УДК 330.46

ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ПО РЕГИОНАМ

Э.М. Аксень
Заведующий кафедрой экономики и управления,
доктор экономических наук, профессор
УО «Белорусский государственный экономический университет»,
eaksen@bseu.by

Э.М. Аксень

Окончил факультет прикладной математики Белорусского государственного университета. Область научных интересов связана с разработкой математических и инструментальных методов в экономике.

Аннотация. В статье представлены подходы к моделированию оптимальной динамики распределения ресурсов по регионам для социально-экономической системы в дискретном и непрерывном времени. Методика предполагает построение межвременного интегрального социально-экономического показателя и максимизацию его значения с учетом ограничений на объясняющие факторы. При этом учитывается также запаздывание влияния объясняющих факторов на результирующие показатели.

Ключевые слова: динамика, интегральный показатель, оптимизация, моделирование, социально-экономическая система, регион, эластичность, весовой коэффициент.

Введение. Общеизвестно, что выделяемые на развитие регионов ресурсы на динамику социально-экономических показателей, таких как рождаемость, количество безработных, обеспеченность жильем и др. При этом указанное влияние имеет место с запаздыванием, что также следует учитывать при моделировании. В данной статье предложены подходы к построению экономико-математических моделей в дискретном и непрерывном времени, направленных на определение динамики оптимального распределения ресурсов между регионами с учетом того, что выделяемые ресурсы влияют на социально-экономические показатели с некоторым запаздыванием.

Подходы к моделированию влияния объясняющих факторов на социально-экономические показатели. Пусть n – число регионов в рассматриваемой социально-экономической системе. В частности, в случае, когда в качестве социально-экономической системы выступает Республика Беларусь, а регионы – это области Республики Беларусь, а также город Минск, $n = 7$. Через m обозначим число фигурирующих в модели ресурсов. Для обозначения значения *j*-го ресурса в *i*-м регионе для *t*-го периода времени ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$) будем использовать $x_{ij}(t)$.

Пусть s – число социально-экономических показателей. Значение *k*-го социально-экономического показателя в *i*-м регионе для *t*-го периода времени ($i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,s}$) обозначим через $y_{ik}(t)$. В соответствии с предлагаемой нами методикой имеет место зависимость (с запаздыванием) показателей $y_{ik}(t)$ от показателей $x_{ij}(t)$.

Для того, чтобы учесть запаздывание влияния объясняющих факторов $x_{ij}(t)$ на результирующие показатели $y_{ik}(t)$, определим ненаблюдаемые показатели $\tilde{x}_{ijk}(t)$ по следующей рекуррентной формуле:

$$\tilde{x}_{ijk}(t) = \tilde{x}_{ijk}(t-1) \cdot \left[\frac{x_{ij}(t)}{\tilde{x}_{ijk}(t-1)} \right]^{\gamma_{jk}}, i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,s}, \tag{1}$$

где γ_{jk} – параметры, которые мы будем оценивать с помощью фактических данных.

Прологарифмируем формулу (1):

$$\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right] = \ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t-1)\right] + \gamma_{jk} \cdot \left\{\ln\left[x_{ij}(t)\right] - \ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t-1)\right]\right\}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,s}. \tag{2}$$

<u>Замечание 1.</u> Формула (2) – это формула для получения прогнозных значений методом экспоненциального сглаживания (для прологарифмированных данных).

Непрерывновременной аналог соотношения (2) имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right] = \gamma_{jk} \cdot \left\{\ln\left[x_{ij}(t)\right] - \ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right]\right\}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,s}. \tag{3}$$

<u>Замечание 2.</u> В данной статье при описании подходов моделирования в непрерывном времени буква *t* обозначает момент (а не период) времени. Соответственно, в случаях, когда показатель x_{ij} (либо $y_{ik}(t)$) – это поток (а не запас), то $x_{ij}(t)$ – это (при непрерывновременном моделировании) интенсивность соответствующего потока. Например, если при дискретновременном моделировании $x_{ij}(t)$ – это выпуск продукции за период *t*, то при непрерывновременном моделировании $x_{ij}(t)$ – это интенсивность (т.е. скорость) выпуска в момент времени *t*.

