О ДВУХ СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

В.В. Цегельник

Система дифференциальных уравнений

$$zq' = q + zr + \sigma z q^2, \tag{1}$$

$$qr' = -1 + r^2, \tag{2}$$

в которой $\sigma^2 = 1$, относительно неизвестной функции q независимой переменной z эквивалентна уравнению

$$zqq'' = zq'^2 - qq' + 2\sigma q^3 + zq^4 - z, \tag{3}$$

которое является третьим уравнением Пенлеве

$$p'' = \frac{p'^2}{p} - \frac{p'}{z} + \frac{1}{z}\left(ap^2 + b\right)p + cp^3 + \frac{d}{p} \tag{4}$$

с параметрами $a = 2\sigma$, $b = 0$, $c = 1$, $d = -1$. Система (1), (2) есть частный случай системы [1, 2, 3], эквивалентной уравнению (3) в случае $c = -d = 1$.

Известно, что все решения уравнения

$$R_1 = zq' - \sigma q^2 - (a\sigma - 1)q - \sigma_1 z = 0,\ \sigma_1^2 = 1 \tag{5}$$

являются [3] решениями уравнения (4), в котором $c = -d = 1$ при условии

$$\sigma_1 b + a\sigma - 2 = 0.$$

Исключение из системы (1), (2) неизвестной функции q приводит относительно r к уравнению

$$r'' = \frac{rr'^2}{r^2 - 1} - \frac{r'}{z} - \sigma(r^2 - 1), \tag{6}$$

общее решение которого, в чем легко убедиться, не имеет подвижных критических особых точек.

Полагая в (6)

$$r = \frac{1}{2}\left(R^2 + \frac{1}{R^2}\right) \tag{7}$$

относительно функции R получим уравнение

$$zRR'' = zR'^2 - RR' - \frac{\sigma}{4}z(R^4 - 1). \tag{8}$$

Уравнение (8) есть уравнение (4) с параметрами $a = b = 0$, $c = -d = -\frac{\sigma}{4}$.

Система (1), (2) с учетом (7) принимает вид

$$q = \frac{R^4 - 1}{4RR'}, \tag{9}$$

$$R^2 + \frac{1}{R^2} = 2\left(q' - \sigma q^2 - \frac{q}{z}\right). \tag{10}$$

Отметим, что если $q(z)$ — решение уравнения (3), которое также является решением уравнения (5), то оно порождает по формуле (10) решения $R = \pm 1$ и $R = \pm i$ уравнения (8). Формулу (9) можно записать в виде $q = \frac{(R^2)^2 - 1}{2(R^2)'}$.

Теорема 1. *Пусть* $q = q(z)$ *— решение уравнения* (3) *при фиксированном* σ*, отличное от решений уравнения* (5)*. Тогда функция* $R = R(z)$*, где* R^2 *— один из корней квадратного уравнения* (10)*, является решением уравнения* (8)*.*

Теорема 2. *Пусть* $R(z)$ $(R^4(z) - 1 \not\equiv 0)$ *— решение уравнения* (8) *при фиксированном значении* σ*. Тогда функция* $q(z)$*, определяемая формулой* (9)*, является решением уравнения* (3)*.*

Литература

1. Громак, В. И. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве / В. И. Громак, Н. А. Лукашевич. – Минск : Университетское, 1990. – 157 с.

2. Громак, В. И. К теории уравнений Пенлеве / В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11, № 2. – С. 373–376.

3. Лукашевич, Н. А. К теории третьего уравнения Пенлеве / Н. А. Лукашевич // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 11. – С. 1913–1923.