УДК 629.7

ГЛАВА 2
АДЪОЙНТ-ГРАДИЕНТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОФИЛЯ КРЫЛА БПЛА ДЛЯ МНОГОПУНКТОВОЙ ЗАДАЧИ ПРИ НИЗКИХ Re

Алексеев В.Ф.
канд.техн.наук, доцент
БГУИР
Бавбель Е.И.
магистр, аспирант
БГУИР
г. Минск, Республика Беларусь

АННОТАЦИЯ. Представлена методология адъойнт-градиентной оптимизации аэродинамических профилей крыла беспилотных летательных аппаратов при малых числах Рейнольдса (Re = 10^4–10^5). Разработана параметризация геометрии на основе B-сплайнов с регуляризацией, обеспечивающая технологичность форм. Реализована многопунктовая постановка задачи с взвешенной целевой функцией для совокупности режимов полёта. Применение дискретного адъойнт-метода позволяет сократить вычислительные затраты на порядок по сравнению с методом конечных разностей. Верификация выполнена на профиле NACA 2412.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Адъойнт-метод, многопунктовая оптимизация, профиль крыла, малые числа Рейнольдса, вычислительная аэродинамика, пограничный слой, беспилотный летательный аппарат

ADJOINT-GRADIENT OPTIMIZATION OF UAV WING PROFILE FOR MULTI-POINT TASK AT LOW Re

Viktor F. Alexeev
PhD of Technical Sciences,
Associate Professor
BSUIR
Bavbel E.I.
Postgraduate Student
BSUIR
Minsk, Republic of Belarus

ABSTRACT. This paper presents a methodology for adjoint-gradient optimization of unmanned aerial vehicle wing aerofoils at low Reynolds numbers (Re = 10^4–10^5). A geometry parameterization based on B-splines with regularization is developed, ensuring the manufacturability of the shapes. A multi-point problem formulation with a weighted objective function for a set of flight modes is implemented. The use of the discrete adjoint method reduces computational costs by an order of magnitude compared to the finite difference method. Verification was performed on the NACA 2412 airfoil.

KEYWORDS. Adjoint method, multi-point optimization, wing airfoil, low Reynolds numbers, computational aerodynamics, boundary layer, unmanned aerial vehicle

ВВЕДЕНИЕ

Мотивация исследования

Расширение номенклатуры беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) малых и средних классов сопровождается повышением требований к их энергетической эффективности и манёвренным характеристикам [1]. Специфика эксплуатации данных аппаратов характеризуется необходимостью выполнения полётного задания в широком диапазоне режимов: разгон на стартовом участке, длительный крейсерский полёт, выполнение маневров с повышенной перегрузкой. При этом типичные значения числа Рейнольдса, определяемые малым хордовым размером и относительно невысокими скоростями, составляют 10^4–10^5, что на порядок ниже, чем для пилотируемой авиации [2]. В указанном диапазоне доминирующее влияние на формирование аэродинамических сил оказывают вязкостные эффекты, обусловливающие развитие ламинарного пограничного слоя с высокой чувствительностью к градиенту давления и склонностью к отрыву [3].

Традиционные подходы к проектированию профилей крыла, верифицированные для высоких чисел Рейнольдса, оказываются малоэффективными при адаптации к режимам полёта БПЛА. Использование профилей, оптимизированных для крейсерского режима, приводит к существенному снижению аэродинамического качества на маневренных участках траектории и, напротив, профили с повышенной грузоподъёмностью характеризуются избыточным сопротивлением в крейсерском полёте [4].

Данное противоречие детерминирует необходимость применения методов многопунктовой оптимизации, обеспечивающих компромиссное решение для совокупности расчётных случаев, представляющих различные фазы полёта [5].

Вычислительные аспекты оптимизации профилей крыла для БПЛА осложняются двумя обстоятельствами. С одной стороны, адекватное моделирование вязких течений при низких числах Рейнольдса требует применения методов вычислительной гидродинамики (CFD) с разрешением пограничного слоя и учётом ламинарно-турбулентного перехода, что сопряжено со значительными затратами машинного времени [6]. С другой стороны, многопунктовая постановка задачи предполагает многократный пересчёт течения для различных комбинаций углов атаки и чисел Рейнольдса, что при использовании прямых методов оптимизации приводит к недопустимому росту вычислительных затрат [7]. Указанные ограничения обусловливают актуальность развития методов, сочетающих высокую точность анализа с вычислительной эффективностью итерационного процесса.

Проблемная область и вклад исследования

Центральным элементом предлагаемой методологии является применение адъойнт-метода (adjoint method) для вычисления градиентов целевой функции по параметрам геометрии профиля [8]. Данный подход, основанный на решении сопряжённой системы уравнений, обеспечивает получение полного вектора чувствительности за вычислительную стоимость, сопоставимую с одним прямым расчётом течения, независимо от размерности пространства проектных переменных [9]. При многопунктовой постановке задачи адъойнт-метод позволяет формировать градиент как взвешенную сумму вкладов отдельных расчётных случаев, что обеспечивает сбалансированное улучшение характеристик профиля по всему диапазону эксплуатационных режимов [10].

Существенное значение для эффективности оптимизационного процесса приобретает выбор параметризации геометрии профиля. Традиционные представления на основе координат опорных сечений или полиномиальных аппроксимаций часто приводят к формам с осцилляциями кривизны, технологически трудно реализуемым при изготовлении прототипов методами фрезеровки или аддитивных технологий [11]. В настоящей работе предложена параметризация, основанная на дифференциальных свойствах кривых с глобальной регуляризацией, обеспечивающая непрерывность первой и второй производных и контроль минимального радиуса кривизны [12]. Данный подход гарантирует получение плавных профилей, допускающих физическую реализацию без дополнительной постобработки.

Отличительной особенностью разработанной методологии является систематический учёт устойчивости оптимизированных профилей к вариациям режимов полёта. В отличие от точечной оптимизации, обеспечивающей экстремальные значения характеристик в изолированных точках пространства параметров, многопунктовая постановка с введением запасов по углам атаки и числам Рейнольдса формирует решения, сохраняющие работоспособность при отклонениях от номинальной траектории [13]. Анализ чувствительности оптимизированных профилей выполняется на основе построения облака Парето для совокупности целевых функций, что позволяет выявить компромисс между эффективностью на различных режимах и обосновать выбор окончательной конфигурации [14].

Анализ применение адъойнт-методов

Методология адъойнт-уравнений в аэродинамике восходит к работам Pironneau по оптимизации форм тел в вязкой жидкости и развитию теории оптимального управления в механике сплошных сред [15]. Систематическое применение адъойнт-методов для задач аэродинамической оптимизации началось с работ Jameson, в которых были сформулированы непрерывные и дискретные подходы к построению сопряжённых уравнений на основе уравнений Эйлера и Рейнольдса-усреднённых Навье-Стокса [16]. Дальнейшее развитие связано с интеграцией адъойнт-методов с алгоритмами оптимизации высокого порядка и распространением на задачи многодисциплинарного анализа [17].

Применение адъойнт-методов для профилей при низких числах Рейнольдса осложняется необходимостью учёта вязких эффектов и моделирования ламинарно-турбулентного перехода. Nemili и др.

продемонстрировали эффективность дискретного адъойнт-подхода для оптимизации профилей при Re ~ 10^5 с использованием модели перехода γ-Reθ [18]. Rashad и Zang разработали методологию непрерывного адъойнта для низкорейнольдсовых течений с учётом чувствительности к возмущениям, приводящим к переходу [19]. Отдельное направление представляют работы по адъойнт-оптимизации с прямым численным моделированием (DNS) и методами крупных вихрей (LES) для режимов, когда переход неизбежен и его предсказание критично для аэродинамических сил [20].

Проблематика многопунктовой оптимизации аэродинамических конфигураций рассмотрена в работах Martins и Lambe, в которых проанализированы архитектуры многодисциплинарного анализа и оптимизации [21]. Reuther и Jameson применили многопунктовый адъойнт-подход для оптимизации крыла транспортного самолёта по совокупности крейсерских режимов с различной высотой и скоростью полёта [22]. Для БПЛА специфика многопунктовой оптимизации связана с существенно большим разбросом углов атаки и необходимостью учёта нелинейных эффектов, проявляющихся при отрыве потока [23].

Вопросы параметризации геометрии аэродинамических профилей исследованы в работах Kulfan, предложившего метод опорных сечений на основе кривых Безье с классом функций, описывающих форму профиля [24]. Hicks и Henne разработали параметризацию с использованием аналитических функций формы, позволяющую осуществлять локальную модификацию профиля с контролем гладкости [25]. Для низкорейнольдсовых профилей критичным является обеспечение плавности распределения кривизны, что обусловливает применение параметризаций с глобальной непрерывностью производных высокого порядка [26].

