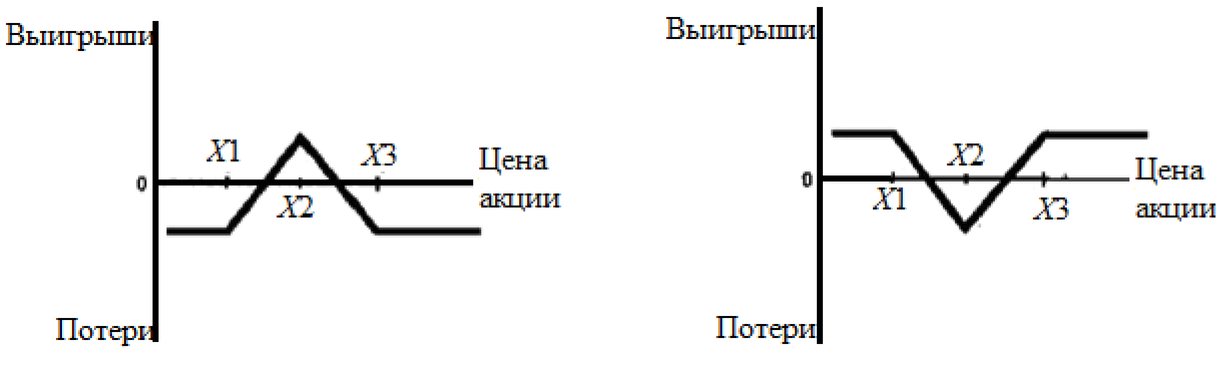
Примечания

$X1$ – цена исполнения длинного колла;

$X2$ – цена исполнения коротких коллов;

$X3$ – цена исполнения длинного колла

Спред «бабочку» можно создать также с помощью опционов пут. При таком сочетании инвестор покупает один опцион пут с более низкой ценой исполнения $X1$, один опцион пут с более высокой ценой исполнения $X3$ и продает два опциона пут с ценой исполнения $X2$, лежащей посередине между $X1$ и $X3$. Мы рассмотрели длинный спред «бабочка».



а *б*

Рисунок 6.29 – Длинный (*а*) и короткий (*б*) спред «бабочка»

Существует возможность создания «бабочки» в виде короткой позиции. В этом случае инвестор реализует продажу опционов с ценами исполнения $X1$ и $X3$, одновременно приобретая два опциона с промежуточной ценой страйка $X2$. Графическая иллюстрация данной конструкции представлена на рисунке 29. Этот подход обеспечивает инвестору умеренную прибыль в случае существенных колебаний рыночной цены акций и ограничивает убытки, если изменения цен будут минимальными.

Как видно на рисунке 6.29, длинная позиция в «бабочке» напоминает короткую стратегию «стеллаж», но имеет преимущество в виде ограниченного риска при резких изменениях цены актива. Короткий спред «бабочка», в свою очередь, аналогичен длинной позиции в «стеллаже», но имеет ограничение по возможной прибыли для инвестора.

Кроме того, «бабочку» можно сформировать, комбинируя «бычий» и «медвежий» спреды, где один из опционов имеет идентичную цену страйка (рисунки 6.30 и 6.31).

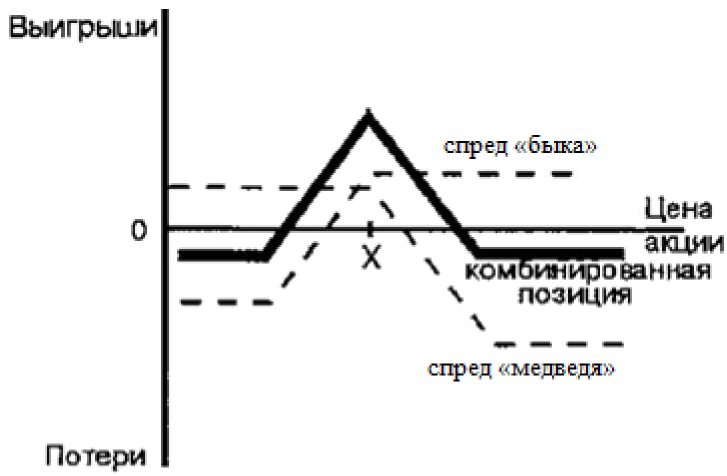


Рисунок 6.30 – Длинный спред «бабочка»

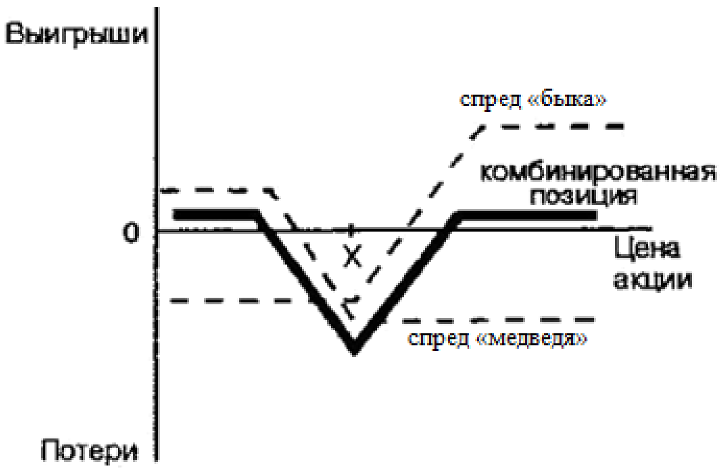


Рисунок 6.31 – Короткий спред «бабочка»

Опционная стратегия *спред «кондор»* формируется путем приобретения колл-опциона с самой низкой ценой страйка $X1$, продажи двух колл-опционов с промежуточными, но различными ценами исполнения $X2$ и $X3$, и покупки колл-опциона с еще более высокой ценой страйка X4, при этом соблюдается условие: $X4 – X3 = X2 – X1$. На рисунке 6.32 представлена структура длинного спреда «кондор».

Эта стратегия ограничивает потенциальные убытки при значительных колебаниях рыночной цены акций, но также ограничивает и возможную прибыль в случае умеренных ценовых изменений. Конструкция напоминает стрэнгл, но имеет преимущество в виде защиты от крупных потерь. Для вычисления ожидаемой прибыли и убытков по данной стратегии может быть полезна таблица 6.9.

Таблица 6.9 – Прибыль по длинному спреду «кондор»

Цена акции	Сумма прибыли
$P \le X1$	$-i$
$X1 < P < X2$	$P - X1 - i$
$X2 < P \le X3$	$X2 - X1 - i$*
$X3 < P < X4$	$X4 - P - i$**
$P \ge X4$	$-i$***

Примечания

$X1$, $X4$ – цены исполнения длинных коллов;

$X2$, $X3$ – цены исполнения коротких коллов.

* $(P - X1) - (P - X2) - i = X2 - X1 - i$

** $(P - X1) - (P - X2) - (P - X3) - i = (X3 + X2 - X1) - P - i = X4 - P - i$

*** $(P - X1) - (P - X2) - (P - X3) + (P - X4) - i = 0 - i$

В обратном порядке, т. е. с помощью короткого колла, двух длинных коллов и короткого колла, может быть построен короткий спред «кондор». Он показан на рисунке 6.32. Данный спред можно построить также с помощью опционов пут.

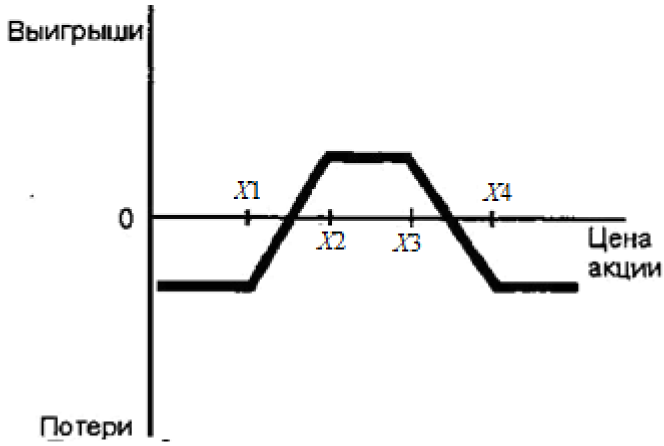


Рисунок 6.32 – Длинный спред «кондор»

Горизонтальный спред – это стратегия, в основе которой лежит одновременная продажа и покупка колл-опционов с идентичной ценой исполнения, но разными сроками истечения. При этом опцион с более продолжительным сроком до истечения покупается, а с меньшим сроком – продается. Поскольку опционы с более отдаленными датами стоят дороже, такая позиция требует первоначальных вложений. Когда инвестор использует данную конструкцию, говорят, что он «покупает спред», а сам подход называют длинным временным спредом.

Графическое представление этой стратегии можно увидеть на рисунке 6.33, на котором также показан пример, когда долгосрочный колл продается после истечения краткосрочного. По структуре данная стратегия напоминает спред типа «бабочка».

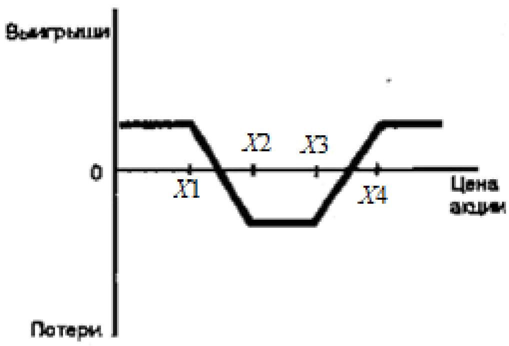


Рисунок 6.33 – Короткий спред «кондор»

В случае если на дату истечения краткосрочного колл-опциона цена акций существенно ниже цены страйка, этот опцион не будет исполнен, а стоимость долгосрочного колл-опциона снизится почти до нуля. Это приведет к убыткам, примерно равным первоначальным затратам на создание спреда. Если же цена акций значительно превышает цену исполнения, инвестор столкнется с убытками, равными разнице между рыночной ценой акций (P) и ценой страйка (X), так как контрагент исполнит короткий колл-опцион. При этом, хотя длинный колл-опцион также может быть исполнен, для американского опциона это решение не является оптимальным, и его стоимость лишь немного превышает разницу $P - X$. Следовательно, убытки инвестора будут ненамного меньше начальных вложений.

Когда цена акций близка к цене исполнения или отклоняется от нее незначительно, короткий колл-опцион либо останется неисполненным, либо приведет к минимальным убыткам. Одновременно с этим длинный колл-опцион сохраняет потенциал для получения прибыли, увеличивая свою стоимость. Таким образом, прибыль вероятна при умеренных отклонениях цены акций от страйка, тогда как убытки возникают при резких изменениях.

Горизонтальный спред также можно создать с пут-опционами, продавая краткосрочный пут и покупая долгосрочный пут (рисунок 6.34). Если цена страйка опциона близка к текущей рыночной цене акций на момент создания спреда, его называют нейтральным. Если цена исполнения ниже рыночной, то это «медвежий» горизонтальный спред; если выше – «бычий». «Бычий» спред подходит при ожидании роста цены акций, а «медвежий» – при прогнозе снижения.

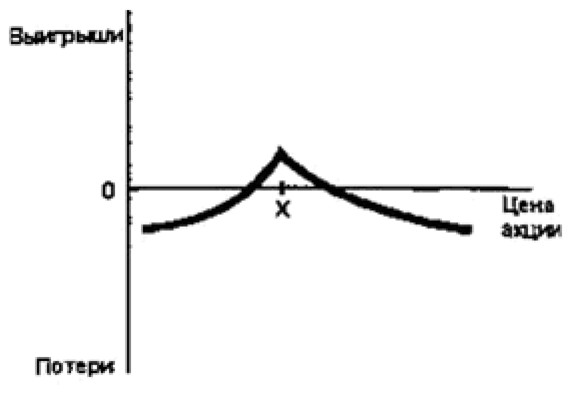


Рисунок 6.34 – Горизонтальный спред (сочетание двух путов)

Кроме того, возможен обратный временной спред, при котором приобретается опцион с более коротким сроком истечения и продается – с более длинным. Такой подход не требует начальных вложений, так как долгосрочный опцион имеет более высокую стоимость. В этом случае говорят, что инвестор «продает спред». Как показано на рисунке 6.35, этот метод позволяет получить прибыль при значительных изменениях рыночной цены, но ведет к убыткам при небольших отклонениях от цены страйка.

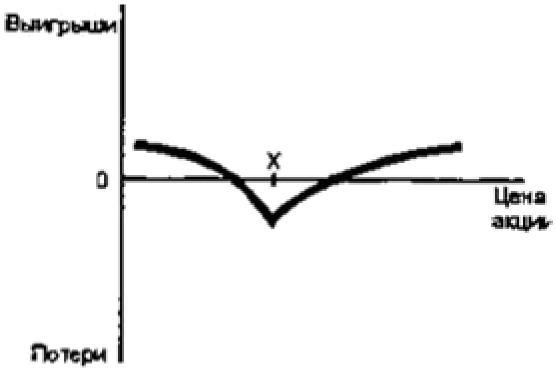


Рисунок 6.35 – Обратный горизонтальный спред

Чаще всего временной спред включает покупку одного опциона и продажу другого. Однако, исходя из рыночных ожиданий, инвестор может менять эту пропорцию для более точной адаптации стратегии.

Инвестор, применяющий длинный временной спред (будь то с колл- или пут-опционами), обычно ориентируется на стабилизацию рыночной ситуации, без существенных колебаний цен. По мере приближения даты истечения опцион с ближайшим сроком истечения, как правило, теряет свою временную стоимость быстрее, чем опцион с более дальним сроком. В случае резкого роста цены актива временная стоимость обоих опционов снижается, и они начинают оцениваться исходя из внутренней стоимости, независимо от их сроков действия. В таких условиях прибыль для инвестора оказывается незначительной. При падении стоимости акций временная составляющая также убывает, и при сильном снижении цены оба опциона практически полностью теряют временную стоимость.

Наиболее благоприятный сценарий для длинного временного спреда: когда к дате истечения ближайшего опциона его стоимость падает до нуля, в то время как опцион с более поздним сроком сохраняет временную стоимость. В то же время инвестор, продающий календарный спред, нацелен на значительные колебания цен, при которых оба опциона максимально быстро теряют временную стоимость.

Решение о создании временного спреда зависит от оценки волатильности. Если волатильность растет, премии опционов увеличиваются, причем опцион с более долгим сроком истечения дорожает быстрее. При снижении волатильности наблюдается обратный эффект: цена короткого опциона падает быстрее. Инвестор, купивший временной спред, может столкнуться с убытками при резких изменениях цены акций, но, если волатильность также возрастет, убытки могут быть компенсированы.

Если же на рынке не будет значительных изменений, но волатильность снизится, инвестор может понести убытки, так как цена опциона с более долгим сроком упадет быстрее. Таким образом, при выборе временного спреда необходимо учитывать не только возможное изменение цен, но и динамику волатильности. Инвестор ожидает двух противоположных условий: стабильности цены и ожидания будущих изменений, так как именно это способствует росту волатильности.