Отметим, что формулы (1)–(3) дают возможность найти траектории $\tilde{x}_{ijk}(t)$ и $\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right]$ с помощью заданного значения $\tilde{x}_{ijk}(t_0)$ в начальный момент времени t_0, а именно можно показать, что

$$\tilde{x}_{ijk}(t) = \left[\tilde{x}_{ijk}(t_0)\right]^{(1-\gamma_{ik})^{t-t_0}} \prod_{\tau=t_0+1}^{t} \left[x_{ij}(\tau)\right]^{\gamma_{jk}(1-\gamma_{jk})^{t-\tau}}, \tag{4}$$

$$\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right] = \gamma_{jk} \cdot \sum_{\tau=t_0+1}^{t} \left(1-\gamma_{jk}\right)^{t-\tau} \ln\left[x_{ij}(\tau)\right] + \left(1-\gamma_{jk}\right)^{t-t_0} \ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t_0)\right], \tag{5}$$

$$\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right] = \ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t_0)\right] e^{-\gamma_{jk}\cdot(t-t_0)} + \gamma_{jk} \int_{t_0}^{t} \ln\left[x_{ij}(\tau)\right] e^{-\gamma_{jk}\cdot(t-\tau)} d\tau, \tag{6}$$

$i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,s}, \quad t \geq t_0.$

Через $\hat{y}_{ik}(t)$ обозначим прогнозное значение *k*-го социально-экономического показателя в *i*-м регионе для *t*-го периода времени ($i = \overline{1,n}, \ k = \overline{1,s}$). Будем использовать следующую формулу для нахождения прогнозных значений $\hat{y}_{ik}(t)$:

$$\hat{y}_{ik}(t) = a_{ik}\prod_{j=1}^{m}\tilde{x}_{ijk}^{b_{jk}}(t), \qquad i=\overline{1,n}, \qquad k=\overline{1,s}, \tag{7}$$

где a_{ik} и b_{jk} – параметры, которые мы будем оценивать с помощью фактических данных.

Прологарифмировав формулу (7), получим:

$$\ln\left[\hat{y}_{ik}(t)\right] = \ln a_{ik} + \sum_{j=1}^{m} b_{jk}\cdot\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right], \qquad i=\overline{1,n}, \qquad k=\overline{1,s}. \tag{8}$$

Замечание 3. Формула (8) – это формула для нахождения прогнозных значений в рамках следующей панельной модели с фиксированным эффектом [1, с. 362–367] для прологарифмированных данных:

$$\ln\left[y_{ik}(t)\right] = \ln\alpha_{ik} + \sum_{j=1}^{m}\beta_{jk}\cdot\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right] + \varepsilon_{ik}(t), \qquad i=\overline{1,n}, \qquad k=\overline{1,s}, \tag{9}$$

где α_{ik}, β_{jk} – теоретические аналоги коэффициентов a_{ik} и b_{jk}, $\varepsilon_{ik}(t)$ – случайные отклонения с нулевым математическим ожиданием.

Через T_0 обозначим последний период времени, для которого известны значения всех показателей x_{ij} и y_{ik}. В соответствии с формулами (2) и (8) значения параметров γ_{ijk}, a_{ik} и b_{jk} ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,s}$) будем находить методом наименьших квадратов с помощью решения следующих оптимизационных задач:

$$\sum_{t=t_0}^{T_0}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln y_{ik}(t) - \ln\hat{y}_{ik}(t)\right]^2 \to \min, \tag{10}$$

$$\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right] = \ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t-1)\right] + \gamma_{jk}\cdot\left\{\ln\left[x_{ij}(t)\right] - \ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t-1)\right]\right\}, \qquad t=\overline{t_0+1,T}, \tag{11}$$

$$\tilde{x}_{ijk}(t_0) = x_{ij}(t_0), \qquad i=\overline{1,n}, \qquad j=\overline{1,m}, \qquad k=\overline{1,s}, \tag{12}$$

$$\ln\left[\hat{y}_{ik}(t)\right] = \ln a_{ik} + \sum_{j=1}^{m} b_{jk}\cdot\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right], \; i=\overline{1,n}, \qquad k=\overline{1,s}, \quad t=\overline{t_0,T}. \tag{13}$$

При этом для каждого социально-экономического показателя y решается своя задача (10)–(13). В этих задачах $x_{ij}(t)$ и $y_{ik}(t)$, $t=\overline{t_0,T_0}$, – известные (фактические) значения, $\ln a_{ik}$, b_{jk}, γ_{jk} – переменные.