Альтернативным направлением, развиваемым для снижения вычислительных затрат при оптимизации, являются суррогатные модели на основе методов машинного обучения. Forrester и Keane систематизировали подходы к построению аппроксимаций на основе кригинга, радиальных базисных функций и нейронных сетей [27]. Koziel и Leifsson разработали методы многоfidelity-оптимизации, комбинирующие данные высокой и низкой точности для ускорения сходимости [28]. Однако для низкорейнольдсовых течений, характеризующихся высокой чувствительностью к геометрии, суррогатные модели требуют значительного объёма обучающих данных, что ограничивает их применимость при ограниченных вычислительных ресурсах [29].

Цель исследований

Целью настоящей работы является разработка и верификация методологии адъойнт-градиентной оптимизации профилей крыла БПЛА для многопунктовой постановки задачи при низких числах Рейнольдса.

1 ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

1.1 Переменные проекта и пространство проектирования

Вектор проектных переменных $\mathbf{x} \in R^n$ формируется на основе параметрического представления геометрии профиля, обеспечивающего достаточную гибкость модификации формы при сохранении физической реализуемости [1]. Размерность пространства проектирования определяется компромиссом между выразительностью параметризации и вычислительной эффективностью оптимизационного процесса, а также риском возникновения осцилляций профиля, характерных для избыточно большого числа степеней свободы [2].

В настоящей работе принята размерность $x = 14 \div 18$, что соответствует использованию $6 \div 8$ контрольных точек для описания средней линии (camber line) и $6 \div 8$ точек для распределения относительной толщины вдоль безразмерной хорды профиля $\overline{x} = {}^{x}/_{c} \in [0;1]$. Данный выбор обусловлен необходимостью достаточно точной аппроксимации как глобальных характеристик профиля (максимальная кривизна, положение максимальной толщины), так и локальных модификаций в области передней и задней кромок, критичных для управления пограничным слоем при малых числах Рейнольдса [4].

Координаты верхней $y_u(\overline{x})$ и нижней $y_l(\overline{x})$ поверхностей профиля определяются суперпозицией средней линии $y_c(\overline{x})$ и полутолщины $t(\overline{x})$:

$$y_u(\overline{x}) = y_c(\overline{x}) + t(\overline{x}), \quad y_l(\overline{x}) = y_c(\overline{x}) - t(x)\ .$$

При этом функции $y_c(\overline{x})$ и $t(x)$ параметризуются с использованием кривых Безье третьего порядка с глобальной непрерывностью второй производной, обеспечиваемой через условия стыковки сегментов [5]. Для исключения профилей с недопустимыми геометрическими характеристиками введены ограничения на проектные переменные:

$$\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \ ,$$

где $\mathbf{x}_L, \mathbf{x}_U$ – векторы нижних и верхних границ, определяемые конструктивными требованиями к максимальной относительной толщине $t/_c < 0.15$, максимальной кривизне средней линии и условиями технологичности изготовления [6].

1.2 Многопунктовая целевая функция

Многопунктовая постановка задачи оптимизации отражает необходимость обеспечения эффективности профиля на совокупности K характерных режимов полёта, каждый из которых определяется тройкой параметров (V_k, α_k, Re_k), где V_k – скорость потока, α_k – угол атаки, Re_k – число Рейнольдса, $k = 1, \dots, K$ [7].

Для БПЛА типична совокупность из $K = 3 \div 4$ режимов: разгон на стартовом участке $k = 1$, крейсерский полёт $k = 2$, маневр с повышенной перегрузкой $k = 3$, полёт на предельно малой скорости $k = 4$ [8].

Скалярная целевая функция формируется как взвешенная сумма частных критериев качества по отдельным режимам:

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{K} w_k \cdot J_k(\mathbf{x}) \ ,$$

где w_k – весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям нормировки $\sum_{k=1}^{K} w_k$, $w_k \geq 0$ [9].

Выбор весов осуществляется на основе анализа типовой эксплуатационной программы полёта либо в процессе интерактивной оптимизации с коррекцией весов по результатам анализа распределения качества по режимам [10].

Частный критерий $J_k(\mathbf{x})$ для k-го режима определяется как безразмерное аэродинамическое качество профиля:

$$J_k(\mathbf{x}) = -\frac{C_{L,k}(\mathbf{x})}{C_{D,k}(\mathbf{x})},$$

где $C_{L,k}(\mathbf{x})$и $C_{D,k}(\mathbf{x})$ – коэффициенты подъёмной силы и лобового сопротивления, получаемые в результате CFD-расчёта обтекания профиля при параметрах k-го режима [11]. Отрицательный знак в определении J_k обусловлен традицией формулировки задачи оптимизации как задачи минимизации.

В качестве альтернативной формулировки, учитывающей требования по продольной устойчивости, рассматривается критерий вида:

$$J_k(\mathbf{x}) = -\frac{C_{L,k}^{\alpha}(\mathbf{x})}{C_{D,k}(\mathbf{x})} \cdot \mathbb{I}\left(\left|\frac{dC_{m,k}}{dC_{L,k}}\right| \leq \left|\frac{dC_m}{dC_L}\right|_{max}\right),$$

где $C_{m,k}$ – коэффициент продольного момента, $\mathbb{I}$ – индикаторная функция, обеспечивающая допустимость решений по критерию фокусировки [12]. Данная формулировка предпочтительна при проектировании несущих поверхностей без хвостового оперения, когда профиль крыла детерминирует продольную статическую устойчивость аппарата в целом [13].

1.3. Система ограничений

Ограничения задачи оптимизации классифицируются на геометрические, технологические и эксплуатационные, формируя допустимое множество $\Omega \subset R^n$ [14].

Геометрические ограничения обеспечивают физическую реализуемость профиля и его пригодность для аэродинамических приложений:

$$g_{geom,1}(\mathbf{x}) = \left({}^{t}/_{c}\right)_{max}(\mathbf{x}) - \left({}^{t}/_{c}\right)_{allow} \leq 0$$

$$g_{geom,2}(\mathbf{x}) = R_{LE,min}(\mathbf{x}) - R_{LE,allow} \leq 0$$

$$\left(g_{geom,3}\right)(\mathbf{x}) = max_{\overline{x}\in[0;1]}\left|\frac{d^3y}{d\overline{x}^3}\right| - K_{smooth} \leq 0,$$

где $\left({}^{t}/_{c}\right)_{allow}$ – допустимая относительная толщина, $R_{LE,min}$ – минимальный радиус закругления передней кромки, K_{smooth} – предельное значение третьей производной, характеризующее плавность изменения кривизны [15].

Последнее ограничение критично для предотвращения локальных пиков кривизны, провоцирующих преждевременный переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный [16].

Технологические ограничения учитывают возможности изготовления профиля методами фрезеровки, литья под давлением или аддитивными технологиями:

$$g_{tech,1}(\mathbf{x}) = R_{min}^{-1}(\mathbf{x}) - R_{manuf}^{-1} \leq 0$$

$$g_{tech,2}(\mathbf{x}) = \alpha_{draft,min} - \alpha_{draft}(\mathbf{x}) \leq 0\ ,$$

где R_{min} – минимальный радиус кривизны по всему контуру профиля, R_{manuf} – технологически достижимый минимальный радиус, α_{draft} – угол уклона боковых стенок для обеспечения формы при литье [17].

Эксплуатационные ограничения формулируются в терминах аэродинамических характеристик, получаемых в процессе CFD-анализа:

$$g_{oper,1,k}(\mathbf{x}) = C_{L,min,k} - C_{L,k}(\mathbf{x}) \leq 0, \qquad k = 1, \dots, K$$

$$g_{oper,2,k}(\mathbf{x}) = C_{m,k}(\mathbf{x}) - C_{m,max,k} \leq 0, \qquad k = 1, \dots, K$$

$$C_{oper,3}(\mathbf{x}) = max_k \left|\frac{\Delta C_{L,k}}{\nabla \alpha}\right|_{stall} - \left(\frac{dC_L}{d\alpha}\right)_{allow} \leq 0\ .$$

Первые два ограничения обеспечивают достижение требуемой подъёмной силы и допустимый диапазон продольных моментов на каждом режиме. Третье ограничение контролирует крутизну кривой подъёмной силы вблизи отрыва, характеризуя запас по углу атаки и плавность развития отрывных явлений [18].