Такой сценарий может возникнуть, например, перед объявлением финансовых результатов компании, когда курс акций стабилен, но ожидаемая волатильность возрастает. Аналогичная ситуация возможна перед важными экономическими событиями, такими как встреча министров финансов, когда рынок сохраняет стабильность, но волатильность возрастает в ожидании исхода.

Для длинного временного спреда наиболее выгодной является ситуация, когда волатильность базового актива остается неизменной, а ожидаемая волатильность опционов увеличивается. Для короткого временного спреда оптимальна ситуация, когда волатильность актива резко изменяется, а ожидаемая волатильность опционов снижается.

В отличие от календарного спреда, для вертикального спреда важно, чтобы волатильность актива и опционов изменялась в одном направлении. Что касается диагонального спреда, то он может иметь характеристики как временного, так и вертикального спреда в зависимости от конкретной ситуации, и каждый случай требует отдельного анализа.

6.5 Задачи для самостоятельной работы

1. По Формуле Блэка – Шоулза рассчитать цену опциона колл и фьючерса, а затем найти цену опциона пут. Сгенерировать убывающие цены на годовой период (52 недели) и рассчитать стоимость инвестиционного портфеля с активным управлением и пассивным управлением. Построить график стоимостей инвестиционного портфеля, используя данные таблицы 6.8.

Таблица 6.8 – Исходные данные для вариантов 1–8

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
T	10	10	10	10	10	10	10	10
r	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
σ	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05
S	100	100	100	100	100	100	100	100
X	100	100	60	60	80	80	70	70

2. По Формуле Блэка – Шоулза рассчитать цену опциона пут и фьючерса, а затем найти цену опциона колл. Сгенерировать растущие цены на годовой период (52 недели) и рассчитать стоимость инвестиционного портфеля с активным и пассивным управлением. Построить график стоимостей инвестиционного портфеля, используя данные таблицы 6.9.

Таблица 6.9 – Исходные данные для вариантов 9–16

Вариант	9	10	11	12	13	14	15	16
T	10	10	10	10	10	10	10	10
r	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
σ	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05	0,1	0,05
S	100	100	100	100	100	100	100	100
X	100	100	60	60	80	80	70	70

Тема 7. Количественные методы анализа рынка ценных бумаг

7.1 Прогнозирование цены акций на рынке ценных бумаг в Excel. Модель Auto Regression

Рассмотрим применение авторегрессионной модели для прогнозирования курса акций компании «Лукойл». Этот метод, известный как авторегрессия (*AR*, от англ. AutoRegressive), используется в финансовом анализе для моделирования и прогнозирования временных рядов. Модель *AR* относится к классу регрессионных методов и позволяет предсказывать значения на основе их предыдущих значений. В качестве примера используем модель авторегрессии первого порядка, *AR*(1), которая описывает степень зависимости текущего значения временного ряда от предыдущего.

Модель *AR*(1) можно представить следующей формулой:

$$Y_i = \alpha + \beta \cdot Y_{i-1} + \varepsilon\,,$$

где β, α – коэффициенты авторегрессии;

ε – белый шум, независимая случайная величина»;

Y_{i-1} – предыдущее значение временного ряда;

Y_i – текущее значение временного ряда.

Для выполнения прогноза по этой модели воспользуемся Microsoft Excel. В качестве примера спрогнозируем стоимость акций «Лукойл» (тикер LKOH) на несколько будущих периодов. Построение модели авторегрессии по своему алгоритму схоже с автокорреляцией. В данном случае будем использовать данные о дневных котировках акций за май 2022 года, взятые с Московской биржи (ММВБ).

Для анализа экспортируем котировки с сайта finam.ru за указанный период, в результате получим 18 значений. Экспортируемые данные в Excel будут представлены так, как показано на рисунке 7.1.

	A	B	C
1	<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>
2	LKOH	20220504	4552
3	LKOH	20220505	4675
4	LKOH	20220506	4635,5
5	LKOH	20220511	4600
6	LKOH	20220512	4362,5
7	LKOH	20220513	4380
8	LKOH	20220516	4523,5

Рисунок 7.1 – Исходные данные

График ценной бумаги представляет собой ярко выраженный убывающий тренд (рисунок 7.2).

Рисунок 7.2 – График цен закрытия

Построим прогноз стоимости этой акции на следующие три дня. Для этого определим авторегрессионную зависимость нашего ценового ряда, т. е. степень корреляции между последовательными значениями цен. Чтобы подготовить данные, скопируем временной ряд с однодневным сдвигом и вставим в столбец «D» (рисунок 7.3).

	A	B	C	D
1	<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>	
2	LKOH	20220504	4552	
3	LKOH	20220505	4675	4552
4	LKOH	20220506	4635,5	4675
5	LKOH	20220511	4600	4635,5
6	LKOH	20220512	4362,5	4600
7	LKOH	20220513	4380	4362,5
8	LKOH	20220516	4523,5	4380

Рисунок 7.3 – Подготовка данных для моделирования

Далее определим коэффициенты авторегрессии для ценового ряда акций «Лукойла». Для расчетов используем функцию «Анализ данных» в Excel, выбрав раздел «Регрессия». В поле «Входной интервал Y» указываем значения котировок из столбца «C», а в поле «Входной интервал X» – те же значения с однодневным сдвигом. Следует отметить, что последние данные в смещенном диапазоне «D20» и первые значения «C2» не включаются в анализ (рисунок 7.4).

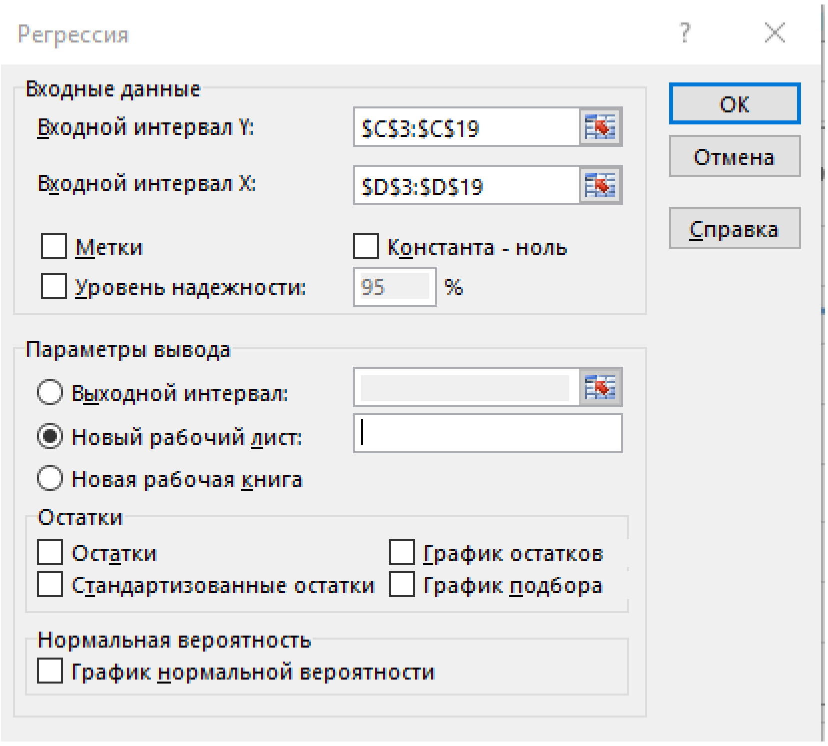


Рисунок 7.4 – Параметры инструмента «Регрессия»

После расчета появится отчет регрессионного анализа (рисунок 7.5). Коэффициент *R-квадрат* определяет качество модели: чем он выше, тем лучше модель отражает данные. Если *p-значение* меньше 5 %, это указывает на статистическую значимость коэффициентов *AR*(1). Нулевая значимость *F-критерия* свидетельствует о высокой надежности уравнения. Полученные коэффициенты, обозначенные как альфа (α) и бета (β), будут использоваться для расчета тренда.

ВЫВОД ИТОГОВ								
Регрессионная статистика								
Множественный R	0,821273265							
R-квадрат	0,774489775							
Нормированный R-квадрат	0,652789094							
Стандартная ошибка	126,5641039							
Наблюдения	17							
Дисперсионный анализ								
	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*			
Регрессия	1	497878,1787	497878,1787	31,08150179	5,30604E-05			
Остаток	15	240277,0861	16018,4724					
Итого	16	738155,2647						
	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 95,0%*	*Верхние 95,0%*
Y-пересечение	625,4297807	67,50441504	3,936967257	0,036172214	-797,3222014	2048,182	-797,322	2048,182
Переменная X 1	0,850337983	0,152524841	5,575078635	5,30604E-05	0,52523898	1,175437	0,525239	1,175437

Рисунок 7.5 – Результаты моделирования

Модель динамики ценной бумаги описывается следующим уравнением:

$$Y = 625{,}43 + 0{,}85 \cdot Y_{t-1}.$$

Теперь построим непосредственно сам прогноз по этой модели. Для этого в колонке «E» введем формулу нашей авторегрессии AR(1) (рисунок 7.6).

E3 fx =625,43+0,85*D3

	A	B	C	D	E
1	<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>		
2	LKOH	20220504	4552	Исходный ряд	Прогноз
3	LKOH	20220505	4675	4552	4494,63
4	LKOH	20220506	4635,5	4675	4599,18

Рисунок 7.6 – Расчет авторегрессии

Авторегрессионная модель строится до строки 23, где заканчиваются фактические данные по курсу «Лукойла». Дальнейший прогноз рассчитывается уже на основе предыдущих прогнозных значений, для чего в ячейке «D24» вводится формула, ссылающаяся на данные предыдущего прогноза: «D21» = «E20», «D22» = E21 и т. д. Прогнозируемые значения для периодов в ячейках «E21 – E23» рассчитываются на основе этих данных (рисунок 7.7).

	A	B	C	D	E
1	<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>		
2	LKOH	20220504	4552	Исходный ряд	Прогноз
3	LKOH	20220505	4675	4552,00	4494,63
4	LKOH	20220506	4635,5	4675,00	4599,18
5	LKOH	20220511	4600	4635,50	4565,61
6	LKOH	20220512	4362,5	4600,00	4535,43
7	LKOH	20220513	4380	4362,50	4333,56
8	LKOH	20220516	4523,5	4380,00	4348,43
9	LKOH	20220517	4500	4523,50	4470,41
10	LKOH	20220518	4483,5	4500,00	4450,43
11	LKOH	20220519	4415,5	4483,50	4436,41
12	LKOH	20220520	4279	4415,50	4378,61
13	LKOH	20220523	4050	4279,00	4262,58
14	LKOH	20220524	3942	4050,00	4067,93
15	LKOH	20220525	4148	3942,00	3976,13
16	LKOH	20220526	4263	4148,00	4151,23
17	LKOH	20220527	4290	4263,00	4248,98
18	LKOH	20220530	4220	4290,00	4271,93
19	LKOH	20220531	4061,5	4220,00	4212,43
20				4061,50	4077,71
21				4077,71	4091,48
22				4091,48	4103,19
23				4103,19	4113,14

Рисунок 7.7 – Прогнозирование

Построим значения исходного ряда и прогнозные значения на основе авторегрессии. Получится следующий график прогнозных значений (пунктирная линия) (рисунок 7.8).

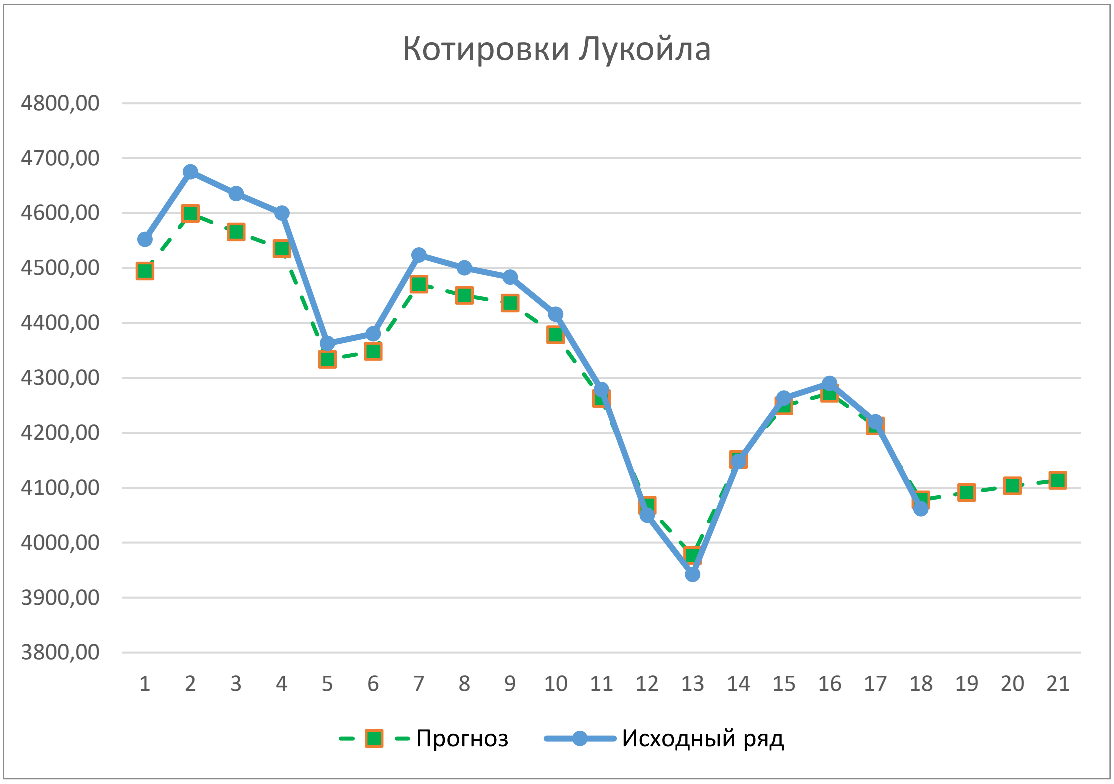


Рисунок 7.8 – График прогноза

Применение регрессионных методов позволяет создавать достаточно точные прогнозные модели. В данном случае мы использовали линейную регрессию для определения линейных трендов. Кроме того, для анализа движения стоимости акций можно использовать и другие виды трендов: экспоненциальные, логарифмические и полиномиальные.

7.2 Прогнозирование цены акций на рынке ценных бумаг в Excel. Модель Moving Average

Скользящее среднее, или просто **MA (Moving Average)**, представляет собой среднеарифметическое значение ряда цен за определенный интервал времени. Формула для расчета скользящего среднего выглядит так:

$$MA_i(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

где MA – скользящее среднее;

m – период усреднения;

X – значения цены акции.