При моделировании в непрерывном времени для оценки параметров решаются задачи, аналогичные приведенной ваше, а именно задачи следующего вида:

$$\sum_{l=0}^{L}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln y_{ik}(t_l) - \ln\hat{y}_{ik}(t_l)\right]^2 \to \min, \tag{14}$$

$$\ln\left[\tilde{x}_{ijk}\left(t_l\right)\right]=\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t_0)\right]e^{-\gamma_{jk}\cdot(t_l-t_0)}+\frac{\gamma_{jk}\Delta t}{2}\sum_{q=1}^{l}\left\{\ln\left[x_{ij}\left(t_{q-1}\right)\right]e^{-\gamma_{jk}\cdot\left(t_l-t_{q-1}\right)}+\ln\left[x_{ij}\left(t_q\right)\right]e^{-\gamma_{jk}\cdot\left(t_l-t_q\right)}\right\}, \tag{15}$$

$$\tilde{x}_{ijk}(t_0)=x_{ij}(t_0),\qquad i=\overline{1,n}\ ,\qquad j=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,s}, \tag{16}$$

$$\ln\left[\hat{y}_{ik}(t)\right]=\ln a_{ik}+\sum_{j=1}^{m}b_{jk}\cdot\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right],\ i=\overline{1,n}\ ,\quad k=\overline{1,s},\quad l=\overline{0,L}\ . \tag{17}$$

Здесь $\left(t_0,t_1,\ldots,t_L\right)$ – разбиение временного интервала $\left[t_0,T_0\right]$ (при этом считается, что фактические значения факторов x_{ij} и показателей y_{ik} известны в моменты времени t_l , $l=\overline{0,L}$), через Δt обозначена длина подынтервала разбиения (т.е. $\Delta t:=t_l-t_{l-1}$), а соотношения (15) – линейные аппроксимации равенств (6) с использованием метода трапеций (для численного интегрирования).

Подходы к построению межвременного интегрального социально-экономического показателя. Введем интегральный показатель в периоде *t* по формуле:

$$Y\left(t\right)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{s}\left[y_{ik}(t)\right]^{\alpha_{ik}(t)}, \tag{18}$$

где $\alpha_{ik}(t)$ – весовой коэффициент для *k*-го показателя в *i*-м регионе в периоде *t*, причем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}(t)=1, \tag{19}$$

<u>Замечание 4.</u> Интегральный показатель (18) представляет собой средневзвешенное геометрическое значение социально-экономических показателей $y_{ik}(t)$ в периоде *t* (по регионам и по видам показателей *y*).

<u>Замечание 5.</u> Весовые коэффициенты $\alpha_{ik}(t)$ могут быть оценены экспертным образом, в частности, на основе экспертной информации об эластичностях замещения (*k*-го социально-экономического показателя в *i*-м регионе $y_{ik}(t)$ на *q*-й социально-экономический показатель в *l*-м регионе $y_{lq}(t)$) при постоянном значении интегрального социально-экономического показателя $Y\left(t\right)$(см. [2]).

Введем межвременной интегральный показатель для временного интервала $\left[T_1,T_2\right]$ (состоящего из периодов, начиная с периода T_1 по период T_2) по формуле:

$$Y\left(T_1,T_2\right):=\prod_{t=T_1}^{T_2}\left[Y(t)\right]^{\varphi(t)}, \tag{20}$$

где $\varphi(t)$ – весовые коэффициенты для периодов *t*, причем

$$\sum_{t=T_1}^{T_2}\varphi(t)=1. \tag{21}$$

С помощью формулы (20) можно показать [2], что отношение $\dfrac{\varphi(t)}{\varphi(\tau)}$ равно точечной эластичности $e(t,\tau)$ замещения $Y(t)$ на $Y(\tau)$, т.е. оно показывает на сколько процентов должно увеличиться значение интегрального социально-экономического показателя $Y(\tau)$ в периоде τ при уменьшении на 1% указанного показателя $Y(t)$ в периоде t так, чтобы значение межвременного интегрального социально-экономического показателя $Y\left(T_1, T_2\right)$ не изменилось.