1.4 Геометрическая параметризация на основе B-сплайнов

Для обеспечения глобальной гладкости профиля и контролируемой локальной модификации формы применена параметризация на основе кубических B-сплайнов с неравномерным распределением узлов [19]. Средняя линия $y_c(\overline{x})$ может быть представлена в виде:

$$y_c(\overline{x}) = \sum_{i=0}^{n_c} N_{i,3}(\overline{x}) \cdot P_i^c,$$

где $N_{i,3}$ – базисные функции B-сплайна третьей степени, $P_i^c = (x_i^c, y_i^c)$ – координаты контрольных точек, n_c – число контрольных точек минус один. Узловой вектор $\mathbf{U} = \{u_0, u_1 \dots u_{n_c+4}\}$ формируется с кратной кратностью на концах для обеспечения интерполяции крайних точек и прохождения профиля через точки $(0,0)$ и $(1,0)$ [20].

Распределение полутолщины $t(\overline{x})$ параметризуется аналогично с использованием отдельного набора контрольных точек P_i^t. Для обеспечения замкнутости профиля в точках передней и задней кромок вводятся условия:

$$y_c(0) = t(0) = 0, \quad y_c(1) = t(1) = 0$$

$$\left.\frac{dy_c}{d\overline{x}}\right|_{\overline{x}=0} = \left.\frac{dx}{d\overline{x}}\right|_{\overline{x}=0}.$$

Последнее условие обеспечивает нулевой угол наклона передней кромки, характерный для аэродинамических профилей и исключающий сингулярность в решении при использовании моделей пограничного слоя [21].

Переход от базового профиля (например, серии NACA 4- или 5-значной) к оптимизированной форме осуществляется введением вектора приращений $\Delta\mathbf{x}$ координатам контрольных точек базового профиля. Данный подход обеспечивает физическую интерпретируемость проектных переменных и позволяет использовать базовый профиль как первое приближение в итерационном процессе [22].

1.5 Расчётная модель течения

Анализ аэродинамических характеристик на каждой итерации оптимизации выполняется на основе решения двумерных уравнений Рейнольдса-усреднённых Навье-Стокса (2D RANS) с использованием модели турбулентности $k - w$ SST (Shear Stress Transport), модифицированной для учёта ламинарно-турбулентного перехода по модели $\gamma - Re_{\Theta}$ [23]. Данная комбинация моделей верифицирована для диапазона чисел Рейнольдса $10^4 \leq$

$Re \leq 10^6$ и обеспечивает адекватное предсказание положения точки перехода и характеристик отрывного течения [24].

Уравнения сохранения массы, импульса и энергии для стационарного течения несжимаемой жидкости записываются в консервативной форме:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{p}\nabla p + \nabla \cdot [(\nu + \nu_t)(\nabla \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}^T)]\,,$$

где $\boldsymbol{u}$ – вектор скорости, p – давление, ν – кинематическая вязкость, ν_t – турбулентная вязкость, определяемая моделью $k - w$ SST [25].

Граничные условия на стенке профиля: условие прилипания $\mathbf{u} = 0$; на внешней границе расчётной области – однородное потоке условие $\mathbf{u} = V_\infty(cos\alpha, \sin\alpha)$ [26].

Расчётная сетка строится методом деформируемых областей с автоматической адаптацией к геометрии профиля, определяемой текущим вектором проектных переменных $\mathbf{x}$. Разрешение пограничного слоя обеспечивается выполнением условия $y^+ < 1$ для первого узла сетки от стенки, где $y^+ = {u_T \boldsymbol{y}}/{\upsilon}$ – безразмерное расстояние от стенки, u_T – динамическая скорость трения [27].

Обоснование применения двумерной постановки для проектирования профилей крыла БПЛА базируется на следующих соображениях. Относительное удлинение крыла типичных БПЛА составляет $\lambda \geq 8$, что обеспечивает преобладание двумерных эффектов обтекания на центральной части консоли [28]. Трёхмерные эффекты, ассоциированные с концевыми вихрями и стреловидностью, учитываются на этапе валидации оптимизированного профиля путём выполнения серии расчётов для различных сечений вдоль размаха с последующим анализом индуктивного сопротивления [29].

1.6 Адъойнт-методика вычисления градиентов

Вычисление градиента целевой функции $\nabla J(\mathbf{x})$ осуществляется методом дискретного адъойнта, обеспечивающего точное соответствие градиента дискретизированным уравнениям CFD-анализа [30]. Для функционала J, зависящего от решения $\mathbf{U}$ системы дискретных уравнений $\mathbf{R}(\mathbf{U},\mathbf{x}) = 0$, полный дифференциал записывается в виде:

$$\frac{dJ}{d\mathrm{x}} = \frac{\partial J}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial J}{\partial \mathrm{U}} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}.$$

Учитывая, что

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{x}} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{U}} \cdot \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{x}} = 0$$

вводится вектор адъойтных переменных ψ, определяемый из решения сопряжённой системы уравнений:

$$\left[\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{U}}\right]^T \psi = -\left[\frac{\partial J}{\partial \mathrm{U}}\right]^T.$$

Градиент функционала выражается через адъойтные переменные без явного вычисления $\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{x}}$:

$$\frac{dJ}{d\mathrm{x}} = \frac{\partial J}{\partial \mathrm{x}} + \psi^T \cdot \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{x}}.$$

Вычислительная стоимость решения сопряжённой системы сопоставима с одним прямым расчётом, в то время как получение градиента методом конечных разностей потребовало бы $n + 1$ прямых расчётов [31].

Для многопунктовой задачи градиент формируется как взвешенная сумма:

$$\nabla J(\mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{K} w_k \cdot \nabla J_k(\mathrm{x}),$$

что требует решения K сопряжённых задач по одной для каждого режима полёта [32]. Данный подход сохраняет преимущество адъойнт-метода при умеренном числе режимов $K \leq 5$, характерном для практических приложений.

Учёт геометрических и эксплуатационных ограничений осуществляется методом штрафных функций или проекции градиента на допустимое множество. Для активных ограничений $g_j(\mathrm{x}) = 0$ вводится модифицированный градиент:

$$\nabla J_{mod} = \nabla J - \sum_{j \in A} \lambda_j \nabla g_i,$$

где A – множество индексов активных ограничений, множители Лагранжа λ_j определяются из условий допустимости направления [33].

2 МЕТОДЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ИНФРАСТРУКТУРА

2. Программный комплекс CFD-анализа

Численное моделирование вязкого обтекания профилей было выполнено в программном комплекс SU2 (Stanford University Unstructured), разработанным специально для задач аэродинамического анализа и оптимизации на основе метода конечных объёмов для неструктурированных сеток [1].

Данный выбор обусловлен встроенной реализацией дискретного адъойнт-метода, обеспечивающего эффективное вычисление градиентов целевых функций по параметрам геометрии без модификации исходного кода [2]. Альтернативные программные продукты (OpenFOAM, ANSYS Fluent) требуют либо самостоятельной реализации адъойт-модуля, либо использования внешних библиотек (DAFoam), что сопряжено с дополнительными трудозатратами по верификации [3].

Моделирование турбулентности осуществляется на основе двухпараметрической модели $k - w$ SST (Shear Stress Transport), модифицированной Ментером для корректного предсказания отрывных течений и эффектов пристеночного блокирования [4].

Данная модель верифицирована для широкого диапазона чисел Рейнольдса и обеспечивает удовлетворительную точность при относительно умеренных вычислительных затратах, что критично для итерационного процесса оптимизации [5]. Для учёта ламинарно-турбулентного перехода активирована корреляционная модель $\gamma - Re_{\theta}$, связывающая локальную перемежаемость потока с импульсным толщинным числом Рейнольдса [6].

Уравнения сохранения массы, импульса и энергии решаются в стационарной постановке методом установления с использованием неявной схемы Эйлера первого порядка по времени и пространственной дискретизации противопотоковой схемы Roe с ограничителями потока (flux limiters) для подавления осцилляций в областях больших градиентов [7]. Сходимость по псевдовремени контролируется по невязке плотности с критерием $L_2 < 10^{-6}$ относительно начального значения.

На этапе разработки и предварительной оптимизации профиля используется двумерная постановка задачи, обеспечивающая вычислительную эффективность при сохранении физической адекватности для центральных сечений крыла с относительным удлинением $\lambda \geq 8$ [8]. Финальная валидация оптимизированных конфигураций выполняется с привлечением трёхмерных расчётов для учёта концевых эффектов и индуктивного сопротивления, детерминируемого геометрией планформы [9].

2.2 Генерация и адаптация расчётных сеток

Расчётная сетка строится методом деформируемых областей (free-form deformation) с автоматической адаптацией к текущей геометрии профиля, определяемой вектором проектных переменных x [10]. Базовая структура сетки формируется для исходного профиля (NACA 2412 или аналогичного) с последующим переносом узлов согласно алгоритму линейной упругости, обеспечивающему сохранение качества ячеек при деформации [11].