Скользящее среднее позволяет спрогнозировать будущую цену актива, принимая за основу среднее значение ряда цен за предыдущий период. Так, прогноз цены на следующий период будет равен текущему значению скользящего среднего:

$$\widehat{X}_{i+1} = MA_i.$$

Рассмотрим прогнозирование стоимости акций Apple Inc (US1.AAPL) с использованием модели скользящего среднего. Для анализа выгрузим котировки акций с finam.ru за первое полугодие 2022 года (рисунок 7.9). Будет получено 22 значения котировок.

	A	B	C
1	<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>
2	US1.AAPL	03.01.2022	172,19
3	US1.AAPL	10.01.2022	173,06
4	US1.AAPL	17.01.2022	162,39
5	US1.AAPL	24.01.2022	170,34
6	US1.AAPL	31.01.2022	172,27
7	US1.AAPL	07.02.2022	168,4
8	US1.AAPL	14.02.2022	167,38
9	US1.AAPL	21.02.2022	164,88
10	US1.AAPL	28.02.2022	163,21
11	US1.AAPL	07.03.2022	154,73
12	US1.AAPL	14.03.2022	163,98
13	US1.AAPL	21.03.2022	174,56
14	US1.AAPL	28.03.2022	174,27

Рисунок 7.9 – Исходные данные стоимости акций Apple Inc

График стоимости акций Apple Inc за выбранный промежуток времени представлен на рисунке 7.10.

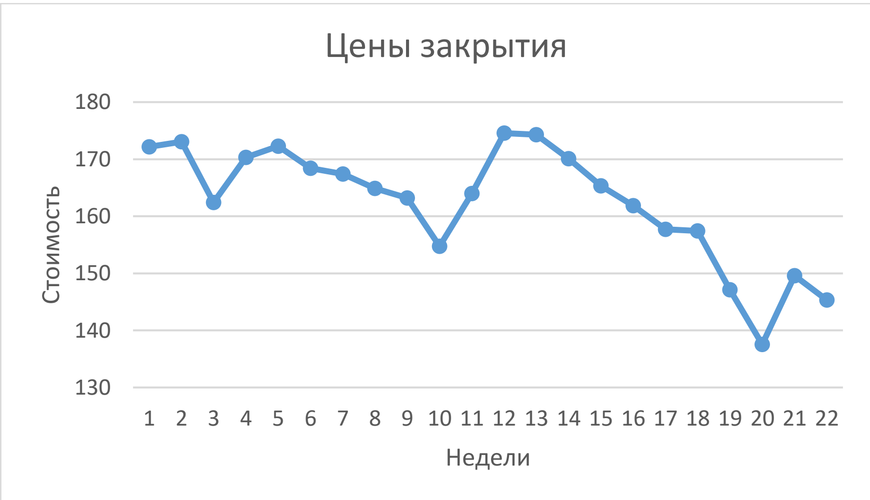


Рисунок 7.10 – График изменения стоимости акций Apple Inc

Выбор периода усреднения *n* в модели скользящего среднего. При слишком большом значении периода усреднения в модели $MA(n)$ возможно чрезмерное сглаживание, что снижает точность прогноза, поскольку нивелируются значимые изменения ценового ряда. Напротив, слишком короткий период приводит к повышенной чувствительности модели к шуму. Оптимальное значение периода обычно определяется на основании анализа исторических данных.

Для построения скользящего среднего с периодом усреднения три месяца $MA(3)$ в Excel используем следующую формулу:

= СРЗНАЧ(С2:С4) .

В колонке «D» рассчитаны значения скользящего среднего с периодом усреднения 3 (рисунок 7.11).

	A	B	C	D
1	**Название**	**Дата**	**Close**	**MA(3)**
2	AFLT	01.01.2009	23.3	
3	AFLT	01.02.2009	26.56	
4	AFLT	01.03.2009	39.65	29.83667
5	AFLT	01.04.2009	33.96	33.39
6	AFLT	01.05.2009	35.15	36.25333
7	AFLT	01.06.2009	33.87	34.32667

Рисунок 7.11 – Результат расчета $MA(3)$

После расчета *MA* можно спрогнозировать цену на три следующих периода, где начальное прогнозное значение приравнивается к последнему рассчитанному значению скользящего среднего. Прогнозируемые значения находятся в столбце «С». Формулы для расчета:

С24 = D23,

С25 = D24 и т. д.

Прогноз по *MA* также учитывает дальнейшие изменения, где каждое новое значение строится по ранее рассчитанному *MA* (рисунок 7.12).

	A	B	C	D
1	<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>	MA(3)
2	US1.AAPL	03.01.2022	172,19	
3	US1.AAPL	10.01.2022	173,06	
4	US1.AAPL	17.01.2022	162,39	169,213
5	US1.AAPL	24.01.2022	170,34	168,597
6	US1.AAPL	31.01.2022	172,27	168,333
7	US1.AAPL	07.02.2022	168,4	170,337
8	US1.AAPL	14.02.2022	167,38	169,35
9	US1.AAPL	21.02.2022	164,88	166,887
10	US1.AAPL	28.02.2022	163,21	165,157
11	US1.AAPL	07.03.2022	154,73	160,94
12	US1.AAPL	14.03.2022	163,98	160,64
13	US1.AAPL	21.03.2022	174,56	164,423
14	US1.AAPL	28.03.2022	174,27	170,937
15	US1.AAPL	04.04.2022	170,1	172,977
16	US1.AAPL	11.04.2022	165,35	169,907
17	US1.AAPL	18.04.2022	161,83	165,76
18	US1.AAPL	25.04.2022	157,69	161,623
19	US1.AAPL	02.05.2022	157,43	158,983
20	US1.AAPL	09.05.2022	147,13	154,083
21	US1.AAPL	16.05.2022	137,56	147,373
22	US1.AAPL	23.05.2022	149,58	144,757
23	US1.AAPL	30.05.2022	145,31	144,15
24			144,15	146,347
25			146,347	145,269
26			145,269	145,255

Рисунок 7.12 – Прогнозирование *MA*

Используя *MA*(3), спрогнозируем стоимость акций Apple Inc на следующие три месяца. График и значения прогнозируемых цен представлены на рисунке 7.13.

Модель скользящего среднего *MA*(*q*) может быть полезной для прогнозирования временных рядов, в том числе для цен акций. Поскольку *MA* является линейной моделью, она лучше подходит для анализа активов с относительно низкой волатильностью. На рынках с выраженной нелинейностью (как, например, российский фондовый рынок) эффективность этой модели снижается, и точность прогнозов может уменьшаться.

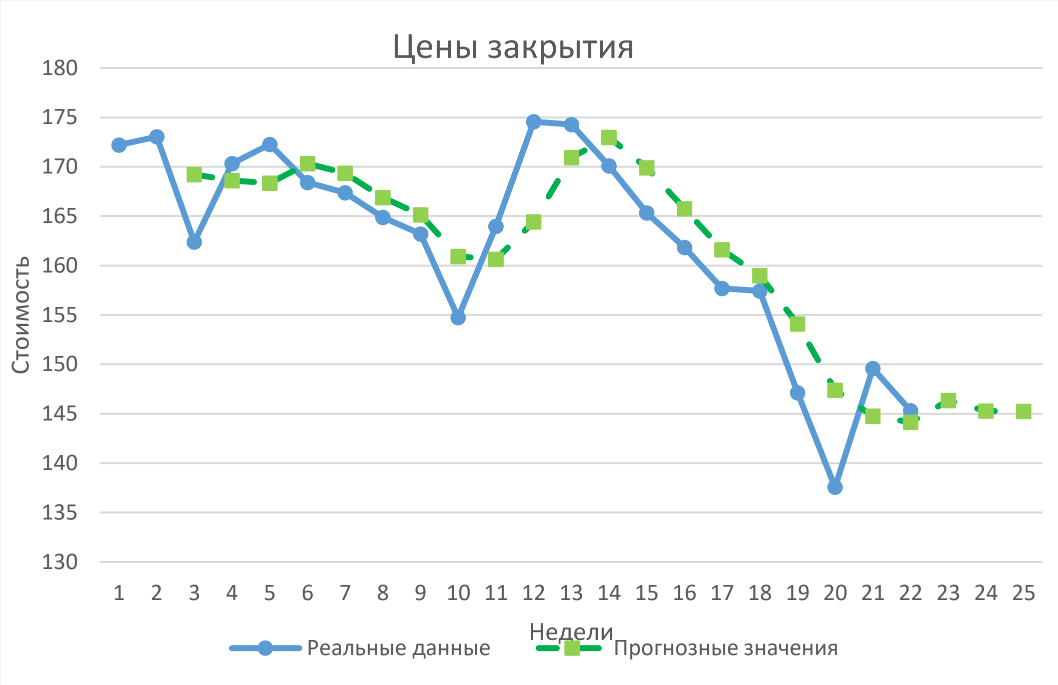


Рисунок 7.13 – График прогноза стоимости акций Apple Inc

7.3 Расчет критерия риска ценных бумаг с помощью моделирования. Пример в Excel

Для оценки рисков инвестиционные компании используют показатель Value at Risk (VAR), который определяет потенциальные потери с заданной вероятностью в определенный период времени. Для вычисления VAR существует несколько подходов:

1) параметрический метод (или метод ковариации);

2) исторический метод (дельта-нормальный, часто выполняется вручную);

3) метод Монте-Карло.

Для расчета VAR с использованием дельта-нормального метода рекомендуется собрать достаточно длинную выборку данных по рисковому фактору (не менее 250 наблюдений, согласно рекомендациям Банка международных расчетов) для улучшения точности. Например, для анализа можно взять двухлетние котировки акций «Яндекса» (рисунок 7.14).

	A	B	C
1	<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>
2	US1.YNDX	01.06.2020	40,85
3	US1.YNDX	02.06.2020	41
4	US1.YNDX	03.06.2020	41,46
5	US1.YNDX	04.06.2020	41,3
6	US1.YNDX	05.06.2020	42,33
7	US1.YNDX	08.06.2020	42,43
8	US1.YNDX	09.06.2020	42

Рисунок 7.14 – Исходные данные для расчета доходности по акциям «Яндекс»

Доходность по акциям рассчитывается как логарифм отношения текущей цены к предыдущей:

$$Д = \ln \frac{P_i}{P_{i-1}},$$

где Д – дневная доходность;

P_i – текущая стоимость акции;

P_{i-1} – вчерашняя доходность акции.

Метод VAR, рассчитанный с помощью дельта-нормального подхода, является корректным только при условии, что факторы риска следуют нормальному (гауссовому) распределению. Для проверки нормальности распределения доходностей акций можно использовать такие статистические тесты, как критерий Пирсона или Колмогорова – Смирнова. В Excel это можно рассчитать с помощью следующей формулы:

= LN((C3)/C2).

Полученная таблица представлена на рисунке 7.15.

D3 fx =LN(C3/C2)

	A	B	C	D	E
1	<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>	Доходность	
2	US1.YNDX	01.06.2020	40,85		
3	US1.YNDX	02.06.2020	41	0,37%	
4	US1.YNDX	03.06.2020	41,46	1,12%	
5	US1.YNDX	04.06.2020	41,3	-0,39%	
6	US1.YNDX	05.06.2020	42,33	2,46%	
7	US1.YNDX	08.06.2020	42,43	0,24%	
8	US1.YNDX	09.06.2020	42	-1,02%	

Рисунок 7.15 – Расчет доходности акций «Яндекс»

Вычислим среднее значение доходности (математическое ожидание) и стандартное отклонение доходности по всему периоду, используя формулы Excel:

- математическое ожидание: =СРЗНАЧ(D2:D391),
- стандартное отклонение: =СТАНДОТКЛОН(D2:D391).

Результаты расчетов представлены на рисунке 7.16.

	A	B	C	D	E	F	G
1	<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>	Доходность		Мат.ожид.	Станд.отклон
2	US1.YNDX	01.06.2020	40,85			-0,08%	2,77%
3	US1.YNDX	02.06.2020	41	0,37%			

Рисунок 7.16 – Расчет характеристик стоимостей ценных бумаг

Квантиль определяет значение функции нормального распределения при заданной вероятности и используется для оценки риска убытков на основе вероятности. Например, значение с вероятностью 99 % показывает, что убытки по акциям не превысят этого уровня. В Excel квантиль рассчитывается по формуле

= НОРМОБР(1 %;F2;G2) .

Полученный результат представлен на рисунке 7.17.

	A	B	C	D	E	F	G
1	<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>	Доходность		Мат.ожид.	Станд.отклон
2	US1.YNDX	01.06.2020	40,85			-0,08%	2,77%
3	US1.YNDX	02.06.2020	41	0,37%			
4	US1.YNDX	03.06.2020	41,46	1,12%		Квантиль	
5	US1.YNDX	04.06.2020	41,3	-0,39%		-0,07	

Рисунок 7.17 – Расчет квантиля

Для прогнозирования цены акций на следующий день с вероятностью 99% умножим текущее значение стоимости акций на квантиль, сложенный с единицей:

$$X_{t+1} = (Q + 1)X_t,$$

где Q – значение квантиля для нормального распределения акции «Яндекс»;

X_t – значение доходности акции в текущий момент времени;

X_{t+1} – значение доходности в следующий момент времени.

Для расчета стоимости акции на несколько дней вперед с заданной вероятностью воспользуемся следующей формулой:

$$X_{t+1} = X_t(1 + Q\sqrt{n}),$$

где Q – значение квантиля для нормального распределения акции «Яндекс»;

X_t – значение доходности акции в текущий момент времени;

X_{t+1} – значение отклонения доходности в следующий момент времени;

n – количество дней вперед.

Формулы расчета VAR на один день VAR(1) и на пять VAR(5) дней вперед производится по формулам:

X(1) = (F5 + 1)*C441 ,

X(5) = (КОРЕНЬ(5)*F5 + 1)*C441 .

Расчет значения цены акции с вероятностью 99 % при убытках показан на рисунке 7.18.

	A	B	C	D	E	F	G
1	<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>	Доходность		Мат.ожид.	Станд.отклон
2	US1.YNDX	01.06.2020	40,85			-0,08%	2,77%
3	US1.YNDX	02.06.2020	41	0,37%			
4	US1.YNDX	03.06.2020	41,46	1,12%		Квантиль	
5	US1.YNDX	04.06.2020	41,3	-0,39%		-0,07	
6	US1.YNDX	05.06.2020	42,33	2,46%			
7	US1.YNDX	08.06.2020	42,43	0,24%		X(1)	17,70394995
8	US1.YNDX	09.06.2020	42	-1,02%		X(5)	16,17610806

Рисунок 7.18 – Расчет цена акции «Яндекс» при убытках

На рисунке 7.19 показан расчет с 99 % вероятностью для акций «Яндекса». Значение X(1) = 17,7 означает, что курс акций на следующий день с вероятностью 99 % не превысит 17,7 долл., а X(5) указывает, что за пять дней с вероятностью 99 % курс не упадет ниже 16,17 долл.