Обозначим «краткосрочные» эластичности $e(\tau+1, \tau)$ через $\delta(\tau)$:

$$\delta(\tau) := e(\tau+1, \tau), \qquad \tau = \overline{T_1, T_2 - 1}. \tag{22}$$

В частном случае, когда «краткосрочные» эластичности $\delta(\tau)$ постоянны (т.е. не зависят от τ), можно показать [2], что

$$\varphi(t) = \begin{cases} \delta^{t-T_1} \dfrac{1-\delta}{1-\delta^{T_2-T_1+1}} & \text{при } \delta \neq 1, \\ \dfrac{1}{T_2 - T_1 + 1} & \text{при } \delta = 1, \end{cases} \tag{23}$$

$t = \overline{T_1, T_2}$.

Формула (23) может быть использована для вычисления коэффициентов $\varphi(t)$. При этом «краткосрочная» эластичность δ может быть оценена экспертным образом.

Обобщим формулу (20) для моделирования в непрерывном времени. Разобьем временной интервал $\left[T_1, T_2\right]$ на подынтервалы $\left[t_{l-1}, t_l\right]$, $l = \overline{1, L}$ (где $t_0 = T_1$, $t_L = T_2$). Обозначим разбиение $\left(t_0, t_1, \ldots, t_L\right)$ отрезка $\left[T_1, T_2\right]$ через Θ, а диаметр разбиения Θ через $\mu\left(\Theta\right)$. (Напомним, что диаметр разбиения – это максимальная длина подынтервалов $\left[t_{l-1}, t_l\right]$, $l = \overline{1, L}$, т.е. $\mu\left(\Theta\right) = \max\limits_{l=\overline{1,L}} \Delta t_l$, где $\Delta t_l := t_l - t_{l-1}$.)

Напомним также, что разметкой разбиения $\Theta := \left(t_0, t_1, \ldots, t_L\right)$ называется последовательность $\tilde{\Theta} := \left(\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_L\right)$ точек $\tilde{t}_l \in \left[t_{l-1}, t_l\right]$, $l = \overline{1, L}$. Размеченное разбиение – это разбиение вместе с разметкой, т.е. это пара $\hat{\Theta} := \left\langle \Theta, \tilde{\Theta} \right\rangle$, а диаметр $\mu\left(\hat{\Theta}\right)$размеченного разбиения $\hat{\Theta}$ – это диаметр $\mu\left(\Theta\right)$соответствующего неразмеченного разбиения Θ.

Пусть $\varphi\left(t\right)$ – весовые коэффициенты для моментов времени t, причем (по аналогии с равенством (21) для дискретновременного случая)

$$\int_{T_1}^{T_2} \varphi\left(t\right) dt = 1. \tag{24}$$

По аналгии с формулой (20) введем межвременной интегральный показатель для временного интервала $\left[T_1, T_2\right]$ по формуле:

$$Y\left(T_1, T_2\right) := \lim_{\mu(\Theta) \to 0} \prod_{l=1}^{L} \left[Y(\tilde{t}_l)\right]^{\varphi(\tilde{t}_l)\Delta t_l}, \tag{25}$$

где $\Delta t_l := t_l - t_{l-1}$, $l = \overline{1, L}$.

<u>Замечание 6.</u> В соответствии с формулой (25) $Y\left(T_1, T_2\right)$ – это значение, такое что для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для

любого размеченного разбиения $\hat{\Theta}$ отрезка $\left[T_1, T_2\right]$ с диаметром $\mu\left(\hat{\Theta}\right) \leq \delta$ имеет место неравенство:

$$\left|\prod_{l=1}^{L}\left[Y(\tilde{t}_l)\right]^{\varphi(\tilde{t}_l)\Delta t_l} - Y\left(T_1, T_2\right)\right| \leq \varepsilon. \tag{26}$$

Заметим, что

$$\prod_{l=1}^{L}\left[Y(\tilde{t}_l)\right]^{\varphi(\tilde{t}_l)\Delta t_l} = \exp\left(\sum_{l=1}^{L}\varphi\left(\tilde{t}_l\right)\ln\left[Y(\tilde{t}_l)\right]\Delta t_l\right). \tag{27}$$

Следовательно,

$$\lim_{\mu(\Theta)\to 0}\prod_{l=1}^{L}\left[Y(\tilde{t}_l)\right]^{\varphi(\tilde{t}_l)\Delta t_l} = \exp\left(\int_{T_1}^{T_2}\varphi\left(t\right)\ln\left[Y(t)\right]dt\right). \tag{28}$$