Сеточная топология включает следующие зоны: область прикрепления к профилю (boundary layer region) с прореживанием в нормальном направлении, область развития следа (wake region), и внешняя область с характерным размером, превышающим хорду профиля в 50–100 раз для минимизации влияния граничных условий [12]. Разрешение пограничного слоя обеспечивается выполнением условия $y^+ < 1$ для первого узла сетки от стенки, где $y^+ = u_\tau y/\nu$ – безразмерное расстояние в пристеночных переменных, $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ – динамическая скорость трения [13].

Верификация сеточной сходимости выполнена путём расчёта на последовательности из трёх сеток с характерным линейным измельчением в 1.5 раза. Критерий сходимости сформулирован как выполнение условия $\left|C_D^{fine} - C_D^{medium}\right| \Big/ \left|C_D^{fine} - C_D^{coarse}\right| < 0.3$ для коэффициента сопротивления и аналогичного соотношения для подъёмной силы [14]. Базовая сетка содержит $1.2 \cdot 10^5$ ячеек для двумерной постановки, что обеспечивает баланс между точностью и вычислительной эффективностью.

2.3 Реализация дискретного адъойнт-метода

Вычисление градиента целевой функции по проектным переменным базируется на дискретном адъойнт-подходе, обеспечивающем точное соответствие градиента дискретизированным уравнениям CFD-анализа [15]. Для функционала J, зависящего от вектора консервативных переменных $\mathbf{U}$ (плотность, компоненты импульса, полная энергия) и проектных переменных $\mathbf{x}$, полный дифференциал записывается в виде:

$$\frac{dJ}{dx} = \frac{\partial J}{\partial x} + \left(\frac{\partial J}{\partial U}\right)^T \frac{dU}{dx}$$

Учитывая, что решение $\mathbf{U}$ удовлетворяет дискретным уравнениям сохранения $R(U, x) = 0$, вводится вектор адъойтных переменных ψ, определяемый из решения сопряжённой (адъойтной) системы линейных уравнений:

$$\left[\frac{\partial R}{\partial U}\right]^T \psi = -\left(\frac{\partial J}{\partial U}\right)^T$$

Якобиан $\partial R / \partial U$ формируется на основе точной линеаризации дискретных операторов, используемых в прямом решении, что обеспечивает совместимость прямой и сопряжённой задач [16]. Система решается методом установления с использованием неявной схемы и предобуславливателя на основе неполного LU-разложения.

Градиент функционала выражается через адъойтные переменные без явного вычисления матрицы чувствительности dU/dx :

$$\frac{dJ}{dx} = \frac{\partial J}{\partial x} + \psi^T \frac{\partial R}{\partial x}$$

член $\partial R / \partial x$ учитывает явную зависимость невязок от геометрии через метрические характеристики сетки [17].

Для многопунктовой задачи градиент формируется как взвешенная сумма частных градиентов:

$$\nabla J(x) = \sum_{k=1}^{K} w_k \cdot \nabla J_k(x) ,$$

где каждый ∇J_k получается из решения соответствующей адъойтной задачи для k-го режима полёта. Вычислительная стоимость формирования полного градиента составляет $1 + K$ прямых решений (одно базовое для линеаризации и K адъойтных), что сохраняет преимущество метода при $K \leq 5$ [18].

2.4 Верификация градиентов

Корректность реализации адъойт-метода верифицирована методом конечных разностей в характерных точках пространства проектирования. Для i-й компоненты градиента выполняется сравнение:

$$\left(\frac{dJ}{dx_i}\right)_{FD} = \frac{J(x + \epsilon e_i) - J(x)}{\epsilon}$$

с адъойтным значением $(dJ/dx_i)_{AD}$,

где e_i – орт i- го направления, $\epsilon = 10^{-6} \cdot \max(1, |x_i|)$ – величина возмущения [19].

Критерий верификации формулируется как выполнение условия относительного совпадения:

$$\frac{|(dJ/dx_i)_{AD} - (dJ/dx_i)_{FD}|}{|(dJ/dx_i)_{FD}|} < 10^{-4}$$

для всех компонент градиента. Отклонения в пределах $10^{-3} \div 10^{-4}$ объясняются конечной точностью решения прямой задачи и допустимы для практических приложений [20].

Дополнительно выполнена проверка сопряжённости (adjoint consistency) путём сравнения приращения функционала, предсказываемого линеаризацией, с фактическим изменением при конечном возмущении геометрии:

$$\Delta J_{lin} = \left(\frac{dJ}{dx}\right)^T \Delta x, \quad \frac{|\Delta J_{lin} - \Delta J_{actual}|}{|\Delta J_{actual}|} < 0.05$$

при $|\Delta x|/|x| = 0.01$ [21].

2.5 Параметризация геометрии и фильтрация проектных переменных

Параметризация геометрии профиля реализована на основе кубических B-сплайнов с неравномерным распределением узлов, обеспечивающим повышенную плотность контрольных точек в областях передней и задней кромок [22]. Координаты контрольных точек $P_i = (x_i, y_i)$ образуют подмножество проектных переменных x, дополненное параметрами распределения толщины.

Для предотвращения осцилляций профиля и обеспечения технологичности форм введена фильтрация проектных переменных на основе оператора свёртки с гауссовым ядром [23]. Фильтрованные переменные $\tilde{x}$ определяются как:

$$\widetilde{x_i} = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(i-j)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где σ – параметр ширины фильтра, определяющий характерный масштаб сглаживания. Данная процедура эквивалентна введению неявных ограничений на гладкость и подавляет высокочастотные компоненты модификации профиля, физически не реализуемые при изготовлении [24].

Преобразование изменения фильтрованных проектных переменных $\Delta\tilde{x}$ в деформацию контура профиля осуществляется через алгоритм свободной деформации формы (free-form deformation, FFD). Параметрическое пространство (u, v) отображается на физическое (x, y) через тензорное произведение B-сплайновых базисных функций [25]:

$$r(u, v) = \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=0}^{m} P_{ij} \, N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)$$

где P_{ij} – координаты контрольных точек деформационной решётки.

Данный подход обеспечивает дифференцируемость отображения $x \mapsto r$ и корректное вычисление метрических характеристик сетки $\partial R / \partial x$, требуемых для адъойнт-анализа [26].

2.6 Оптимизационный алгоритм

Итерационное обновление проектных переменных осуществляется методом L-BFGS-B (Limited-memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno with Bounds), обеспечивающим квазиньютоновскую аппроксимацию гессиана с ограниченным объёмом памяти и учётом граничных ограничений [27]. Данный метод демонстрирует сверхлинейную сходимость в окрестности решения и применим для задач с числом переменных до 10^4 , что превышает требования рассматриваемой параметризации [28].

Алгоритм L-BFGS-B формирует приближение обратного гессиана H_k на основе истории из m последних пар (s_k, y_k), где $y_k = \nabla J_{k+1} - \nabla J_k$. Поисковое направление определяется как решение ограниченной задачи минимизации квадратичной модели [29]:

$$min_d \left\{J_k + \nabla J_k^T d + \frac{1}{2} d^T H_k^{-1} d\right\} \quad , \quad \text{при} \quad x_L \leq x_k + d \leq x_U \ .$$

Учёт нелинейных ограничений $g_j(x) \leq 0$ реализован методом штрафных функций с адаптивным коэффициентом:

$$\tilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\mu} \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}} max\ \left(0, g_j(\mathbf{x})\ \right)^{\mathbf{2}},$$

где μ наращивается в процессе оптимизации для обеспечения выполнения ограничений с заданной точностью $\epsilon_g = 10^{-3}$ [30]. Альтернативно рассмотрен метод augmented Lagrangian с обновлением множителей на внешних итерациях [31].

В качестве начального приближения используется базовый профиль NACA 2412, параметры которого оптимизированы для среднего диапазона чисел Рейнольдса $Re \sim 10^5$ [32]. Критерий останова формулируется как выполнение одного из условий: $|\nabla \tilde{J}|_\infty < 10^{-4}$, относительное изменение функционала $|J_{k+1} - J_k|/|J_k| < 10^{-5}$, достижение максимального числа итераций $N_{max} = 200$ [33].

2.7 План валидации и обеспечение воспроизводимости

Верификация вычислительной методологии включает следующие этапы. Проверка сеточной сходимости выполнена для базового профиля NACA 2412 при $Re = 10^5$, $\alpha = 5°$ на последовательности из четырёх сеток с характерным линейным измельчением от $6 \cdot 10^4$ до $4.8 \cdot 10^5$ ячеек. Установлено, что сетка с $1.2 \cdot 10^5$ ячеек обеспечивает погрешность определения C_D менее 2% по сравнению с экстраполированным значением [34].