Для определения абсолютной и относительной величины убытков можно использовать следующие формулы в Excel:

= C392-G7 = G11/C392 ,

= C392-G8 = G12/C392 .

Эти расчеты показывают, что убытки по акциям «Яндекс» с вероятностью 99 % не превысят 1,24 долл.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<TICKER>	<DATE>	<CLOSE>	Доходность		Мат.ожид.	Станд.отклон	
2	US1.YNDX	01.06.2020	40,85			-0,08%	2,77%	
3	US1.YNDX	02.06.2020	41	0,37%				
4	US1.YNDX	03.06.2020	41,46	1,12%		Квантиль		
5	US1.YNDX	04.06.2020	41,3	-0,39%		-0,07		
6	US1.YNDX	05.06.2020	42,33	2,46%				
7	US1.YNDX	08.06.2020	42,43	0,24%		X(1)	17,70394995	
8	US1.YNDX	09.06.2020	42	-1,02%		X(5)	16,17610806	
9	US1.YNDX	10.06.2020	42,19	0,45%				
10	US1.YNDX	11.06.2020	40,29	-4,61%			Абсолют.	%
11	US1.YNDX	12.06.2020	42,18	4,58%		Var(1)	$1,24	2,02%
12	US1.YNDX	15.06.2020	42,87	1,62%		Var(5)	$2,76	4,52%
13	US1.YNDX	16.06.2020	43,5	1,46%				

Рисунок 7.19 – Результат расчетов VAR(1) и VAR(5)

Расчет показателя VAR ручным способом. Для ручного расчета создаем новый лист в Excel и определяем:

- максимальную доходность за период: =МАКС(Лист1!D3:D392),
- минимальную доходность: =МИН(Лист1!D3:D392),
- количество интервалов: N = 100,
- интервал группировки: (B1 – B2) / B3.

Результаты расчетов представлены на рисунке 7.20.

	A	B
1	Максимум	14,72%
2	Минимум	-14,61%
3	N	100
4	Int	0,002934

Рисунок 7.20 – Результат расчета параметров

Далее построим распределения доходностей для 100 интервалов. Расчет интервалов происходит по формуле

$$= E2+\$B\$4\,.$$

Результат расчета представлен на рисунке 7.21.

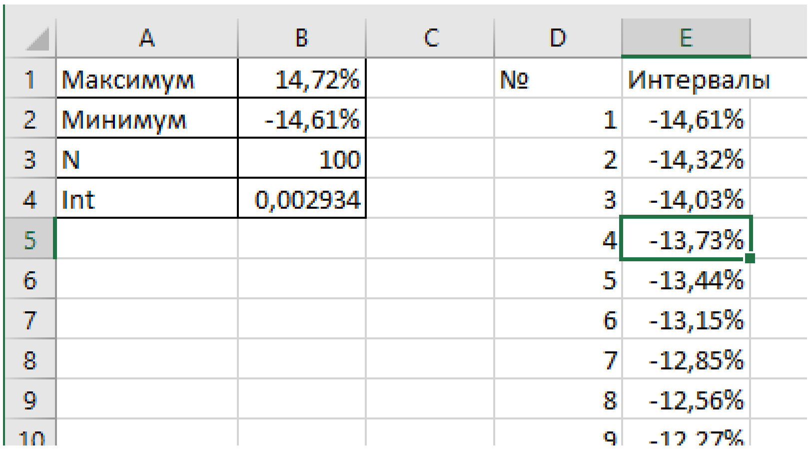


Рисунок 7.21 – Расчет интервалов

После построим гистограмму накопительной вероятности (рисунок 7.21). Для этого выберем «Данные» – «Анализ данных» – «Гистограмма».

Входной диапазон содержит значения доходностей акций «Газпрома». Интервал карманов представляет собой диапазоны доходностей. Необходимо также отметить флажки для опций «Интегральный процент» и «Вывод графика». После выполнения этих действий будет получен график и таблица накопительной вероятности (рисунок 7.22).

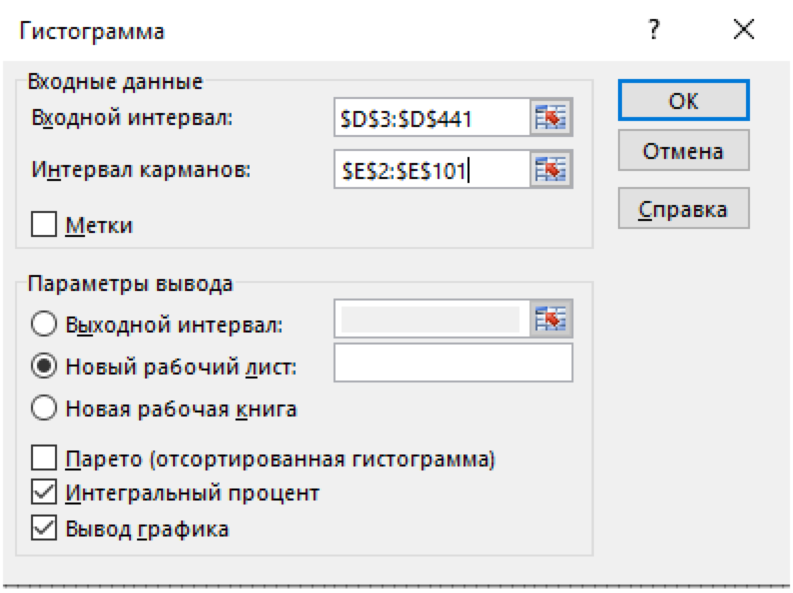


Рисунок 7.22 – Настройка инструмента «Гистограмма»

Далее для накопительной вероятности определим квантиль при вероятности 1 %. Это значение – верхняя граница убытков с заданной вероятностью, представленная на рисунках 7.23 и 7.24.

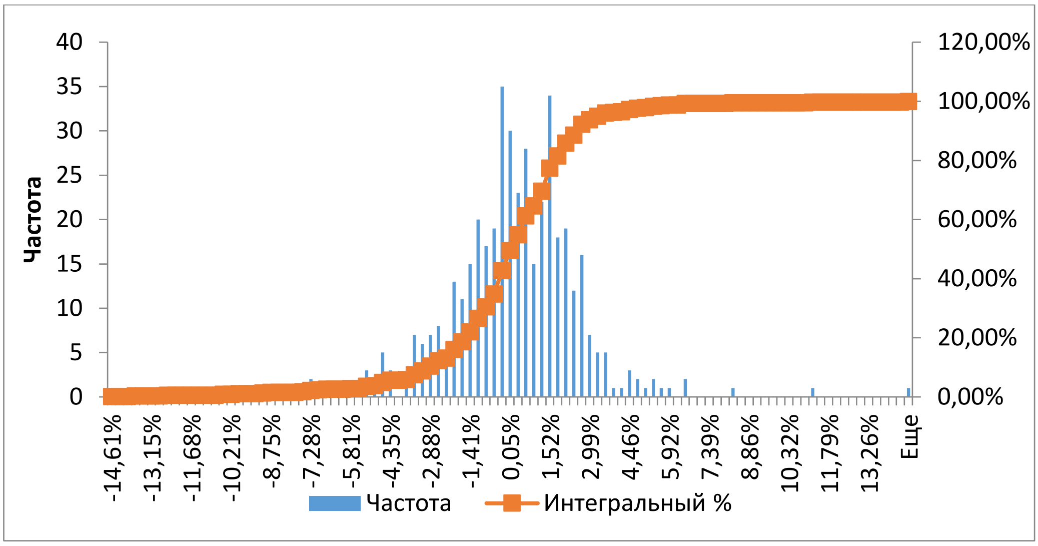


Рисунок 7.23 – Гистограмма доходностей

В таблице накопленной вероятности найдем значения вероятности 1 % (это соответствует колонке «Интегральный %») и определим значения квантиля. Первая колонка – это значения квантилей для распределения доходности акций «Яндекс», вторая колонка – частота появления таких значений на исторической выборке и третья колонка – это вероятность появления таких убытков (рисунок 7.24).

	A	B	C
1	*Карман*	*Частота*	*Интегральный %*
2	-14,61%	1	0,23%
3	-14,32%	0	0,23%
4	-14,03%	0	0,23%
5	-13,73%	1	0,46%
6	-13,44%	0	0,46%
7	-13,15%	0	0,46%
8	-12,85%	0	0,46%
9	-12,56%	1	0,68%
10	-12,27%	0	0,68%
11	-11,97%	0	0,68%
12	-11,68%	0	0,68%
13	-11,39%	0	0,68%
14	-11,09%	0	0,68%
15	-10,80%	0	0,68%
16	-10,51%	1	0,91%
17	-10,21%	0	0,91%
18	-9,92%	1	1,14%

Рисунок 7.24 – Исходные данные для гистограммы доходностей

Таким образом, VAR является количественным методом оценки потенциальных убытков, что делает его ценным инструментом для управления финансовыми рисками.

7.4 Задачи для самостоятельной работы

Из сайте finam.ru либо из другого источника скачать котировки любого предприятия за год, котировки взять с интервалом 1 неделя. Построить модели AR(1), рассчитать прогноз на 2 недели вперед, рассчитать критерии риска.

Тема 8. Технический анализ

8.1 Построение графика японских свечей

Среди графических методов отображения ценовых движений на финансовых рынках наиболее популярны гистограммы (биржевые графики) и японские свечи. Гистограмма, основной элемент этого типа графика, показывает ключевые уровни цен за определенный временной период (чаще всего за день): максимальную и минимальную цену, а также цены открытия и закрытия. При построении гистограммы максимальная и минимальная цены соединяются вертикальной линией, от которой горизонтальные черточки слева и справа указывают на цены открытия и закрытия соответственно (рисунок 8.1).

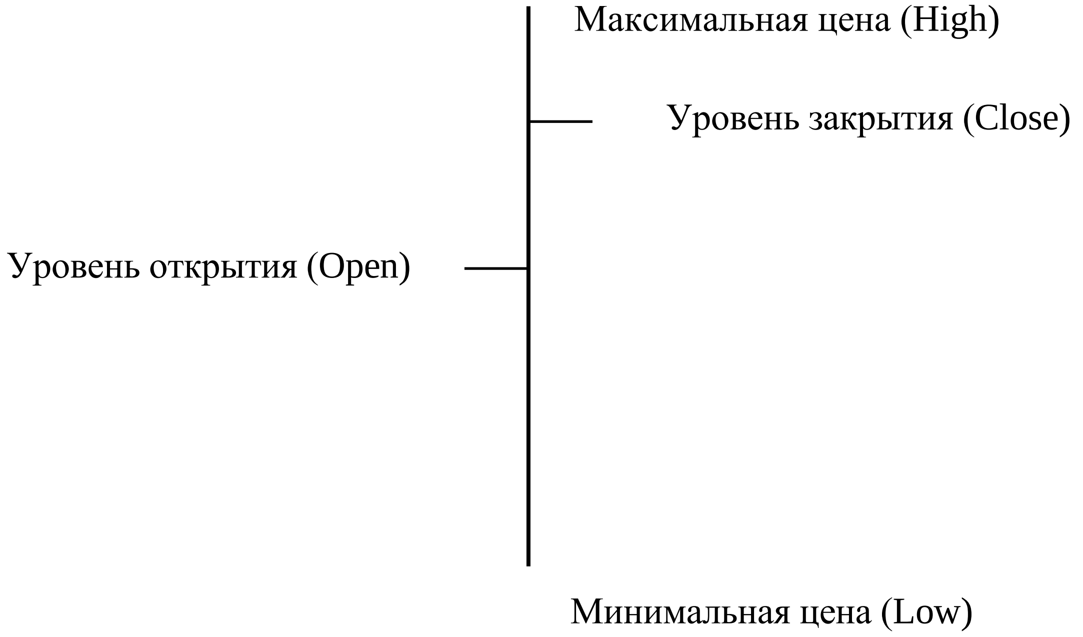


Рисунок 8.1 – Первичный элемент гистограммы (High-Low-Open-Close Chart).

Иногда при построении гистограммы цены открытия игнорируют (рисунок 8.2).

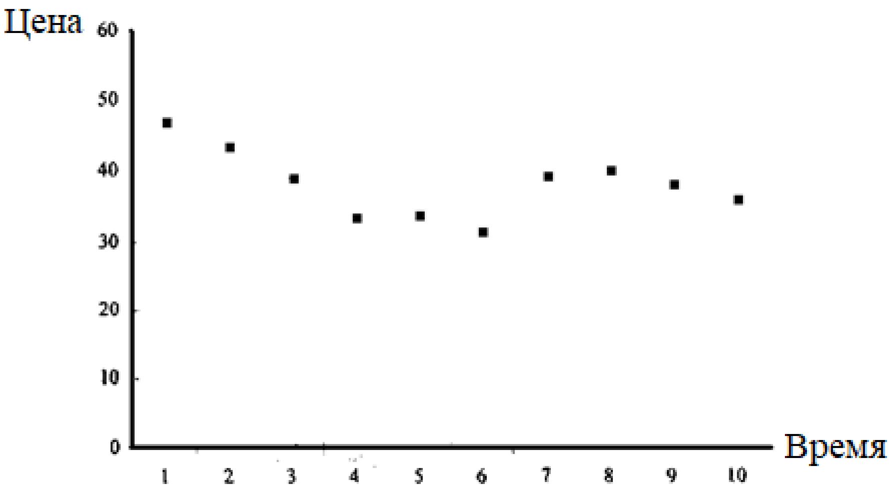


Рисунок 8.2 – Общий вид гистограммы

Японские свечи, так же как и биржевые графики, строятся на основе данных о цене открытия, закрытия, максимальной и минимальной цене. Эти данные отражают торговую активность в течение одного периода времени.

Вертикальные линии сверху и снизу тела называются тенями (рисунок 8.3).

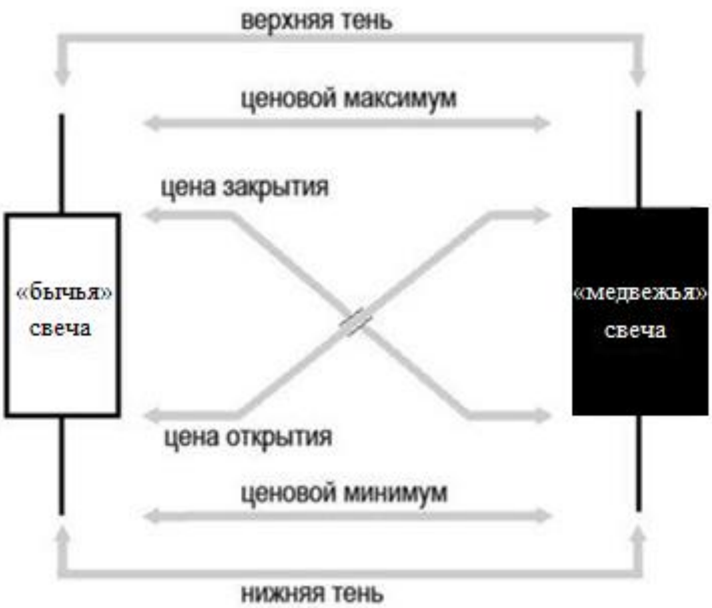


Рисунок 8.3 – Свечи

Тело японской свечи (рисунок 8.4), представляющее собой интервал между ценами открытия и закрытия, является ключевой визуальной характеристикой графика. Когда цена открытия ниже цены закрытия, свеча отображается светлым цветом, а при обратном соотношении – темным. Цветовая индикация показывает преобладание восходящей («бычьей») или нисходящей («медвежьей») динамики на рынке.