Из равенств (25) и (28) получим:

$$Y\left(T_1, T_2\right) = \exp\left(\int_{T_1}^{T_2}\varphi\left(t\right)\ln\left[Y(t)\right]dt\right). \tag{25}$$

Определим эластичность замещения интегрального показателя $Y(t)$ в периоде $\left[t_1 - \Delta t, t_1 + \Delta t\right]$ этим же показателем в периоде $\left[t_2 - \Delta t, t_2 + \Delta t\right]$ при относительном изменении η_1 значения указанного показателя в периоде $\left[t_1 - \Delta t, t_1 + \Delta t\right]$ по формуле:

$$e\left(t_1, t_2; \eta_1, \Delta t\right) := -\frac{\eta_2}{\eta_1}, \tag{30}$$

где η_2 определяется из условия:

$$\begin{aligned}&\int_{t_1-\Delta t}^{t_1+\Delta t}\varphi(t)\ln\left[Y(t)\left(1+\eta_1\right)\right]dt + \int_{t_2-\Delta t}^{t_2+\Delta t}\varphi(t)\ln\left[Y(t)\left(1+\eta_2\right)\right]dt = \\ &= \int_{t_1-\Delta t}^{t_1+\Delta t}\varphi(t)\ln\left[Y(t)\right]dt + \int_{t_2-\Delta t}^{t_2+\Delta t}\varphi(t)\ln\left[Y(t)\right]dt.\end{aligned} \tag{31}$$

Эластичность замещения (30) показывает, во сколько раз относительное изменение η_2 значения показателя $Y(t)$ в периоде $\left[t_2 - \Delta t, t_2 + \Delta t\right]$ должно отличаться от относительного изменения η_1 этого же показателя в периоде $\left[t_1 - \Delta t, t_1 + \Delta t\right]$, так чтобы значение межвременного показателя $Y\left(T_1, T_2\right)$ (определенного по формуле (29)) осталось прежним.

Определим мгновенную эластичность замещения показателя $Y(t)$ в момент времени t_1 этим же показателем в момент времени t_2 при относительном изменении η_1 указанного показателя в момент времени t_1 как предел эластичности (30) при $\Delta t \to 0$:

$$e\left(t_1, t_2; \eta_1\right) := \lim_{\Delta t\to 0} e\left(t_1, t_2; \eta_1, \Delta t\right). \tag{32}$$

Из соотношений (30)–(32) следует, что

$$e(t_1,t_2;\eta_1):=-\frac{\eta_2}{\eta_1}, \tag{33}$$

где η_2 определяется из условия:

$$\varphi(t_1)\ln(1+\eta_1)+\varphi(t_2)\ln(1+\eta_2)=0. \tag{34}$$

Определим точечную мгновенную эластичность замещения (по отношению к межвременному показателю (29)) показателя $Y(t)$ в момент времени t_1 этим же показателем в момент времени t_2 как предел мгновенной эластичности (33) при $\eta_1 \to 0$:

$$e(t_1,t_2):=\lim_{\eta_1\to 0} e(t_1,t_2;\eta_1). \tag{35}$$

Точечная мгновенная эластичность замещения (35) показывает на сколько процентов (приблизительно) должно увеличится значение показателя $Y(t)$ в «малом» периоде времени $[t_2-\Delta t, t_2+\Delta t]$ при уменьшении значения указанного показателя на 1% в «малом» периоде времени $[t_1-\Delta t, t_1+\Delta t]$, так чтобы значение межвременного показателя $Y(T_1,T_2)$ (определенного по формуле (29)) осталось прежним.

Предположим, что эластичность $e(t_1,t_2)$ зависит только от разности между моментами времени t_1 и t_2, и обозначим через δ эластичность $e(t+1,t)$:

$$\delta:=e(t+1,t) \tag{36}$$

(которая в силу указанного предположения не зависит от выбора момента времени t).

С помощью формул (33)–(36) можно показать [3], что

$$\varphi(t)=\begin{cases} -\dfrac{\ln\delta}{1-\delta^{T_2-T_1}}\delta^{t-T_1} & \text{при} \quad \delta\neq 1, \\ \dfrac{1}{T_2-T_1} & \text{при} \quad \delta=1, \end{cases} \tag{37}$$

$t\in[T_1,T_2]$.