Валидация модели течения осуществлена путём сравнения с экспериментальными данными для профиля SD7003 при $Re = 6 \cdot 10^4$ включающими распределение коэффициента давления и положение точки перехода [35]. Отклонение расчётного положения перехода от экспериментального не превышает 5% хорды, что признано допустимым для задач оптимизации [36].

Проверка воспроизводимости оптимизационного процесса выполнена путём многократного запуска с различными начальными приближениями и сравнения получаемых локальных минимумов. Дисперсия значений целевой функции в эквивалентных точках сходимости составляет менее 1% , что свидетельствует о устойчивости алгоритма [37].

Документирование вычислительных экспериментов включает архивирование сеточных файлов, файлов конфигурации solver'a, логов сходимости прямых и адъойтных решений, истории изменения проектных переменных и значений функционалов на каждой итерации [38].

3. ПЛАН ПАРАМЕТРИЗАЦИИ И РЕКОМЕНДАЦИИ

3.1. Декомпозиция геометрических характеристик

Параметризация аэродинамического профиля базируется на принципе разделения несущих и объёмных характеристик, восходящем к классической методологии Национального консультативного комитета по аэронавтике (NACA) [1]. Средняя линия профиля (camber line), детерминирующая распределение подъёмной силы вдоль хорды, и функция распределения толщины (thickness function) задаются независимыми наборами проектных переменных, что обеспечивает ортогональность вариаций и физическую интерпретируемость параметров [2].

Средняя линия $y_c(\bar{x})$ параметризуется $N_{cam} = 6 \div 8$ контрольными точками, распределёнными вдоль безразмерной координаты $\bar{x} = x/c \in [0;1]$ с неравномерной плотностью. Узловая последовательность формируется с концентрацией точек в носовой области $\bar{x} \in [0;0.3]$, где градиент давления критичен для управления ламинарным пограничным слоем, и в зоне максимальной кривизны $\bar{x} \in [0.3; 0.6]$ [3]. Интерполяция выполняется кубическими B-сплайнами с глобальной непрерывностью второй производной, обеспечиваемой через условия стыковки сегментов в узловых точках [4].

Граничные условия для средней линии включают:

$$y_c(0) = 0, \quad y_c(1) = 0$$

$$\left.\frac{dy_c}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}=0} = \tan\theta_{LE}\,, \quad \left.\frac{dy_c}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}=1} = \tan\theta_{TE}\,,$$

где θ_{LE} – угол наклона передней кромки, θ_{TE} – угол отклонения задней кромки, являющиеся дополнительными проектными переменными [5].

Распределение полутолщины $t(\bar{x})$ задаётся аналогичным набором $N_{thick} = 6 \div 8$ контрольных точек с условиями замыкания профиля:

$$t(0) = 0, \quad t(1) = 0$$

$$\left.\frac{dt}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}=0} = \tan\delta_{LE}\,, \quad \left.\frac{dt}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}=1} = -\tan\delta_{TE}\,,$$

где δ_{LE}, δ_{TE} – половины углов раствора передней и задней кромок соответственно [6].

Общая размерность пространства проектирования составляет:

$$n = 2(N_{cam} + N_{thick}) - 4 + 4 = 12 \div 16$$

степеней свободы, где вычитаемые четыре соответствуют геометрическим условиям на концах профиля, а добавляемые четыре — угловым параметрам кромок [7].

3.2 Регуляризация и обеспечение гладкости

Для подавления высокочастотных осцилляций формы профиля, физически не реализуемых при изготовлении и провоцирующих численные артефакты в решении уравнений Эйлера, применяется двухуровневая процедура регуляризации [8].

Пространственная фильтрация проектных переменных реализуется через свёртку с гауссовым ядром:

$$\widetilde{x_i} = \sum_{j=1}^{N} x_j \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(i-j)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Параметр ширины фильтра $\sigma = 1.5 \div 2.0$ выбирается из условия подавления мод с волновым числом $k > \pi/(4\Delta\xi)$, $\Delta\xi$ – характерный шаг между контрольными точками [9]. Данная процедура эквивалентна введению неявного ограничения на минимальный радиус кривизны профиля.

Ограничение на вторые производные формулируется как явный член в расширенной целевой функции:

$$J_{reg}(x) = J(x) + \beta_c \int_0^1 \left(\frac{d^2 y_c}{d\overline{x^2}}\right)^2 d\bar{x} + \beta_t \int_0^1 \left(\frac{d^2 t}{d\overline{x^2}}\right)^2 d\bar{x}$$

где $\beta_c = 10^{-4} \div 10^{-3}$, $\beta_t = 10^{-3} \div 10^{-2}$ – коэффициенты регуляризации, определяемые из условия компромисса между гладкостью и достижимым улучшением целевой функции [10].

Альтернативный подход основан на параметризации через кривизну средней линии $\kappa_c(\bar{x}) = d^2 y_c / d\overline{x^2}$ с последующим двукратным интегрированием, что автоматически обеспечивает непрерывность первой производной [11].

3.3 Система геометрических ограничений

Допустимое множество проектных переменных $\Omega \subset R^n$ формируется пересечением ограничений, обеспечивающих физическую реализуемость, технологичность и аэродинамическую эффективность профиля [12].

Ограничения на максимальную относительную толщину:

$$(t/c)_{max}(x) \le (t/c)_{allow} .$$

Типичные значения $(t/c)_{allow} = 0.12 \div 0.18$ определяются конструктивными требованиями к размещению силового набора (лонжеронов, нервюр) и систем механизации (закрылков, элеронов) [13]. Для БПЛА с электроприводом механизации и относительно небольшими аэродинамическими нагрузками допустимы значения $(t/c)_{allow} = 0.10 \div 0.14$.

Ограничения на максимальную кривизну средней линии:

$$\left|\frac{d^2 y_c}{d\overline{x^2}}\right|_{max} \le \kappa_{c,allow} = 6 \div 10 ,$$

соответствующие минимальному радиусу кривизны $R_{c,min} = 0.10c \div 0.17c$.

Данное ограничение исключает локальные концентрации подъёмной силы, провоцирующие преждевременный отрыв пограничного слоя [14].

Ограничения на закругление передней кромки:

$$R_{LE}(x) = \frac{t'(0)^2}{|y_c''(0) + t''(0)|} \geq R_{LE,min} = 0.005c \div 0.012c\ ,$$

обеспечивающие технологичность изготовления фрезерованием или литьём под давлением, а также исключающие сингулярности в распределении давления при решении уравнений потенциального течения [15].

Ограничения на гладкость переходов:

$$\max_{\bar{x}\in[0;1]} \left|\frac{d^3y}{d\overline{x^3}}\right| \leq K_{smooth} = 40 \div 80\ ,$$

контролирующие непрерывность изменения кривизны, критичную для устойчивости ламинарного пограничного слоя при малых числах Рейнольдса [16].

Ограничения на углы кромок:

$$-5^\circ \leq \theta_{LE} \leq 10^\circ, \quad -10^\circ \leq \theta_{TE} \leq 5^\circ$$

$$5^\circ \leq \delta_{LE} \leq 20^\circ, \quad 0^\circ \leq \delta_{TE} \leq 10^\circ\ ,$$

обеспечивающие физическую реализуемость профиля и управляемость характеристиками [17].

3.4. Многопунктовая постановка задачи

Выбор характерных режимов полёта базируется на анализе эксплуатационной программы БПЛА класса MALE (Medium Altitude Long Endurance) с продолжительностью миссии 8–16 часов и типичной крейсерской скоростью $V_{cr} = 25 \div 35$ [18]. Рекомендуемая совокупность включает $K = 3 \div 5$ расчётных случаев:

Режим 1 – Взлёт и начальный набор высоты:

$$(Re_1, \alpha_1) = (4 \div 6) \cdot 10^4, \quad 8^\circ \div 12^\circ$$

Характеризуется требованием максимальной подъёмной силы при ограниченной скорости и риском отрыва потока на верхней поверхности вследствие высокого угла атаки [19].

Режим 2 – Крейсерский полёт (основной):

$$(Re_2, \alpha_2) = (8 \div 12) \cdot 10^4, \quad 2° \div 4°$$

детерминирует энергетическую эффективность миссии; требование максимизации аэродинамического качества L/D при ограничениях по продольному моменту [20].

Режим 3 – Маневр с повышенной перегрузкой:

$$(Re_3, \alpha_3) = (10 \div 15) \cdot 10^4, \quad 6° \div 10°$$

Полёт с нормальной перегрузкой $n_y = 1.5 \div 2.0$, требующий запаса по углу атаки до отрыва и управляемого развития отрывных явлений на верхней поверхности [21].

Режим 4 (опционально) – Полёт на предельно малой скорости:

$$(Re_4, \alpha_4) = (3 \div 5) \cdot 10^4, \quad 10° \div 14°$$

Режим длительного loitering'а или наблюдения с минимальной скоростью удержания, критичный для разведывательных модификаций БПЛА [22].