Существует несколько типов свечей в зависимости от величины тела: полноценные свечи, маленькие свечи и доджи (или кресты). Доджи образуются при близости или равенстве цен открытия и закрытия, что указывает на неопределенность или равновесие спроса и предложения.

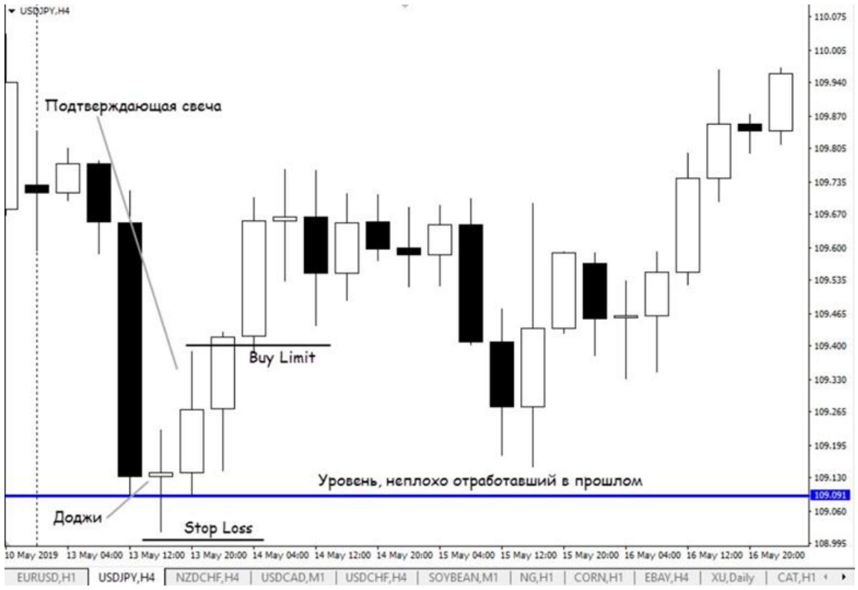


Рисунок 8.4 – Общий вид графика японских свечей

В выводах по данному графику прежде всего должны учитываться сила тела и сила тени. Чем длиннее тело, тем большая вероятность движения цены в данном направлении: для белой свечи – вверх, для черной – вниз. Чем короче тень, тем большая возможность дальнейшего движения цены именно в эту сторону.

Традиционно свечные графики создаются для дневного периода, поскольку метод был разработан с акцентом на дневные изменения и считается особенно эффективным для анализа внутри дня. Это связано с тем, что свечи помогают выявить разницу между ценами открытия и закрытия каждого торгового дня, а также между закрытием предыдущего и открытием следующего. Хотя свечной анализ считается более показательным для рынков с четкой сессионной торговлей, таких как товарные рынки, он также может применяться к круглосуточным валютным рынкам, хотя здесь закрытие и открытие дня имеют менее выраженные границы.

В процессе торгового дня тело свечи динамично изменяется, его длина и цвет варьируются, тени могут появляться и исчезать, что отражает текущий рыночный баланс между покупателями и продавцами. Основное внимание в свечном анализе уделяется размеру тела, поскольку именно оно отражает амплитуду изменения цены. Цвет и длина теней часто считаются менее значимыми при определении тренда, особенно если свечи применяются для анализа и построения линий тренда.

Свеча доджи (англ. Doji Candlestick), изображенная на рисунке 8.5, является одним из ключевых типов японских свечей, играющих важную роль в техническом анализе. Она может выступать как самостоятельный индикатор, так и часть нескольких значимых моделей или паттернов. Доджи формируется, когда цены открытия и закрытия почти совпадают, что приводит к практически отсутствующему телу свечи. В зависимости от длины верхней и нижней тени она может напоминать крест, перевернутый крест или знак плюс. По своей природе доджи является нейтральной свечой, а ее «бычий» или «медвежий» характер зависит от предшествующего тренда и последующего подтверждения движения.

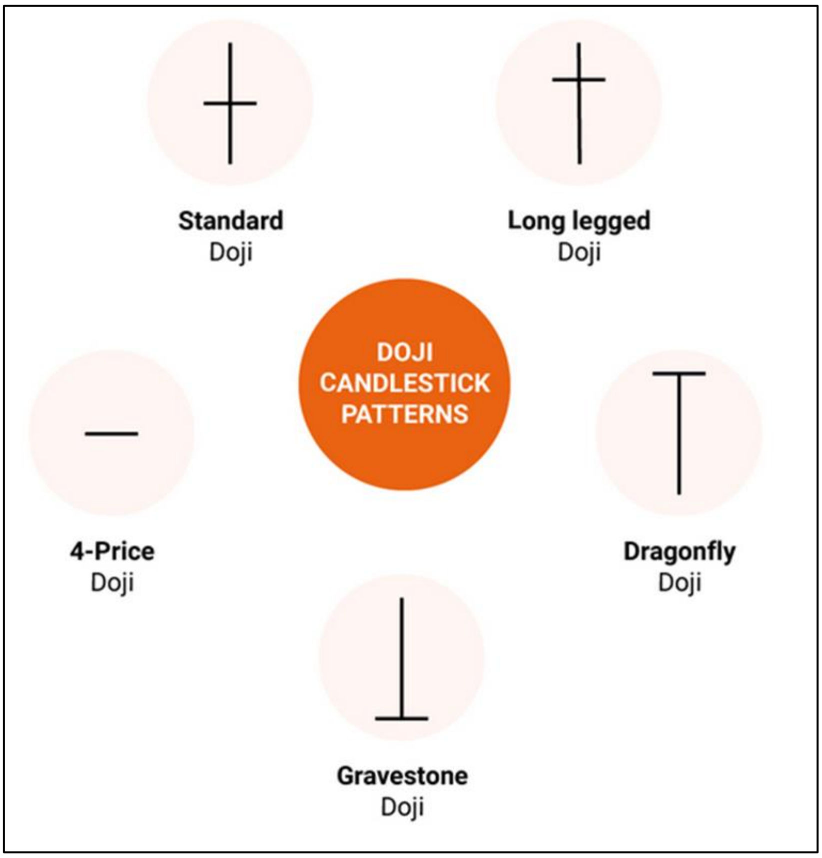


Рисунок 8.6 – Примеры свечей доджи

«*Волчок*» (spinning top) – это очень распространенная японская свеча, которая отражает нерешительность на рынке и может помочь трейдеру в определении эффективной торговой стратегии (рисунок 8.7).

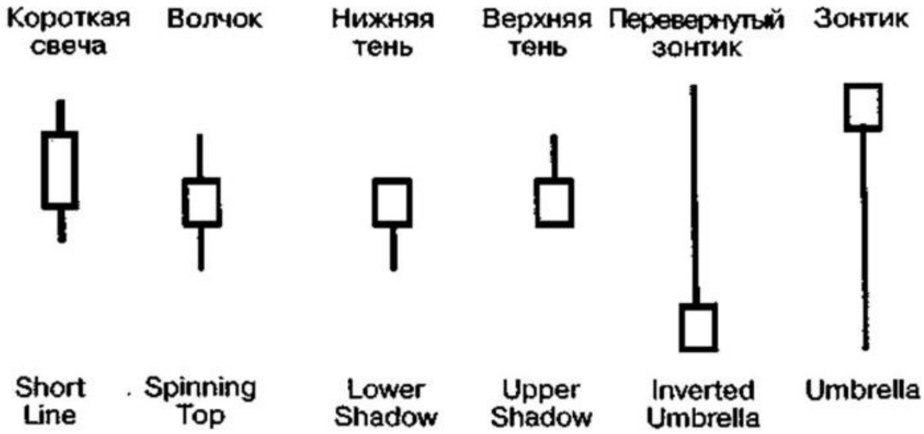


Рисунок 8.7 – Примеры свечей типа «волчок»

Важно верно идентифицировать положение свечи «волчок» на рынке, а именно, где она находится – в рамках тренда или около ключевых уровней поддержки и сопротивления. В таких областях свеча «волчок» наиболее эффективна.

Скачок (gap) или окно (window) при «свечном» техническом анализе указывают на неожиданный резкий отрыв свечи от предшествующей. При этом ее тело полностью расположено выше или ниже тела предыдущей свечи. Окно может появиться из-за технических причин или при резком изменении цены между торговыми сессиями.

8.2 Осцилляторы

Осциллятор представляет собой аналитический показатель, вычисляемый на основе фактических данных или сглаженных значений с применением скользящей средней. В большинстве осцилляторов в качестве основного показателя используется цена, однако некоторые из них также учитывают объем торгов. Построим и проанализируем два базовых осциллятора, которые отражают скорость и интенсивность изменений цен.

Инерционный осциллятор или момент представляет собой разность текущего значения цены и ее значения, зафиксированного несколько дней назад:

$$M_x = P_i - P_{i-x},$$

где P_i – цена закрытия или средневзвешенная цена i-го дня;

P_{i-x} – цена закрытия или средневзвешенная цена x дней назад.

Данный осциллятор оценивает скорость роста или падения уровней цены. При этом с уменьшением временного интервала x он становится более чувствительным к изменениям исследуемой динамики.

Для повышения аналитической значимости инерционный осциллятор подвергается нормализации. Для этого в рамках выбранного временного периода определяется его максимальное по модулю значение, после чего все остальные значения осциллятора делятся на этот максимум. В результате на графике нормализованный инерционный осциллятор будет колебаться в диапазоне от –1 до +1. Приближение его значений к этим пределам будет указывать на высокую скорость изменения цены, что может сигнализировать о приближении состояния перекупленности или перепроданности рынка.

Осциллятор скорости изменения ROC (Rate of Change) рассчитывается как отношение текущей цены к ее значению, зафиксированному несколько дней назад:

$$\mathrm{ROC}_x = \frac{P_i}{P_{i-x}} \cdot 100.$$

Данный осциллятор принимает только положительные значения, которые на графике колеблются относительно центральной линии, соответствующей 100 %. Кривая осциллятора примерно соответствует кривой осциллятора инерции. Однако в отличие от последней она характеризует не скорость, а интенсивность изменения уровней или потенциал роста.

8.3 Скользящие средние

Использование скользящих средних в техническом анализе отличается от их традиционного применения в статистике, что следует учитывать при решении подобных задач. В техническом анализе выделяют три основные разновидности скользящих средних: простые, взвешенные и экспоненциальные. Принципиальная разница между этими типами заключается в том, что значения скользящих средних в данном подходе ориентированы на последнее значение временного ряда, а не на центральную точку периода, что обусловлено их задачей в прогнозировании краткосрочных трендов.

Накладывая линию скользящей средней на ценовой график, можно наблюдать их взаимное расположение, позволяющее выявлять потенциальные сигналы к смене тренда. Основное предположение при этом заключается в том, что текущая тенденция сохранится хотя бы в ближайшем будущем. Поэтому скользящая средняя выполняет не только функцию сглаживания текущих данных, но и частично экстраполирует тренд в будущее.

С учетом специфики применения формула простой скользящей средней k-го порядка – $MA(k)$ (moving average) имеет следующий вид:

$$MA(k)_j = \frac{\sum_{i=j-k+1}^{j} p_i}{k},$$

где k – порядок скользящей средней;

j – порядковый номер скользящей средней $\left(k = \overline{k,\, n}\right)$;

p_i – цена i-го периода $(i = \overline{1,\, n})$.

Привязывание средних к завершению периода осреднения устраняет проблему временной привязки, возникающую при четном количестве уровней в этом периоде. Таким образом, необходимость в центрировании или преобразовании уровней скользящих средних четного порядка исчезает (таблица 8.1).

Таблица 8.1 – Расчет 5-уровневой невзвешенной скользящей средней

Период	Цена закрытия (p_i)	5-уровневая невзвешенная скользящая сумма	5-уровневая невзвешенная скользящая средняя ($MA5$)
1	2	3	4(гр.3:5)
1	70,2	-	-
2	70,3	-	-
3	69,0	-	-
4	67,3	-	-
5	68,3	345,1	69,02
6	70,0	344,9	68,98
7	72,7	347,3	69,46
8	76,1	354,4	70,88
9	78,6	365,7	73,14
10	74,0	371,4	74,28

Представленные в графе 3 таблицы 8.1 скользящие суммы получены следующим способом:

$$345{,}1 = 70{,}2 + 70{,}3 + 69{,}0 + 67{,}3 + 68{,}3;$$

$$344{,}9 = 70{,}3 + 69{,}0 + 67{,}3 + 68{,}3 + 70{,}0 \text{ и т. д.}$$

Одним из значительных недостатков простой скользящей средней является то, что она дважды реагирует на аномальные значения в ряду, которые могут указывать на потенциальные изменения тренда. Первый раз это происходит, когда аномальное значение входит в период осреднения, а второй – когда оно выходит за его пределы. Поэтому взвешенные и экспоненциальные скользящие средние используются более широко в анализе фондового рынка по сравнению с невзвешенными. Применение весов, которые усиливают влияние более новых уровней, реализует принцип дисконтирования, что делает среднюю более чувствительной к предстоящим изменениям тренда и ускоряет поступление торговых сигналов.

Экспоненциальная скользящая средняя *EMA* (exponential moving average) представляет собой дисконтированную величину, которая учитывает не только значения в текущем периоде усреднения, но и всю предшествующую динамику временного ряда. *EMA* можно считать вариантом метода экспоненциального сглаживания по Брауну. В зависимости от параметра сглаживания a экспоненциальная скользящая средняя может быть вычислена различными способами:

$$EMA(k)_i = ap_i + (1 - a)EMA(k)_{i-1}$$

или

$$EMA(k)_i = EMA(k)_{i-1} + a(p_i - EMA(k)_{i-1}) .$$

Значение начальной *EMA* в цепочке задается простой средней порядка k:

$$EMA(k)_i = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right) \Big/ k.$$

Например, для расчета 5-периодной экспоненциальной скользящей средней параметр сглаживания a можно определить по формуле

$$a = \frac{2}{k+1} = \frac{2}{5+1} = 0{,}333.$$

Сведем расчеты в таблицу 8.2.