Задача максимизации межвременного интегрального социально-экономического показателя. Предположим, что в t-м периоде в целом в социально-экономической системе суммарное взвешенное значение j-го ресурса (объясняющего фактора в более общем случае) не должно превышать планового значения $B_j(t)$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}(t)x_{ij}(t)\le B_j(t), \qquad j=\overline{1,m},\ t=\overline{T_1,T_2}, \tag{38}$$

где $c_{ij}(t)$ – известные весовые коэффициенты (сумма которых может отличаться от единицы), $[T_1,T_2]$ – период планирования.

Следовательно, в задаче максимизации межвременного интегрального показателя (20) для планового периода с T_1-го периода по T_2-й период должны учитываться условия (38), а также соотношения (4) и (7) (либо эквивалентные им соотношения (5), (8)).

Несложно заметить, что оптимизационная задача с прологарифмированной целевой функцией и прологарифмированными (некоторыми) ограничениями эквивалентна исходной задаче. Прологарифмировав формулу (20) (и используя соотношения (5), (8)), будем иметь оптимизационную задачу, равносильную задаче максимизации прогнозного значения межвременного интегрального показателя (20):

$$\ln \hat{Y}\left(T_1, T_2\right) = \sum_{t=T_1}^{T_2} \varphi(t) \ln \hat{Y}(t) \to \max, \tag{39}$$

$$\ln \hat{Y}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(t) \ln\left[\hat{y}_{ik}(t)\right], \tag{40}$$

$$\ln\left[\hat{y}_{ik}(t)\right] = \ln a_{ik} + \sum_{j=1}^{m} b_{jk} \cdot \ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right].\ i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,s}, \quad t = \overline{T_1, T_2}, \tag{41}$$

$$\ln\left[\tilde{x}_{ijk}(t)\right] = \gamma_{jk} \cdot \sum_{\tau=T_1}^{t} \left(1-\gamma_{jk}\right)^{t-\tau} \ln\left[x_{ij}(\tau)\right] + \left(1-\gamma_{jk}\right)^{t-t_0} \ln\left[\tilde{x}_{ijk}\left(T_0 - 1\right)\right], \tag{42}$$

$$i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \ k = \overline{1,s}, \ t = \overline{T_1, T_2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}(t) x_{ij}(t) \le B_j(t), \qquad j = \overline{1,m}, t = \overline{T_1, T_2}, \tag{43}$$

$$x_{ij}(t) \ge 0, \quad i = \overline{1,n}\ , \quad j = \overline{1,m}, \quad t = \overline{T_1, T_2}. \tag{44}$$

Можно показать [2], что динамическую оптимизационную задачу (39)–(44) можно разбить на $T_2 - T_1 + 1$ более простых статических задач для каждого в отдельности периода $t = \overline{T_1, T_2}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij}(t) \ln\left[x_{ij}(t)\right] \to \max, \tag{45}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}(t) x_{ij}(t) \le B_j(t), \quad j = \overline{1,m}, \tag{46}$$

$$x_{ij}(t) \ge 0, \quad i = \overline{1,n}\ , \quad j = \overline{1,m} \tag{47}$$

где

$$\beta_{ij}(t) := \sum_{k=1}^{s} b_{jk} \gamma_{jk} \sum_{\tau=t}^{T_2} \alpha_{ik}(\tau) \varphi(\tau) \left(1-\gamma_{jk}\right)^{\tau-t}. \tag{48}$$

С использованием метода множителей Лагранжа, получим формулу для оптимальных решений задач (41)–(44) (см. [2]):

$$x_{ij}(t) = w_{ij}(t) B_j(t), \qquad i = \overline{1,n}, \qquad j = \overline{1,m}, \ t = \overline{T_1 + 1, T_2} \tag{49}$$

где

$$w_{ij}(t) := \frac{\beta_{ij}(t)}{c_{ij}(t) \sum_{l=1}^{n} \beta_{lj}(t)}, \qquad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m} \quad t = \overline{T_1 + 1, T_2} \tag{50}$$

<u>Замечание 7.</u> Из равенства (49) следует, что (в рамках данной модели) распределение долей ресурсов по регионам не зависит от объемов ресурсов в целом в социально-экономической системе.