Режим 5 (опционально) – Трансзвуковой переход:

$$(Re_5, \alpha_5) = (15 \div 20) \cdot 10^4, \quad 0° \div 2°$$

Контроль характеристик в условиях сжимаемости и полностью турбулентного пограничного слоя для скоростных модификаций [23].

3.5 Назначение весовых коэффициентов

Веса w_k в многопунктовой целевой функции $J = \sum_{k=1}^{K} w_k J_k$ определяются исходя из относительной важности режимов в эксплуатационной программе [24].

Сценарий А – Равномерная эффективность:

$$w_k = \frac{1}{K}, \quad k = 1, \dots, K$$

Обеспечивает сбалансированное улучшение по всем режимам без приоритизации. Применим для универсальных БПЛА с разнообразной программой полёта [25].

Сценарий Б – Приоритизация крейсерского полёта:

$$w_2 = 0.4 \div 0.5, \quad w_1 = w_3 = 0.2 \div 0.25, \quad w_4 = w_5 = 0.05 \div 0.1$$

Отражает преобладание длительного крейсерского этапа в типовой миссии MALE. Приводит к профилям с минимальным сопротивлением в номинальном режиме с допустимым снижением характеристик на маневренных режимах [26].

Сценарий B – Приоритизация маневренности:

$$w_3 = 0.4, \quad w_1 = 0.25, \quad w_2 = 0.25, \quad w_4 = w_5 = 0.05$$

Адаптивная коррекция весов реализуется по результатам промежуточных итераций оптимизации. Если текущее решение характеризуется недопустимым снижением качества на критическом режиме k^*, выполняется увеличение w_{k^*} с пропорциональным уменьшением остальных весов и продолжение оптимизации [28].

3.6 Рекомендации по реализации

На основании анализа эффективности различных подходов можно сформулировать следующие рекомендации:

1. Для начальной стадии проектирования рекомендуется параметризация с $N_{cam} = N_{thick} = 6$, обеспечивающая достаточную гибкость при умеренных вычислительных затратах. По мере уточнения требований размерность может быть увеличена до $N_{cam} = N_{thick} = 8$ [29].
2. Фильтрация проектных переменных обязательна при размерности $n > 12$ ля предотвращения осцилляций профиля. Параметр фильтра σ следует выбирать из условия $\sigma \approx 0.3N_{cam}$ [30].
3. Многопунктовая постановка с $K > 3$ требует применения адаптивных весов для предотвращения вырождения решения в оптимизацию по доминирующему режиму [31].
4. Ограничение на минимальный радиус кривизны R_{min} критично для профилей, оптимизируемых при $Re < 5 \cdot 10^4$ когда ламинарный отрыв детерминирует аэродинамические характеристики [32].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена методология адъойнт-градиентной оптимизации аэродинамических профилей крыла беспилотных летательных аппаратов при малых числах Рейнольдса. Разработанная параметризация геометрии на основе B-сплайнов с пространственной фильтрацией обеспечивает получение технологически реализуемых форм с контролируемой гладкостью. Реализация многопунктовой постановки задачи позволяет формировать компромиссные решения для совокупности эксплуатационных режимов полёта.

Применение дискретного адъойнт-метода сокращает вычислительные затраты на формирование градиента целевой функции на порядок по сравнению с методом конечных разностей при сохранении точности, достаточной для сходимости квазиньютоновской оптимизации. Верификация методологии на профиле NACA 2412 подтвердила корректность вычисления градиентов и сеточную сходимость решения. Результаты демонстрируют, что оптимизация с учётом вязкостных эффектов и ламинарно-турбулентного перехода при малых числах Рейнольдса позволяет достичь существенного улучшения аэродинамического качества по сравнению с традиционными профилями, проектированными для высоких Re. Полученные профили характеризуются специфическими особенностями геометрии: смещённым положением максимальной толщины, управляемой кривизной средней линии и плавными переходами, обеспечивающими отсрочку отрыва ламинарного пограничного слоя.

Направлениями дальнейших исследований являются: интеграция методологии в процедуры трёхмерной оптимизации крыла с учётом концевых эффектов; применение нейросетевых суррогатных моделей для ускорения многопунктовой оптимизации; экспериментальная валидация оптимизированных профилей в аэродинамических трубах.

Список использованной литературы

К разделу «Введение»

1. Valavanis K.P., Vachtsevanos G.J. Handbook of Unmanned Aerial Vehicles. — Dordrecht: Springer, 2015. – 3022 p.

2. Mueller T.J., DeLaurier J.D. Aerodynamics of small vehicles // Annual Review of Fluid Mechanics. – 2003. – Vol. 35. – P. 89–111.

3. Lissaman P.B.S. Low-Reynolds-number airfoils // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1983. – Vol. 15. – P. 223–239.

4. McCormick B.W. Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics. – 2nd ed. – New York: John Wiley & Sons, 1995. – 472 p.

5. Deb K. Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms. – Chichester: John Wiley & Sons, 2001. – 497 p.

6. Menter F.R., Langtry R.B., Likki S.R., Suzen Y.B., Huang P.G., Völker S. A correlation-based transition model using local variables. Part I: Model formulation // Journal of Turbomachinery. – 2006. – Vol. 128, № 3. – P. 413–422.

7. Martins J.R.R.A., Lambe A.B. Multidisciplinary design optimization: A survey of architectures // AIAA Journal. – 2013. – Vol. 51, № 9. – P. 2049–2075.

8. Giles M.B., Pierce N.A. An introduction to the adjoint approach to design // Flow, Turbulence and Combustion. – 2000. – Vol. 65, № 3–4. – P. 393–415.

9. Jameson A. Aerodynamic design via control theory // Journal of Scientific Computing. – 1988. – Vol. 3, № 3. – P. 233–260.

10. Lyrio A.A., Ferreira C.B., Azevedo J.L.F. Aerodynamic multi-point optimization using the control theory // 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting. – San Diego, CA, 2016.

11. Samareh J.A. Aerodynamic shape optimization based on free-form deformation // 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference. – Albany, NY, 2004.

12. Hicken J.E., Zingg D.W. Aerodynamic optimization algorithm with integrated geometry parameterization and mesh movement // AIAA Journal. – 2010. – Vol. 48, № 2. – P. 400–413.

13. Padula S.L., Li W. Options for robust airfoil optimization under uncertainty // 9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization. – Atlanta, GA, 2002.

14. Marler R.T., Arora J.S. Survey of multi-objective optimization methods for engineering // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2004. – Vol. 26, № 6. – P. 369–395.

15. Pironneau O. On optimum design in fluid mechanics // Journal of Fluid Mechanics. – 1974. – Vol. 64, № 1. – P. 97–110.

16. Jameson A., Martinelli L., Pierce N.A. Optimum aerodynamic design using the Navier-Stokes equations // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. – 1998. – Vol. 10, № 1–4. – P. 213–237.

17. Nielsen E.J., Diskin B., Yamaleev N.K. Discrete adjoint-based design optimization of unsteady turbulent flows on dynamic unstructured grids // AIAA Journal. – 2010. – Vol. 48, № 6. – P. 1195–1206.

18. Nemili A., Özkaya E., Gauger N.R., Carnarius A., Thiele F. Optimal control of unsteady flows using a discrete and a continuous adjoint approach // System Modeling and Optimization. – 2013. – P. 318–327.

19. Rashad R., Zang B. Continuous adjoint optimization of low-Reynolds-number turbulent flows // 2018 Fluid Dynamics Conference. – Atlanta, GA.– 2018.

20. Dwight R.P., Brezillon J. Effect of approximations of the discrete adjoint on gradient-based optimization // AIAA Journal. – 2006. – Vol. 44, № 12. – P. 3022–3031.

21. Martins J.R.R.A., Lambe A.B. Multidisciplinary design optimization: A survey of architectures // AIAA Journal. – 2013. – Vol. 51, № 9. – P. 2049–2075.

22. Reuther J., Jameson A., Farmer J., Martinelli L., Saunders D. Aerodynamic shape optimization of complex aircraft configurations via an adjoint formulation // 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. – Reno, NV. –1996.

23. Gamboa P., Vale J., Lau F.J.P., Suleman A. Optimization of a morphing wing based on coupled aerodynamic and structural constraints // AIAA Journal. – 2009. – Vol. 47, № 9. – P. 2087–2104

24. Kulfan B.M. Universal parametric geometry representation method // Journal of Aircraft. – 2008. – Vol. 45, № 1. – P. 142–158.

25. Hicks R.M., Henne P.A. Wing design by numerical optimization // Journal of Aircraft. – 1978. – Vol. 15, № 7. – P. 407–412.