Таблица 8.2 – Расчет 5-уровневой экспоненциальной скользящей средней

Период	Цена закрытия (p_i)	ap_i	$(1 - a)EMA(k)_{t-1}$	$EMA(k)$,
1	2	3 (0,333 · гр. 2)	4	5 (гр. 3 + гр. 4)
1	74,6	-	-	-
2	72,0	-	-	-
3	72,1	-	-	-
4	69,7	-	-	-
5	69,5	-	-	-
6	70,6	23,51	48,35	71,86
7	71,8	23,91	48,03	71,94
8	75,0	24,98	48,37	73,35
9	77,7	25,87	49,00	74,88
10	79.3	26,41	50,09	76,49

Поскольку значение «71,86» в графе 5 таблицы 8.2 является арифметическим средним первых пяти уровней ряда, его не следует рассматривать как полноценную экспоненциальную скользящую среднюю. Поэтому учитывать это значение в анализе результатов будет нецелесообразно.

8.4 Индикатор MACD

Индикатор на основе экспоненциальных скользящих средних (*EMA*), известный как *MACD* (Moving Average Convergence Divergence – индикатор схождения и расхождения скользящих средних), представляет собой инструмент технического анализа, используемый для выявления направлений рыночных трендов и изменения импульсов цен. *MACD* состоит из двух линий: линия *MACD* и сигнальная линия, каждая из которых выполняет уникальную роль в процессе генерации торговых сигналов.

Линия *MACD* является быстро реагирующим элементом индикатора, рассчитываемым на основе разности между двумя *EMA* (обычно это 12-дневная и 26-дневная *EMA*). Сигнальная линия формируется путем сглаживания линии *MACD* (как правило, с использованием 9-дневной *EMA*), что позволяет выявлять более долгосрочные тенденции. Пересечение линии *MACD* и сигнальной линии, происходящее либо сверху вниз, либо снизу вверх, интерпретируется как потенциальный сигнал на покупку или продажу.

Комбинации *EMA* для индикатора могут варьироваться (например, 12-26-9 или 5-34-7), но в данном анализе, при учете короткого временного промежутка, выбрано сочетание 5-9-7. Для построения *MACD* в этом случае следует:

1) вычислить *EMA* за 5 дней на основе цен закрытия;

2) рассчитать *EMA* за 9 дней по тем же данным;

3) определить разность между *EMA* 5 и *EMA* 9, получив основную линию *MACD* (отображаемую на рисунке 8.8 в виде сплошной линии);

4) на основе этой линии *MACD* рассчитать 7-дневную *EMA*, что даст сигнальную линию (пунктирная линия на рисунке 8.8).

Динамика линии *MACD* отражает изменения настроений участников рынка за короткий промежуток, тогда как сигнальная линия фиксирует более устойчивые настроения. Гистограмма *MACD* (*MACD-H*) визуализирует разницу между линией *MACD* и сигнальной линией, давая более детальное представление о соотношении сил на рынке. Значения *MACD-H* показывают, растет или снижается давление со стороны покупателей («быков») или продавцов («медведей»), а также дают оценку их доминирующей силы в каждый период:

$$MACD\text{-}H = \text{линия } MACD - \text{сигнальная линия.}$$

Настройка индикатора *MACD* может изменяться в зависимости от целей анализа и характеристик торгового актива. В классическом виде *MACD* применяют для дневных, недельных и месячных графиков с параметрами сглаживания: 12 – для быстрого *EMA*, 26 – для медленного *EMA* и 9 – для сигнальной линии.

Тонкость работы *MACD* связана с выбором периодов *EMA*: уменьшение интервалов повышает чувствительность индикатора и увеличивает количество сигналов, но с риском их ложности; увеличение интервалов, напротив, снижает чувствительность и количество сигналов, но повышает их надежность, сопровождаясь временным запаздыванием, как это свойственно скользящим средним.

MACD служит базой для стратегий торговли на основе трех типов сигналов:

1) пересечение линий *EMA*;

2) преодоление центральной линии (нулевой отметки);

3) дивергенция между линиями, сигнализирующая о вероятной смене тренда.

Эти стратегии позволяют трейдерам использовать *MACD* как инструмент для своевременной оценки состояния рынка и принятия решений, основанных на изменениях тенденций и силы движения цен (рисунок 8.8).

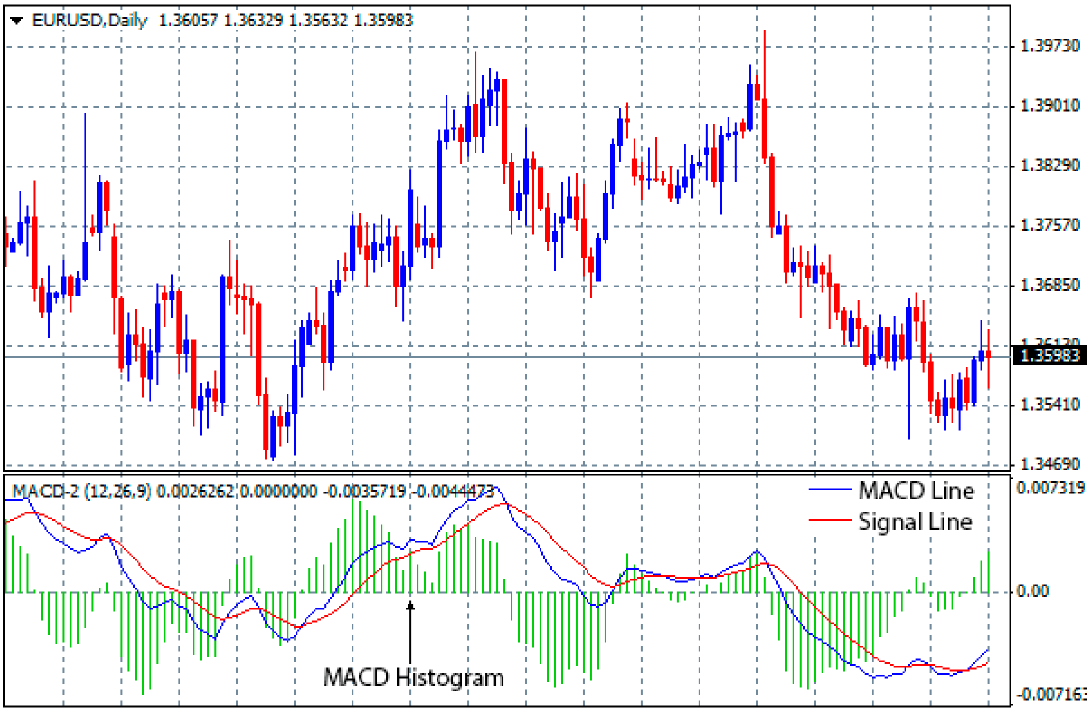


Рисунок 8.8 – График *MACD*

Первый тип сигналов возникает, когда на графике линия *MACD* пересекает сигнальную линию, либо когда гистограмма проходит через нулевую отметку (рисунок 8.9). Если линия *MACD* пересекает сигнальную линию снизу вверх или гистограмма перемещается от отрицательных значений к положительным, это указывает на возможный сигнал к покупке. Сигнал на продажу формируется в обратной ситуации: когда *MACD* пересекает сигнальную линию сверху вниз или гистограмма переходит от положительных значений к отрицательным. Важным условием для обоих сигналов является движение обеих линий в одном направлении на момент пересечения.

Второй тип сигналов (рисунок 8.10) связан с пересечением линией *MACD* нулевого уровня. Когда *MACD* поднимается через нулевой уровень снизу вверх, формируется сигнал к покупке; при его снижении через нулевой уровень сверху вниз возникает сигнал к продаже. При этом необходимо, чтобы сигнальная линия двигалась в том же направлении, что и линия *MACD*.

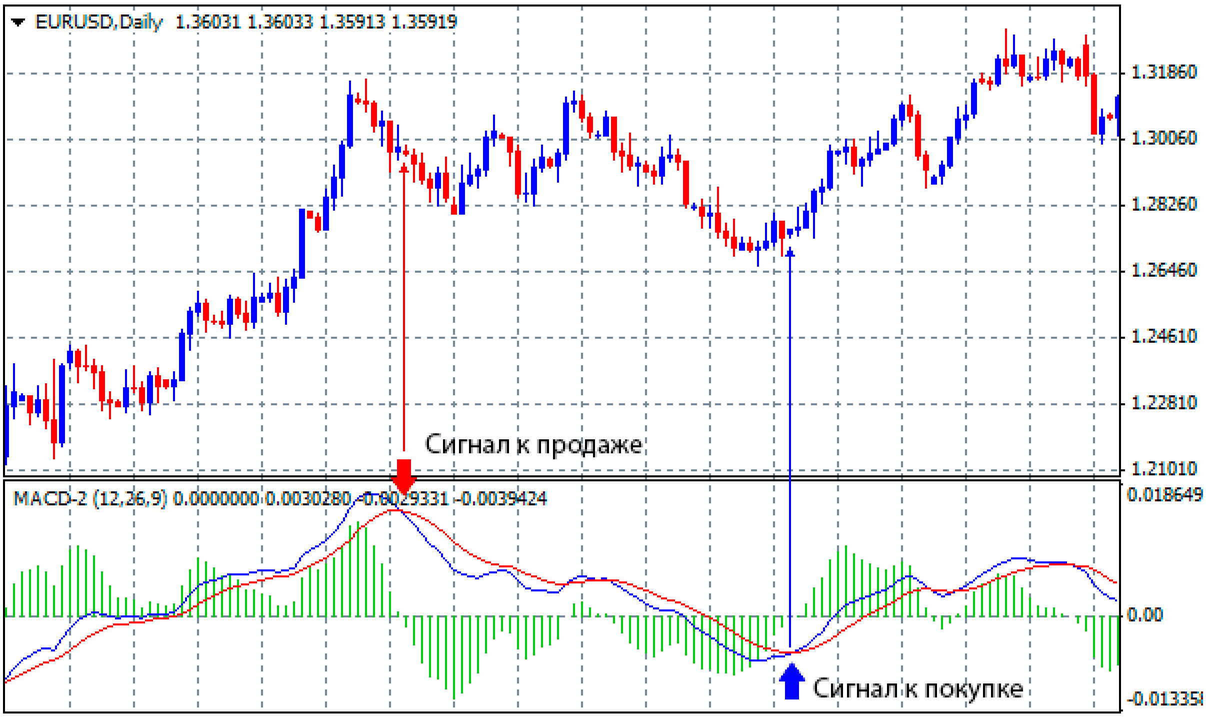


Рисунок 8.9 – Примеры сигналов к покупке

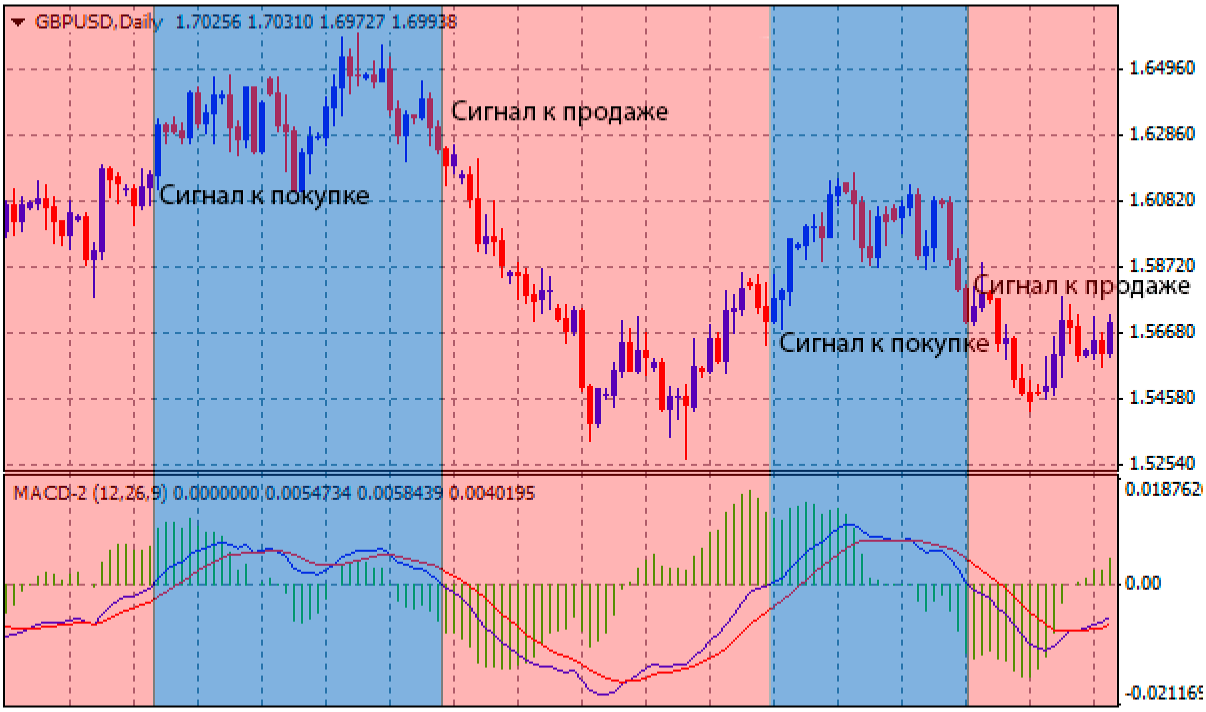


Рисунок 8.10 – Пересечение *MACD* линии нулевого уровня

Третий тип сигналов связан с дивергенцией (расхождением) между индикатором *MACD* и ценой (рисунок 8.11). На восходящем тренде это проявляется как «бычья» дивергенция: цена достигает нового максимума, превышающего предыдущий, в то время как новый максимум *MACD* ниже предыдущего.