В случае, когда весовые коэффициенты $\alpha_{ik}(t)$ и «краткосрочные» эластичности $\delta(t)$ постоянны (т.е. не зависят от периода времени *t*), можно показать [2], что

$$w_{ij}(t) = \frac{\tilde{\beta}_{ij}(t)}{c_{ij}(t)\sum_{l=1}^{n}\tilde{\beta}_{lj}(t)}, \qquad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m} \quad t = \overline{T_1,T_2}. \tag{51}$$

где

$$\tilde{\beta}_{ij}(t) := \sum_{k=1}^{s} b_{jk}\alpha_{ik}\gamma_{jk}\frac{1-\left[\delta\left(1-\gamma_{jk}\right)\right]^{T_2-t+1}}{1-\delta\left(1-\gamma_{jk}\right)}, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad j = \overline{1,m},\ t = \overline{T_1,T_2}. \tag{52}$$

В силу формул (6), (7), (18), (20) непрерывновременной аналог оптимизационной задачи (39)–(44) имеет вид:

$$\ln\hat{Y}\left(T_1,T_2\right) = \int_{T_1}^{T_2}\varphi(t)\ln\hat{Y}(t)dt \to \max \tag{53}$$

$$\ln\hat{Y}(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ik}(t)\ln\left[\hat{y}_{ik}(t)\right], \quad t\in\left[T_1,T_2\right], \tag{54}$$

$$\ln\left[\hat{y}_{ik}(t)\right] = \ln a_{ik} + \sum_{j=1}^{m} b_{jk}\cdot\ln\left[\tilde{x}_{jk}(t)\right], \qquad i = \overline{1,n}, \qquad k = \overline{1,s}, \qquad t\in\left[T_1,T_2\right], \tag{55}$$

$$\tilde{x}_{ijk}(t) = \tilde{x}_{ijk}(T_1)e^{-\gamma_{jk}\cdot(t-t_0)} + \gamma_{jk}\int_{T_1}^{t}x_{ij}(\tau)e^{-\gamma_{jk}\cdot(t-\tau)}d\tau, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m},\ k = \overline{1,s},\ t\in\left[T_1,T_2\right], \tag{56}$$

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ij}(t)x_{ij}(t) \le B_j(t), \qquad j = \overline{1,m}, \qquad t\in\left[T_1,T_2\right], \tag{57}$$

$$x_{ij}(t) \ge 0,\ i = \overline{1,n}\ ,\ j = \overline{1,m},\ t\in\left[T_1,T_2\right]. \tag{58}$$

Отметим, что в силу зависимостей (54)–(56) в качестве переменных этой динамической оптимизационной задачи в конечном счете выступают траектории $x_{ij}(t)$ ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $t\in\left[T_1,T_2\right]$), описывающие динамику распределения ресурсов по регионам.

Можно показать [3], что решение непрерывновременной динамической оптимизационной задачи (53)–(58) также сводится к решению более простых статических задач (45)–(47) для каждого в отдельности значения $t\in\left[T_0,T\right]$. При этом в непрерывновременном случае:

$$\beta_{ij}(t) := \sum_{k=1}^{s} b_{jk}\gamma_{jk}\int_{t}^{T_2}\varphi(\tau)\alpha_{ik}(\tau)e^{-\gamma_{jk}\cdot(\tau-t)}d\tau, \qquad i = \overline{1,n}\ ,\ j = \overline{1,m}, \qquad t\in\left[T_1,T_2\right]. \tag{59}$$

Оптимальные решения задач (53)–(58) в непрерывновременной случае также имеют вид (49), (50) (но при этом коэффициенты $\beta_{ij}(t)$ определены формулой (59), а не (48)).

В случае, когда весовые коэффициенты $\alpha_{ik}(t)$ и «краткосрочные» эластичности $\delta(t)$ постоянны (т.е. не зависят от периода времени *t*), можно показать [3], что

$$w_{ij}(t) := \frac{\tilde{\beta}_{ij}(t)}{c_{ij}(t)\sum_{l=1}^{n}\tilde{\beta}_{lj}(t)}, \qquad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,m}, \quad t\in\left[T_1,T_2\right]. \tag{60}$$

где

$$\tilde{\beta}_{ij}(t) := \sum_{k=1}^{s}\frac{b_{jk}\alpha_{ik}\gamma_{jk}}{\rho+\gamma_{jk}}\left[1-e^{-(\rho+\gamma_{jk})(T_2-t)}\right], \qquad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,m}, \quad t\in\left[T_1,T_2\right], \tag{61}$$

$$\rho := \ln\delta. \tag{62}$$

Оптимальное распределение ресурсов при бесконечном горизонте планирования. Рассмотрим случай, когда весовые коэффициенты $\alpha_{ik}(t)$ и «краткосрочные» эластичности $\delta(t)$ постоянны. Перейдя к пределу в формулах (51), (52) при $T_2 \to +\infty$, получим:

$$w_{ij}^{\infty} = \frac{\tilde{\beta}_{ij}}{c_{ij}\sum_{l=1}^{n}\tilde{\beta}_{lj}}, \qquad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,m}. \tag{63}$$

$$\tilde{\beta}_{ij}^{\infty} = \sum_{k=1}^{s}\frac{b_{jk}\alpha_{ik}\gamma_{jk}}{1-\delta\left(1-\gamma_{jk}\right)}, \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,m}. \tag{64}$$

В непрерывновременном случае перейдя к пределу в формуле (61) при $T_2 \to +\infty$, получим:

$$\tilde{\beta}_{ij}^{\infty} := \sum_{k=1}^{s}\frac{b_{jk}\alpha_{ik}\gamma_{jk}}{\rho+\gamma_{jk}}, \qquad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,m}. \tag{65}$$

Замечание 8. В силу формул (63)–(65) при бесконечном горизонте планирования (и при указанных выше допущениях) оптимальная структура распределения ресурсов по регионам постоянна (т.е. не зависит от периода t).

Заключение. В статье предложена методика построения межвременного интегрального социально-экономического показателя с использованием эластичностей замещения. В конечном счете значение указанного интегрального показателя определяется динамикой показателей выделяемых ресурсов по регионам. В соответствии с разработанной нами методикой ресурсы должны быть распределены по регионам таким образом, чтобы это приводило к максимизации указанного интегрального показателя. В частности, сделан вывод о том, что распределение долей ресурсов не зависит от объемов ресурсов в целом по национальной экономике. Также рассмотрен случай с бесконечным горизонтом планирования и получены формулы для расчета долей ресурсов по регионам. Данная методика позволяет улучшить динамику распределения выделяемых ресурсов по регионам, способствуя более эффективному развитию социально-экономической системы.

Список литературы

[1] Магнус, Я.Р. Эконометрика / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. – М.: Дело, 2004. – 576 с.

[2] Литвинович, А.А. Методика моделирования оптимального распределения показателей результативности жилищной политики с учетом запаздывания / А.А. Литвинович, М.М. Ерёменко, Э.М. Аксень // Белорус. экон. журн. – 2024. – № 2. – С. 81–97.

[3] Литвинович, А.А. Моделирование оптимального распределения ресурсов в сфере жилищной политики в непрерывном времени с учетом запаздывания / А.А. Литвинович, М.М. Еременко, Э.М. Аксень // Экономика, моделирование, прогнозирование : сб. науч. тр. / НИЭИ Мин-ва экономики Респ. Беларусь ; редкол.: М.К. Кравцов (гл. ред.) [и др.]. – Минск, 2024. – Вып. 18. – 316 с. – С. 271–284.

Авторский вклад

Аксень Эрнест Маврициевич – постановка задачи исследования в общем случае, методика построения межвременного интегрального показателя для непрерывновременного моделирования, методика оценивания параметров моделей, методика аналитического решения задачи максимизации межвременного интегрального показателя при ограничениях на ресурсы.

APPROACHES TO MODELING OPTIMAL RESOURCE DISTRIBUTION AMONG REGIONS

E.M. Aksen
Head of the Department of Economics and Management
at Belarus State Economic University, Doctor of Science in Economics, Professor

Abstract. This article presents approaches to modeling the optimal dynamics of resource distribution across regions for a socio-economic system in discrete and continuous time. The methodology involves constructing an intertemporal integral socioeconomic indicator and maximizing its value, taking into account constraints on explanatory factors. The lag in the influence of explanatory factors on the resulting indicators is also taken into account.

Keywords: dynamics, integral indicator, optimization, modeling, socio-economic system, region, elasticity, weighting coefficient.