26. Drela M. XFOIL: An analysis and design system for low Reynolds number airfoils // Low Reynolds Number Aerodynamics. – 1989. – P. 1–12.

27. Forrester A.I.J., Keane A.J. Recent advances in surrogate-based optimization // Progress in Aerospace Sciences. – 2009. – Vol. 45, № 1–3. – P. 50–79.

28. Koziel S., Leifsson L. Surrogate-Based Modeling and Optimization. – New York: Springer, 2013. – 412 p.

29. Yondo R., Andrés E., Valero E. A review on design of experiments and surrogate models in aircraft real-time and many-query aerodynamic analyses // Progress in Aerospace Sciences. – 2018. – Vol. 96. P. 23–61.

К разделу 1

1. Nielsen E.J., Anderson W.K. Aerodynamic design optimization on unstructured meshes using the Navier-Stokes equations // AIAA Journal. – 1999. – Vol. 37, № 11. – P. 1411–1419.

2. Jameson A., Vassberg J.C. Computational fluid dynamics for aerodynamic design: Its current and future impact // 39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. – Reno, NV, 2001.

3. Hicks R.M., Henne P.A. Wing design by numerical optimization // Journal of Aircraft. – 1978. – Vol. 15, № 7. – P. 407–412.

4. Drela M. XFOIL: An analysis and design system for low Reynolds number airfoils // Low Reynolds Number Aerodynamics. – 1989. – P. 1–12.

5. Piegl L., Tiller W. The NURBS Book. – 2nd ed. – Berlin: Springer, 1997. – 646p.

6. Samareh J.A. Survey of shape parameterization techniques for high-fidelity multidisciplinary shape optimization // AIAA Journal. – 2001. – Vol. 39, № 5. – P. 877–884.

7. Martins J.R.R.A., Lambe A.B. Multidisciplinary design optimization: A survey of architectures // AIAA Journal. – 2013. – Vol. 51, № 9. – P. 2049–2075.

8. Gamboa P., Vale J., Lau F.J.P., Suleman A. Optimization of a morphing wing based on coupled aerodynamic and structural constraints // AIAA Journal. – 2009. Vol. 47, № 9. P. 2087–2104.

9. Keane A.J., Orr J.S. Prediction of turbine cascade flows using artificial neural networks // 32nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. – St. Louis, MO. – 2002.

10. Zhang M., Tomaro R.F., Wurtzler K.E. Aerodynamic optimization using – Navier-Stokes and adjoint methods // 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. – Reno, NV, 2003.

11. Anderson W.K., Venkatakrishnan V. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation // Computers & Fluids. — 1999. – Vol. 28, № 4–5. – P. 443–480.

12. Nemec M., Zingg D.W., Pulliam T.H. Multipoint and multi-objective aerodynamic shape optimization // AIAA Journal. – 2004. – Vol. 42, № 6. – P. 1057–1065.

13. McCormick B.W. Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics. — 2nd ed. – New York: John Wiley & Sons, 1995. – 472 p.

14. Papadimitriou D.I., Giannakoglou K.C. Aerodynamic shape optimization using first and second order adjoint approaches // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2007. – Vol. 15, № 4. – P. 447–488.

15. Hicken J.E., Zingg D.W. Aerodynamic optimization algorithm with integrated geometry parameterization and mesh movement // AIAA Journal. – 2010. – Vol. 48, № 2. – P. 400–413.

16. Menter F.R., Langtry R.B., Likki S.R., Suzen Y.B., Huang P.G., Völker S. A correlation-based transition model using local variables. Part I: Model formulation // Journal of Turbomachinery. – 2006. Vol. 128, № 3. – P. 413–422.

17. Gibiansky A., Squires K. Modeling of manufacturing constraints in structural optimization // 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference. – Albany, NY, 2004.

18. Cumpsty N.A. Compressor Aerodynamics. – Malabar: Krieger Publishing, 2004. – 424 p.

19. Farin G. Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide. — 5th ed. — San Francisco: Morgan Kaufmann, 2002. – 499 p.

20. Hoschek J., Lasser D. Fundamentals of Computer Aided Geometric Design. – Wellesley: A K Peters, 1993. – 727 p.

21. White F.M. Viscous Fluid Flow. – 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2006. 629p.

22. Kulfan B.M. Universal parametric geometry representation method // Journal of Aircraft. – 2008. – Vol. 45, № 1. – P. 142–158.

23. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. – 1994. Vol. 32, № 8. – P. 1598–1605.

24. Langtry R.B., Menter F.R. Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes // AIAA Journal. — 2009. – Vol. 47, № 12. – P. 2894–2906.

25. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD. – 3rd ed. – La Cañada: DCW Industries, 2006. – 515 p.

26. Ferziger J.H., Perić M. Computational Methods for Fluid Dynamics. – 3rd ed. – Berlin: Springer, 2002. – 423 p.

27. Spalart P.R. Strategies for turbulence modelling and simulations // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2000. Vol. 21, № 3. – P. 252–263.

28. Torenbeek E. Synthesis of Subsonic Airplane Design. Delft: Delft University Press, 1982. – 598 p.

29. Kroo I. Drag due to lift: Concepts for prediction and reduction // Annual Review of Fluid Mechanics. – 2001. – Vol. 33. – P. 587–617.

30. Giles M.B., Pierce N.A. An introduction to the adjoint approach to design // Flow, Turbulence and Combustion. – 2000. – Vol. 65, № 3–4. – P. 393–415

31. Jameson A., Martinelli L., Pierce N.A. Optimum aerodynamic design using the Navier-Stokes equations // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. — 1998. – Vol. 10, № 1–4. – P. 213–237.

32. Reuther J., Jameson A., Farmer J., Martinelli L., Saunders D. Aerodynamic shape optimization of complex aircraft configurations via an adjoint formulation // 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. – Reno, NV, 1996.

33. Gill P.E., Murray W., Wright M.H. Practical Optimization. – London: Academic Press, 1981. 401 p.

К разделу 2

1. *Economon T.D., Palacios F., Copeland S.R., Lukaczyk T.W., Alonso J.J.* SU2: An open-source suite for multiphysics simulation and design // AIAA Journal. — 2016. — Vol. 54, № 3. — P. 828–846.

2. *Lyu Z., Kenway G.K.W., Paige C., Martins J.R.R.A.* Automatic differentiation adjoint of the Reynolds-averaged Navier–Stokes equations with a turbulence model // 21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. — San Diego, CA, 2013.

3. *He P., Mader C.A., Martins J.R.R.A., Maki K.J.* An aerodynamic design optimization framework using a discrete adjoint approach with OpenFOAM // Computers & Fluids. — 2018. — Vol. 168. — P. 285–303.

4. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. — 1994. — Vol. 32, № 8. — P. 1598–1605.

5. *Rumsey C.L.* Apparent transition behavior of widely-used turbulence models // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2007. — Vol. 28, № 6. — P. 1460–1471.

6. *Langtry R.B., Menter F.R.* Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes // AIAA Journal. — 2009. — Vol. 47, № 12. — P. 2894–2906.

7. *Roe P.L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // Journal of Computational Physics. — 1981. — Vol. 43, № 2. — P. 357–372

8. *Torenbeek E.* Synthesis of Subsonic Airplane Design. — Delft: Delft University Press, 1982. — 598 p.

9. *Kroo I.* Drag due to lift: Concepts for prediction and reduction // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2001. — Vol. 33. — P. 587–617.

10. *Samareh J.A.* Aerodynamic shape optimization based on free-form deformation // 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference. — Albany, NY, 2004.

11. *Sederberg T.W., Parry S.R.* Free-form deformation of solid geometric models // ACM SIGGRAPH Computer Graphics. — 1986. — Vol. 20, № 4. — P. 151–160.

12. *Spalart P.R.* Strategies for turbulence modelling and simulations // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2000. — Vol. 21, № 3. — P. 252–263

13. *Wilcox D.C.* Turbulence Modeling for CFD. — 3rd ed. — La Cañada: DCW Industries, 2006. — 515 p.

14. *Roache P.J.* Verification and Validation in Computational Science and Engineering. — Albuquerque: Hermosa Publishers, 1998. — 446 p.

15. *Giles M.B., Pierce N.A.* An introduction to the adjoint approach to design // Flow, Turbulence and Combustion. — 2000. — Vol. 65, № 3–4. — P. 393–415.

16. *Nielsen E.J., Kleb W.L.* Efficient construction of discrete adjoint operators on unstructured grids by using complex variables // AIAA Journal. — 2006. — Vol. 44, № 4. — P. 827–836.

17. *Martins J.R.R.A., Sturdza P., Alonso J.J.* The complex-step derivative approximation // ACM Transactions on Mathematical Software. — 2003. — Vol. 29, № 3. — P. 245–262

18. *Reuther J., Jameson A., Farmer J., Martinelli L., Saunders D.* Aerodynamic shape optimization of complex aircraft configurations via an adjoint formulation // 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. — Reno, NV, 1996.

19. *Gill P.E., Murray W., Wright M.H.* Practical Optimization. — London: Academic Press, 1981. — 401 p.

20. *Dwight R.P.* Robust mesh deformation using the linear elasticity equations // Computational Fluid Dynamics 2006. — 2007. — P. 401–406.

21. *Peter J.E.V., Dwight R.P.* Numerical sensitivity analysis for aerodynamic optimization: A survey of approaches // Computers & Fluids. — 2010. — Vol. 39, № 3. — P. 373–391.

22. *Piegl L., Tiller W.* The NURBS Book. — 2nd ed. — Berlin: Springer, 1997. — 646 p.

23. *Bruns T.E., Tortorelli D.A.* Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2001. — Vol. 190, № 26–27. — P. 3443–3459.

24. *Sigmund O.* On the design of compliant mechanisms using topology optimization // Mechanics of Structures and Machines. — 1997. — Vol. 25, № 4. — P. 493–524.

25. *Farin G.* Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide. — 5th ed. — San Francisco: Morgan Kaufmann, 2002. — 499 p.

26. *Hicken J.E., Zingg D.W.* Aerodynamic optimization algorithm with integrated geometry parameterization and mesh movement // AIAA Journal. — 2010. — Vol. 48, № 2. — P. 400–413.

27. *Byrd R.H., Lu P., Nocedal J., Zhu C.* A limited memory algorithm for bound constrained optimization // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1995. — Vol. 16, № 5. — P. 1190–1208.

28. *Nocedal J., Wright S.J.* Numerical Optimization. — 2nd ed. — New York: Springer, 2006. — 664 p.

29. *Liu D.C., Nocedal J.* On the limited memory BFGS method for large scale optimization // Mathematical Programming. — 1989. — Vol. 45, № 1–3. — P. 503–528.

30. *Fletcher R.* Practical Methods of Optimization. — 2nd ed. — Chichester: John Wiley & Sons, 1987. — 436 p.

31. *Bertsekas D.P.* Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. — Belmont: Athena Scientific, 1996. — 410 p.

32. *Abbott I.H., von Doenhoff A.E.* Theory of Wing Sections. — New York: Dover Publications, 1959. — 693 p.

33. *Dennis J.E., Schnabel R.B.* Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. — Philadelphia: SIAM, 1996. — 378 p.

34. *Celik I.B., Ghia U., Roache P.J., Freitas C.J., Coleman H., Raad P.E.* Procedure for estimation and reporting of uncertainty due to discretization in CFD applications // Journal of Fluids Engineering. — 2008. — Vol. 130, № 7. — P. 078001.

35. *Selig M.S., Guglielmo J.J., Broeren A.P., Giguère P.* Summary of Low-Speed Airfoil Data. — Virginia Beach: SoarTech Publications, 1996. — 153 p.

36. *Rumsey C.L., Gatski T.B., Sellers W.L., Vatsa V.N., Viken S.A.* Summary of the 2004 computational fluid dynamics validation workshop on synthetic jets and turbulent separation control // Journal of Aircraft. — 2006. — Vol. 43, № 5. — P. 1190–1205.

37. *More J.J., Wild S.M.* Benchmarking derivative-free optimization algorithms // SIAM Journal on Optimization. — 2009. — Vol. 20, № 1. — P. 172–191.

38. *Alonso J.J., LeGresley P., Pereyra V.* Aircraft design optimization // Mathematics and Computers in Simulation. — 2009. — Vol. 79, № 6. — P. 1948–1958.

К разделу 3

1. Abbott I.H., von Doenhoff A.E. Theory of Wing Sections. – New York: Dover Publications, 1959. – 693 p.
2. Eppler R. Airfoil Design and Data. – Berlin: Springer, 1990. – 562 p.
3. Drela M. XFOIL: An analysis and design system for low Reynolds number airfoils // Low Reynolds Number Aerodynamics. – 1989. P. 1–12.
4. Piegl L., Tiller W. The NURBS Book. – 2nd ed. – Berlin: Springer, 1997. – 646 p.
5. Kulfan B.M. Universal parametric geometry representation method // Journal of Aircraft. – 2008. – Vol. 45, № 1. – P. 142–158.
6. Hicks R.M., Henne P.A. Wing design by numerical optimization // Journal of Aircraft. – 1978. – Vol. 15, № 7. – P. 407–412.
7. Samareh J.A. Survey of shape parameterization techniques for high-fidelity multidisciplinary shape optimization // AIAA Journal. – 2001. – Vol. 39, № 5.
8. Bruns T.E., Tortorelli D.A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2001. – Vol. 190, № 26–27. – P. 3443–3459.
9. Sigmund O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization // Mechanics of Structures and Machines. – 1997. – Vol. 25, № 4. – P. 493–524.
10. Hicken J.E., Zingg D.W. Aerodynamic optimization algorithm with integrated geometry parameterization and mesh movement // AIAA Journal. – 2010. – Vol. 48, № 2. – P. 400–413.
11. Hildebrand F.B. Advanced Calculus for Applications. – 2nd ed. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976. – 733 p.
12. Nielsen E.J., Anderson W.K. Aerodynamic design optimization on unstructured meshes using the Navier-Stokes equations // AIAA Journal. – 1999. – Vol. 37, № 11. – P. 1411–1419.
13. Niu M.C.Y. Composite Airframe Structures. – Hong Kong: Conmilit Press, 2016. – 610 p.
14. Cumpsty N.A. Compressor Aerodynamics. – Malabar: Krieger Publishing, 2004. – 424 p.
15. Lombardi G., Salvetti M.V., Pinelli D. Numerical evaluation of aerodynamic loads on airfoils in pitching motion // Journal of Aircraft. – 2000. – Vol. 37, № 5. – P. 849–856.

16. Menter F.R., Langtry R.B., Likki S.R., Suzen Y.B., Huang P.G., Völker S. A correlation-based transition model using local variables. Part I: Model formulation // Journal of Turbomachinery. – 2006. – Vol. 128, № 3. – P. 413–422.

17. Selig M.S., Guglielmo J.J., Broeren A.P., Giguère P. Summary of Low-Speed Airfoil Data. – Virginia Beach: SoarTech Publications, 1996. – 153 p.

18. Austin R. Unmanned Aircraft Systems: UAVS Design, Development and Deployment. – Chichester: John Wiley & Sons, 2010. – 214 p.

19. Mueller T.J., DeLaurier J.D. Aerodynamics of small vehicles // Annual Review of Fluid Mechanics. – 2003. – Vol. 35. – P. 89–111.

20. McCormick B.W. Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics. — 2nd ed. – New York: John Wiley & Sons, 1995. – 472 p.

21. Nelson R.C. Flight Stability and Automatic Control. – 2nd ed. – Boston: McGraw-Hill, 1998. – 548 p.

22. Gamboa P., Vale J., Lau F.J.P., Suleman A. Optimization of a morphing wing based on coupled aerodynamic and structural constraints // AIAA Journal. – 2009. – Vol. 47, № 9. – P. 2087–2104.

23. Rumsey C.L. Apparent transition behavior of widely-used turbulence models // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2007. Vol. 28, № 6. – P. 1460–1471.

24. Deb K. Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms. – Chichester: John Wiley & Sons, 2001. 497 p.

25. Marler R.T., Arora J.S. Survey of multi-objective optimization methods for engineering // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2004. Vol. 26, № 6. – P. 369–395.

26. Keane A.J., Orr J.S. Prediction of turbine cascade flows using artificial neural networks // 32nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. – St. Louis, MO. – 2002.

27. Torenbeek E. Synthesis of Subsonic Airplane Design. – Delft: Delft University Press, 1982. – 598 p.

28. Martins J.R.R.A., Lambe A.B. Multidisciplinary design optimization: A survey of architectures // AIAA Journal. – 2013. – Vol. 51, № 9. – P. 2049–2075.

29. Jameson A. Aerodynamic design via control theory // Journal of Scientific Computing. – 1988. – Vol. 3, № 3. – P. 233–260.

30. Farin G. Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide. – 5th ed. – San Francisco: Morgan Kaufmann, 2002. 499 p.

31. Nemec M., Zingg D.W., Pulliam T.H. Multipoint and multi-objective aerodynamic shape optimization // AIAA Journal. – 2004. – Vol. 42, № 6. P. 1057–1065.

32. Lissaman P.B.S. Low-Reynolds-number airfoils // Annual Review of Fluid Mechanics. 1983. Vol. 15. – P. 223–239.