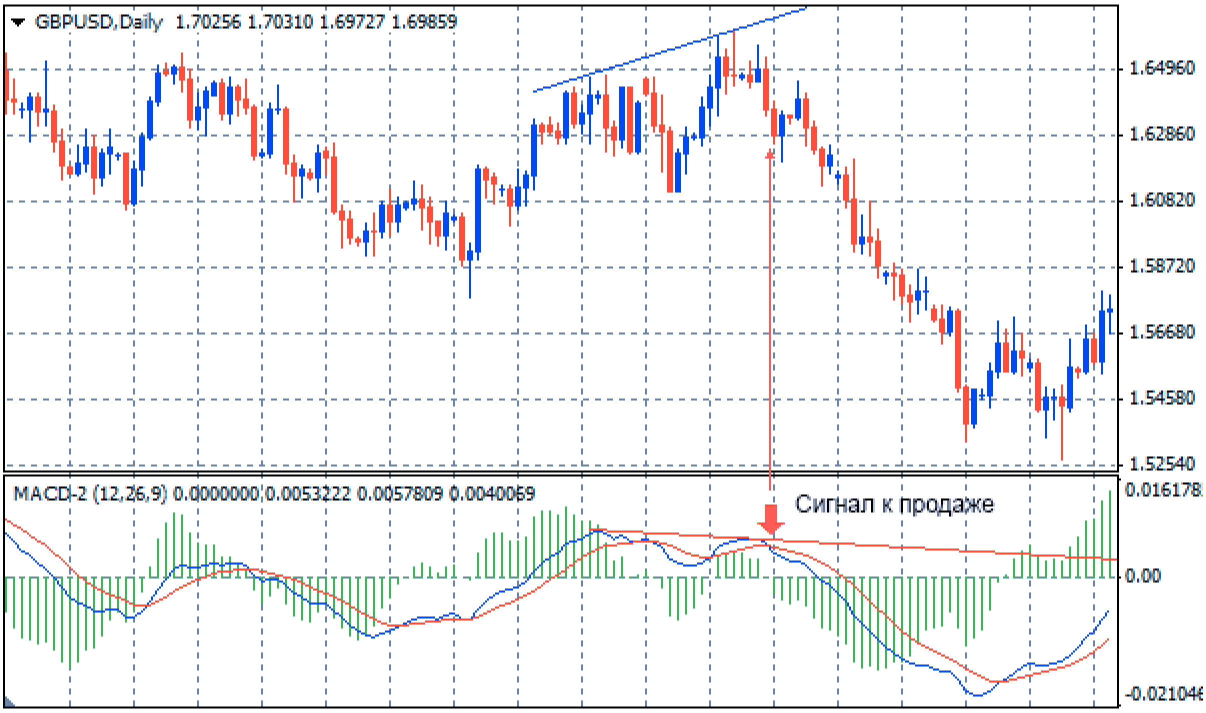


Рисунок 8.11 – Дивергенция индикатора *MACD* и цены

«Бычья» дивергенция свидетельствует об ослаблении восходящего тренда, что может указывать на его возможный разворот и является сигналом к продаже. Дополнительное подтверждение данного сигнала – пересечение сигнальной линии индикатором *MACD* в направлении сверху вниз.

В рамках нисходящего тренда может наблюдаться «медвежья» дивергенция, которая возникает, когда новый минимум цены оказывается ниже предыдущего, а новый минимум индикатора *MACD* – выше предыдущего (рисунок 8.12). Это явление указывает на возможное ослабление нисходящего тренда и его потенциальный разворот, что является надежным сигналом для покупки. Подтверждением данного сигнала служит пересечение линией *MACD* сигнальной линии в направлении снизу вверх (рисунок 8.11).

Помимо классических сигналов дивергенции, для повышения точности прогнозирования тренда рекомендуется использовать дополнительные индикаторы и методы технического анализа. Например, осцилляторы, такие как RSI или стохастический осциллятор, могут предоставить дополнительную информацию о состоянии перекупленности или перепроданности актива. Эти инструменты помогают уточнить моменты входа и выхода с минимизацией ложных сигналов, что делает анализ более надежным и сбалансированным.

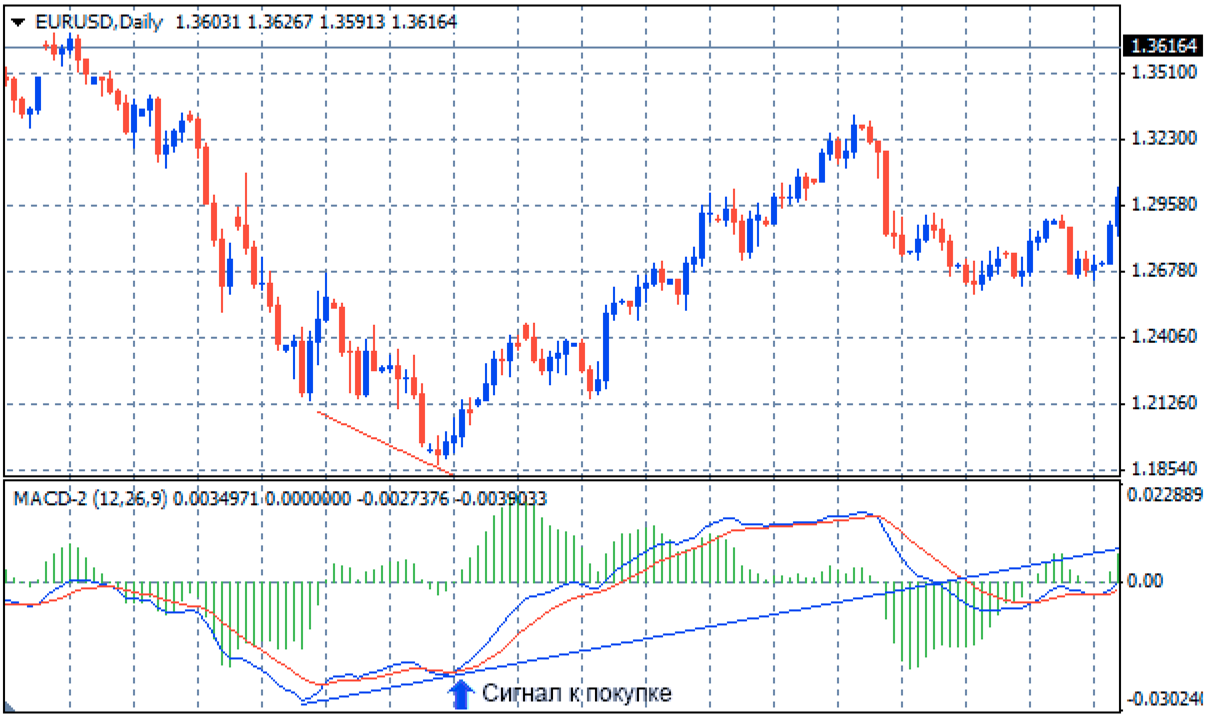


Рисунок 8.12 – «Медвежья» дивергенция

8.5 Ложные сигналы

Индикатор *MACD* обладает свойствами трендового индикатора, что делает его особенно полезным при анализе активов в условиях четко выраженных трендов. Наиболее эффективно его применение в ситуациях, когда рынок демонстрирует устойчивое восходящее или нисходящее движение. Однако важно учитывать, что использование *MACD* в периоды сильного тренда может сопровождаться ложными сигналами. В частности, сигналы на продажу в рамках мощного восходящего тренда зачастую оказываются ненадежными, так же как и сигналы на покупку в условиях ярко выраженного «медвежьего» тренда.

По этой причине при торговле против основного тренда необходимо соблюдать осторожность и применять дополнительные инструменты для подтверждения сигналов. Противотрендовая торговля всегда связана с повышенными рисками, поэтому стоит рассматривать ее как стратегию, требующую более тщательного анализа и комбинирования с другими методами технического анализа. Например, использование осцилляторов, таких как RSI или стохастик, может помочь идентифицировать точки перекупленности или перепроданности, что позволит повысить точность сигналов.

Тем не менее сигналы *MACD* на покупку в рамках восходящего тренда или на продажу в нисходящем тренде считаются достаточно надежными. Это связано с тем, что индикатор лучше работает в направлении основного движения рынка, когда наблюдаются четкие и устойчивые колебания цен. Таким образом, при торговле по тренду вероятность получения точных сигналов возрастает, что делает индикатор *MACD* важным инструментом в арсенале технического анализа.

8.6 Задачи для самостоятельной работы

Из таблицы приложения (результаты торгов акциями «Лукойл») в соответствии с последней цифрой номера в журнале (таблица 8.3) выберите необходимые исходные (таблица 8.4) данные (70 строк) для выполнения индивидуального задания:

Таблица 8.3 – Варианты заданий

Вариант (последняя цифра номера)	Начало периода
0	03.01.23
1	01.02.23
2	05.03.23
3	05.04.23
4	06.05.23
5	03.06.23
6	10.07.23
7	13.08.23
8	10.09.23
9	21.10.23

По данным вашего варианта выполните следующие задания:

1. Постройте и опишите графики:
   1.1 график-гистограмму;
   1.2 график японских свечей.
2. Рассчитайте по ценам закрытия:
   2.1 нормированный 5-уровневый инерционный осциллятор;
   2.2 осциллятор нормы изменения.

3. Рассчитайте по ценам закрытия:

3.1 5-уровневую невзвешенную скользящую среднюю (*MA*5);

3.2 5-уровневую экспоненциальную скользящую среднюю (*EMA*5);

3.3 9-уровневую экспоненциальную скользящую среднюю (*EMA*9).

4. На основе полученных экспоненциальных средних рассчитайте значения уровней и постройте на графиках:

4.1 сигнальную линию (применив осреднение по 7 уровням);

4.2 линию *MACD*;

4.3 *MACD*-гистограмму.

5. Проведите анализ построенных графиков и рассчитанных показателей: дайте общую характеристику динамики цены в рамках данного периода, укажите точки изменения тренда и определите возможные торговые сигналы. Сделайте выводы о степени соответствия ваших прогнозов фактической динамике цены в последующий период.

Таблица 8.4 – Результаты торгов на ММВБ акциями

Дата	Открытие	Закрытие	Максимум	Минимум	Объем (шт.)
1	2	3	4	5	6
03.01.2023	80,95	84,49	84,49	80,77	9797330,00
04.01.2023	84,50	84,00	84,80	83,58	5640400,00
08.01.2023	84,46	83,70	84,85	83,33	6832940,00
09.01.2023	84,21	83,93	84,27	83,41	9295330,00
10.01.2023	84,06	84,70	84,89	83,70	7188760,00
11.01.2023	84,77	88,00	88,19	84,70	22371470,00
14.01.2023	87,56	88,30	88,75	86,44	15137490,00
15.01.2023	88,67	88,86	91,10	88,37	15213850,00
16.01.2023	88,75	90,10	90,95	88,53	13844020,00
17.01.2023	90,25	90,05	90,96	89,84	6957870,00
18.01.2023	90,61	93,33	93,69	90,51	17705290,00
21.01.2023	93,39	94,70	94,83	92,85	10407130,00
22.01.2023	94,10	94,40	94,55	93,57	7133460,00
23.01.2023	94,39	94,40	95,39	93,80	7999990,00
24.01.2023	94,10	91,80	94,35	91,25	15011090,00
25.01.2023	91,96	91,49	93,20	90,36	9987290,00
28.01.2023	91,35	90,50	92,43	90,05	7194340,00
29.01.2023	90,13	91,80	91,80	89,52	9819660,00
30.01.2023	91,62	91,90	91,95	90,70	9037650,00
31.01.2023	92,11	92,82	93,77	92,03	13332510,00

Продолжение таблицы 8.4

1	2	3	4	5	6
01.02.2023	92,61	93,50	94,23	92,56	7094150,00
04.02.2023	93,94	92,70	94,38	92,50	5902870,00
05.02.2023	92,75	91,70	92,76	91,70	5687940,00
06.02.2023	91,88	91,50	92,70	91,18	5708900,00
07.02.2023	91,49	90,07	91,49	89,90	7275520,00
08.02.2023	89,89	90,70	91,20	89,70	3352650,00
11.02.2023	90,30	90,30	91,69	90,17	7638450,00
12.02.2023	90,62	89,94	90,92	89,76	13095760,00
13.02.2023	90,29	88,80	91,45	87,52	26240260,00
14.02.2023	87,98	89,12	89,84	87,26	16865740,00
15.02.2023	89,23	90,15	90,15	89,05	9593620,00
18.02.2023	90,15	89,71	90,65	89,50	7855080,00
19.02.2023	89,70	89,52	90,20	89,00	8148020,00
20.02.2023	90,00	89,60	90,08	89,55	8311900,00
21.02.2023	89,85	88,91	89,94	88,77	8182170,00
22.02.2023	89,35	89,50	89,70	88,98	3948750,00
25.02.2023	89,62	89,67	90,15	89,32	5010550,00
26.02.2023	89,70	90,43	90,43	89,11	4604890,00
27.02.2023	90,55	90,67	91,16	89,94	8752610,00
28.02.2023	90,40	91,22	91,22	89,91	5824150,00
01.03.2023	91,22	91,57	91,95	90,72	7746690,00
04.03.2023	91,75	92,44	93,37	91,44	9694490,00
05.03.2023	92,44	92,38	93,22	91,60	7912110,00
06.03.2023	92,53	93,60	94,60	92,53	13249020,00
07.03.2023	93,59	93,95	94,72	93,09	8672430,00
11.03.2023	93,65	93,14	94,92	93,03	7564350,00
12.03.2023	93,67	93,00	94,10	92,91	6410460,00
13.03.2023	93,00	91,82	93,69	91,62	10083190,00
14.03.2023	92,00	91,50	92,21	91,00	7144510,00
15.03.2023	91,66	91,08	91,81	90,71	6697700,00
18.03.2023	91,50	91,45	91,94	90,77	5731780,00
19.03.2023	91,71	91,11	91,94	90,90	5815800,00
20.03.2023	91,16	90,54	91,29	90,11	6147740,00
21.03.2023	90,80	90,63	90,90	90,31	9204100,00
22.03.2023	90,66	89,08	90,88	89,05	8473080,00

Продолжение таблицы 8.4

1	2	3	4	5	6
25.03.2023	89,08	90,50	90,63	88,40	12924750,00
26.03.2023	90,62	91,07	91,78	90,27	7158170,00
27.03.2023	91,20	90,61	91,58	90,20	4959270,00
28.03.2023	90,30	90,64	90,75	90,11	1959310,00
29.03.2023	90,72	91,30	91,66	90,64	8163140,00
01.04.2023	91,58	92,34	92,46	91,42	6002850,00
02.04.2023	92,39	92,14	92,95	92,03	4944180,00
03.04.2023	92,03	90,77	92,80	90,71	9538690,00
04.04.2023	91,03	91,27	91,50	90,55	4275170,00
05.04.2023	91,21	91,02	92,00	90,97	4290360,00
08.04.2023	91,38	91,00	91,55	90,86	7605620,00
09.04.2023	91,00	91,04	91,43	90,80	9225520,00
10.04.2023	91,26	93,11	93,80	91,14	16333090,00
11.04.2023	93,15	91,50	93,37	91,50	8429550,00
12.04.2023	91,73	91,40	92,18	91,22	6487920,00
15.04.2023	91,50	91,46	91,90	91,25	7389940,00
16.04.2023	91,80	91,05	92,05	90,86	10993420,00
17.04.2023	91,35	91,20	91,58	90,71	7847250,00
18.04.2023	91,01	91,25	91,47	90,81	3543620,00
19.04.2023	91,18	91,60	92,00	91,10	4332600,00
22.04.2023	92,00	92,19	92,40	91,71	4893970,00
23.04.2023	92,40	91,50	92,70	91,43	7775360,00
24.04.2023	91,59	91,32	91,59	91,11	6129800,00
25.04.2023	91,33	90,70	91,54	90,70	8380260,00
26.04.2023	90,70	90,99	91,21	90,17	8270420,00
29.04.2023	91,10	91,68	92,40	91,05	11688710,00
30.04.2023	91,00	91,05	91,05	89,88	20192260,00
02.05.2023	90,78	90,80	91,32	90,70	7616420,00
03.05.2023	91,02	91,83	92,15	90,89	11375240,00
06.05.2023	91,50	93,17	93,17	91,06	10812290,00
07.05.2023	93,02	93,80	93,84	92,25	12181650,00
08.05.2023	93,18	92,47	93,87	92,03	13456200,00
10.05.2023	92,51	91,67	93,03	91,55	17990890,00
13.05.2023	84,98	86,34	87,36	84,78	18992900,00

Продолжение таблицы 8.4

1	2	3	4	5	6
14.05.2023	86,50	85,51	87,35	85,27	9916440,00
15.05.2023	85,65	84,80	85,99	83,90	10519820,00
16.05.2023	85,09	84,70	85,50	84,40	9411380,00
17.05.2023	84,70	83,80	85,36	83,38	9608250,00
20.05.2023	84,5	84,15	84,86	83,42	8367240,00
21.05.2023	84,43	84,20	85,07	84,03	6457350,00
22.05.2023	84,59	84,57	84,96	84,24	5452260,00
23.05.2023	84,49	83,90	84,92	83,83	6099530,00
24.05.2023	84,00	83,59	84,70	83,59	5685820,00
27.05.2023	83,75	84,30	84,47	83,74	4245220,00
28.05.2023	84,32	83,50	84,40	83,40	11528650,00
29.05.2023	83,49	84,30	84,33	83,23	8153520,00
30.05.2023	84,41	84,75	84,86	83,85	6767800,00
31.05.2023	84,40	84,75	84,75	83,97	6417790,00
03.06.2023	84,25	84,82	84,82	84,04	8821420,00
04.06.2023	84,83	85,98	86,14	84,43	15141450,00
05.06.2023	85,50	85,56	86,35	85,11	9401460,00
06.06.2023	85,73	86,58	86,90	85,50	12719600,00
07.06.2023	86,83	87,55	88,38	86,66	15138840,00
10.06.2023	87,59	89,24	89,31	87,58	16122450,00
11.06.2023	89,00	89,55	89,99	88,98	16189110,00
13.06.2023	89,55	89,50	89,75	87,88	11847220,00
14.06.2023	89,36	89,30	90,00	88,50	10404920,00
17.06.2023	89,40	89,10	89,43	88,84	11650520,00
18.06.2023	88,80	89,42	89,48	88,53	8758100,00
19.06.2023	89,42	90,00	90,00	89,35	8763290,00
20.06.2023	90,72	90,68	90,97	90,16	11387050,00
21.06.2023	90,50	89,68	90,80	88,75	9804540,00
24.06.2023	89,60	89,41	90,08	88,61	6073740,00
25.06.2023	89,68	89,35	89,92	88,88	5153790,00
26.06.2023	89,50	90,30	90,30	89,37	5145700,00
27.06.2023	90,31	89,77	90,50	89,60	5168190,00
28.06.2023	89,70	90,15	90,15	89,45	6732560,00
01.07.2023	90,50	90,90	90,90	90,02	6994010,00

Продолжение таблицы 8.4

1	2	3	4	5	6
02.07.2023	90,90	91,98	91,98	90,40	13527410,00
03.07.2023	92,18	92,70	92,98	91,70	12729050,00
04.07.2023	92,92	94,30	94,32	92,21	14953260,00
05.07.2023	94,40	95,30	95,99	93,85	15355020,00
08.07.2023	95,05	96,42	96,92	94,12	11354700,00
09.07.2023	96,47	95,32	97,23	94,94	6907800,00
10.07.2023	95,32	95,00	95,67	93,86	10467120,00
11.07.2023	94,70	94,90	95,40	94,04	6062060,00
12.07.2023	94,70	93,97	94,70	92,77	6882970,00
15.07.2023	94,30	95,18	95,18	93,50	6891820,00
16.07.2023	95,01	93,45	95,64	93,35	5853130,00
17.07.2023	93,69	92,73	94,10	92,67	4923400,00
18.07.2023	92,70	92,99	93,22	91,85	4768520,00
19.07.2023	93,50	93,06	93,70	92,51	3632520,00
22.07.2023	93,05	92,22	93,11	91,96	3301960,00
23.07.2023	92,35	91,51	92,49	91,50	4107330,00
24.07.2023	91,60	90,00	91,60	89,19	15625170,00
25.07.2023	90,19	92,00	92,02	89,87	8146270,00
26.07.2023	92,00	91,14	92,40	91,04	3994380,00
29.07.2023	91,70	91,95	92,50	91,07	4670180,00
30.07.2023	92,00	93,31	93,31	91,87	5320700,00
31.07.2023	93,44	93,16	93,56	92,82	5808450,00
01.08.2023	93,14	92,49	93,75	92,22	5911810,00
02.08.2023	91,80	92,40	92,76	91,40	7008070,00
05.08.2023	92,04	93,50	93,60	92,04	6883260,00
06.08.2023	93,38	94,90	95,91	93,08	18337190,00
07.08.2023	95,10	95,40	95,78	94,17	7771120,00
08.08.2023	95,57	95,50	96,75	95,50	6177850,00
09.08.2023	95,20	94,90	95,74	94,15	5822990,00
12.08.2023	94,94	94,80	95,34	94,20	2890070,00
13.08.2023	94,70	94,80	94,90	93,80	5247720,00
14.08.2023	94,94	94,00	95,37	93,20	6321080,00
15.08.2023	93,69	93,16	94,00	92,30	5011560,00
16.08.2023	93,40	91,83	93,90	91,83	4237740,00

Продолжение таблицы 8.4

1	2	3	4	5	6
19.08.2023	93,00	92,60	93,00	90,66	4311760,00
20.08.2023	93,00	91,50	93,00	91,50	4103960,00
21.08.2023	91,79	91,90	92,31	91,20	4590690,00
22.08.2023	92,28	92,65	93,00	91,26	5587430,00
23.08.2023	93,10	93,50	94,50	92,90	10357770,00
26.08.2023	93,45	93,30	93,80	92,72	3223550,00
27.08.2023	93,74	94,33	94,80	93,48	7846910,00
28.08.2023	94,33	95,27	95,27	94,07	4385580,00
29.08.2023	95,05	95,80	95,92	94,85	3873040,00
30.08.2023	95,70	94,62	95,70	94,27	7389340,00
02.09.2023	95,70	94,64	95,70	94,04	4149010,00
03.09.2023	94,50	95,22	95,27	93,30	6990430,00
04.09.2023	95,30	95,53	95,73	94,65	5603490,00
05.09.2023	95,70	95,30	96,19	95,01	6382550,00
06.09.2023	95,30	95,54	96,19	94,62	5179830,00
09.09.2023	95,15	95,65	96,01	93,75	7129160,00
10.09.2023	95,16	95,18	95,64	94,50	6459590,00
11.09.2023	95,44	96,79	96,98	94,05	10933410,00
12.09.2023	96,70	96,00	97,64	95,80	7893290,00
13.09.2023	96,20	96,80	97,77	95,33	14943110,00
16.09.2023	97,00	97,35	97,38	96,07	7891060,00
17.09.2023	97,21	96,65	97,69	96,47	7539470,00
18.09.2023	96,48	95,96	96,90	95,52	5561250,00
19.09.2023	95,95	96,24	96,81	95,54	5067390,00
20.09.2023	96,62	95,58	96,66	95,26	5763710,00
23.09.2023	95,29	96,12	96,12	94,30	3829620,00
24.09.2023	95,71	95,15	96,00	94,70	3279570,00
25.09.2023	94,70	94,99	95,09	94,10	4598670,00
26.09.2023	94,99	94,94	95,35	94,37	3090870,00
27.09.2023	94,70	94,85	95,66	94,55	3530200,00
30.09.2023	94,87	94,74	95,29	94,25	3882060,00
01.10.2023	94,99	95,03	95,23	94,41	3200910,00
02.10.2023	94,75	91,55	95,63	91,32	12183160,00
03.10.2023	91,70	91,69	92,68	90,51	8533410,00

Продолжение таблицы 8.4

1	2	3	4	5	6
04.10.2023	92,00	91,44	93,16	91,30	5600670,00
07.10.2023	91,90	91,01	92,10	90,85	3427060,00
08.10.2023	91,01	90,00	91,34	89,62	7060360,00
09.10.2023	90,00	90,10	90,56	89,55	6481430,00
10.10.2023	90,00	90,00	90,37	89,55	3888040,00
11.10.2023	90,35	90,25	90,42	89,64	4824890,00
14.10.2023	90,40	89,69	90,95	89,23	6030860,00
15.10.2023	90,42	91,50	91,75	90,34	9672960,00
16.10.2023	91,73	93,95	93,95	91,37	11366250,00
17.10.2023	93,69	92,70	94,73	92,31	8566620,00
18.10.2023	92,74	92,70	93,79	92,39	4900330,00
21.10.2023	92,85	93,26	93,29	92,02	5294530,00
22.10.2023	93,50	92,99	94,39	92,22	8500320,00
23.10.2023	92,98	93,05	93,32	92,50	4229960,00
24.10.2023	93,00	92,15	93,07	91,36	9387320,00
25.10.2023	92,05	93,20	93,20	91,72	7699590,00
28.10.2023	93,00	93,61	94,21	93,00	6711660,00
29.10.2023	93,95	94,00	94,60	93,33	3614850,00
30.10.2023	93,85	94,99	94,99	93,58	5997710,00
31.10.2023	95,01	95,03	95,67	94,10	8101930,00
01.11.2023	95,00	97,05	97,43	94,44	10780700,00
05.11.2023	97,00	100,29	100,50	96,60	29798490,00
06.11.2023	100,28	99,95	100,28	98,71	9478770,00
07.11.2023	99,50	99,52	100,49	99,12	8926610,00
08.11.2023	99,50	99,14	100,18	98,20	7360040,00
11.11.2023	98,88	100,00	100,00	98,51	4744950,00
12.11.2023	100,00	99,70	100,74	99,15	9812150,00
13.11.2023	99,99	100,26	100,26	99,32	3481810,00
14.11.2023	100,00	99,94	100,88	99,16	5019980,00
15.11.2023	99,98	100,13	100,37	99,70	2713230,00
18.11.2023	100,00	100,00	100,49	99,61	3530590,00
19.11.2023	100,00	100,50	100,50	99,82	5048750,00
20.11.2023	100,21	103,17	104,05	100,21	17046160,00
21.11.2023	103,30	102,72	103,34	101,75	6081710,00

Продолжение таблицы 8.4

1	2	3	4	5	6
22.11.2023	102,40	105,20	106,35	102,12	13367170,00
25.11.2023	105,40	104,42	106,02	103,71	6742280,00
26.11.2023	104,60	105,00	105,41	103,81	12990450,00
27.11.2023	104,91	106,50	106,88	104,73	10658900,00
28.11.2023	106,23	105,58	106,88	104,80	6658400,00
29.11.2023	105,63	105,70	106,20	104,97	5429390,00
02.12.2023	105,84	106,28	106,28	105,11	7086650,00
03.12.2023	106,15	103,89	106,23	103,81	7044440,00
04.12.2023	104,15	105,98	105,98	103,89	5222680,00
05.12.2023	106,00	104,36	106,00	104,36	4019740,00
06.12.2023	104,70	106,17	106,17	104,43	5322770,00
09.12.2023	106,16	106,05	106,29	105,12	3623120,00
10.12.2023	105,70	104,80	105,96	104,30	4265250,00
11.12.2023	104,90	106,30	106,30	104,76	9325390,00
12.12.2023	106,40	108,09	109,95	106,20	8900630,00
13.12.2023	108,45	108,96	109,91	107,83	7010660,00
16.12.2023	109,40	109,09	109,98	108,81	5327060,00
17.12.2023	109,05	109,05	111,40	108,22	7424570,00
18.12.2023	109,05	107,28	109,50	107,26	7417100,00
19.12.2023	107,60	108,55	109,00	107,40	7525390,00
20.12.2023	108,32	107,48	108,59	107,48	4639560,00
23.12.2023	107,71	108,05	108,26	107,40	2513330,00
24.12.2023	108,09	107,20	108,10	106,94	1733400,00
25.12.2023	107,22	106,82	107,34	106,37	1953210,00
06.12.2023	106,60	106,74	107,34	106,10	1857350,00
27.12.2023	106,82	107,08	107,35	106,24	2951390,00
30.12.2023	107,20	107,75	108,20	106,94	3991460,00

Список рекомендованной литературы

1. Поттосина, С. А. Математика рынка ценных бумаг: практикум : учеб.-метод. пособие для студ. спец. 1-40 01 02-02 «Информационные системы и технологии (в экономике)» всех форм обуч. / С. А. Поттосина, И. Б. Валевская. – Минск : БГУИР, 2010. – 68 с. : ил.
2. Буренин, А. Н. Фьючерсные, форвардные и опционные рынки / А. Н. Буренин. – М. : Тривола, 1994. – 232 с.
3. Четыркин, Е. М. Методы финансовых и коммерческих расчетов / Е. М. Четыркин. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Дело Лтд, 1995. – 320 с.
4. Ченг, Ф. Ли. Финнерти. Финансы корпораций: теория, методы и практика / Ф. Ли Ченг, И. Джозеф ; пер. с англ. – М. : ИНФРА-М, 2000. – 686 с.
5. Ковалёв, В. В. Сборники задач по финансовому анализу : учеб. пособие / В. В. Ковалёв. – М. : Финансы и статистика, 1997. – 128 с.
6. Балабанов, И. Т. Сборник задач по финансам и финансовому менеджменту / И. Т. Балабанов. – М. : Финансы и статистика, 1997. – 78 с.
7. Терпугов, А. Ф. Математика рынка ценных бумаг / А. Ф. Терпугов. – Томск : Изд-во ТГУ, 2009. – 218 с.
8. Лукашин, Ю. П. Финансовая математика : учеб.-метод. комплекс / Ю. П. Лукашин. – М. : Изд. центр ЕАОИ, 2008. – 200 с.
9. Финансы в вопросах и ответах : [понятие финансов и финансовой системы, бюджет и бюджетная система, налоги и налогообложение, деньги, кредит, банки, экономика предприятий] : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [В. И. Трухачев и др.]. – Изд. 2-е , перераб. и доп. – М. : Финансы и статистика ; Ставрополь : АГРУС, 2006. – 534 с.
10. Математические методы в экономике и финансах : учебник / В. М. Гончаренко, И. А. Александрова, И. Е. Денежкина [и др.]. – М. : КноРус, 2016. – 601 с.

Св. план 2024, поз. 17

Учебное издание

Голда Ольга
Петрович Никита Олегович
Сторожев Дмитрий Алексеевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Ю. В. Граховская*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *А. А. Лущикова*

Подписано в печать 17.12.2025. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 9,88. Уч.-изд. л. 10,5. Тираж 100 экз. Заказ 24.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск