

УДК 512.743.4

## АППРОКСИМАЦИЯ СУММОЙ ЭКСПОНЕНТ ДЛЯ НЕЯВНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ

Арещенко М.С., Луканский Д.Н., Хадорик М.Д., студенты

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
г. Минск, Республика Беларусь

Анисимов В.Я. – канд. физ.-мат. наук, доцент

**Аннотация.** Во многих физических и экономических задачах данные подчиняются экспоненциальному закону роста, однако в более сложных случаях зависимость описывается суммой нескольких экспонент. Целью нашей работы является решение задачи восстановления неизвестных параметров функции заданной суммой экспонент с известными значениями в дискретных точках в неравномерной сетке. Использовался метод наименьших квадратов, основанный на поиске коэффициентов соответствующего дифференциального уравнения четвёртого порядка, интегрированного дважды. Проведено сравнение этого метода с альтернативными методами. Показано, что он обеспечивает малую ошибку при высокой относительно других методов скорости.

**Ключевые слова.** Аппроксимация, сумма экспонент, метод наименьших квадратов, дифференциальное уравнение

Наиболее известным методом аппроксимации является предложенный Лежандром и Гауссом метод наименьших квадратов (МНК) [1]. В нашем случае он основан на следующих начальных данных: пусть задано множество точек в неравномерной сетке, от нас требуется построить аппроксимирующую функцию в виде суммы экспонент.

Пусть также известно, что исходная функция  $f(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} + C_4 e^{\alpha_4 x}$ , где  $C_1, C_2, C_3, C_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  – искомые параметры. Тогда  $f(x)$  является решением дифференциального уравнения вида  $y'''' + Ay'''' + By'' + Dy' + Ey = 0$ , где  $A, B, D$  и  $E$  – некоторые действительные числа. Это представление сводит нелинейную по коэффициентам  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  задачу поиска показателей к линейной.

Так как в текущей задаче точки задаются неравномерной сеткой, нахождение производных можно проводить путем построения кубического В-сплайна по заданным начальным точкам  $(x_i, y_i)$ . Дифференцирование В-сплайна позволяет получить непрерывные значения первой и второй производных, необходимые для дальнейших вычислений, а выбор именно В-сплайна обусловлен его свойством локальности. В более простом случае с равномерной сеткой точек можно применить как сплайны, так и разностные формулы для производных  $k$ -го порядка [2].

Для определения коэффициентов  $A, B, D, E$  дважды проинтегрируем дифференциальное уравнение и получим следующее выражение, верное для каждого действительного  $x$ :

$$\begin{aligned} & y''(x) - y''(x_0) - y'''(x_0)(x - x_0) \\ & + A[y'(x) - y'(x_0) - y''(x_0)(x - x_0)] \\ & + B[y(x) - y(x_0) - y'(x_0)(x - x_0)] \\ & + D \left[ \int_{x_0}^x y(t) dt - y(x_0)(x - x_0) \right] \\ & + E \left[ \int_{x_0}^x ds \int_{x_0}^s y(t) dt \right] = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Это позволяет использовать вместо  $y(x)$  кубические сплайны, обладающие свойством непрерывности для первой и второй производной. В противном случае пришлось бы столкнуться с проблемой высокой ошибки при аппроксимации третьей и четвертой производной сплайнами.

Поскольку нам не заданы значения производных на границах интервала, а условия  $S''(x_0) = 0$  и  $S''(x_n) = 0$  могут оказаться ложными, в качестве граничных условий для сплайнов мы используем универсальные условия “отсутствия узла”:  $S'''(x_0) = S'''(x_1)$  и  $S'''(x_{n-1}) = S'''(x_n)$  [3].

Обозначим левую часть (1) за  $\Phi(x, A, B, D, E)$ . Для нахождения коэффициентов  $A, B, D, E$  достаточно минимизировать сумму квадратов:

$$\sum_{i=0}^n \Phi(x_i, A, B, D, E)^2 \quad (2)$$

Вычислим частные производные  $\Phi$  по  $A, B, D, E$  и приравняем их к нулю, получая систему линейных уравнений, решение которой даст искомые коэффициенты:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n (K_i L_i + A L_i^2 + B M_i L_i + D N_i L_i + E S_i L_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^n (K_i M_i + A L_i M_i + B M_i^2 + D N_i M_i + E S_i M_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^n (K_i N_i + A L_i N_i + B M_i N_i + D N_i^2 + E S_i N_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^n (K_i S_i + A L_i S_i + B M_i S_i + D N_i S_i + E S_i^2) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

С целью сокращения записи использованы следующие обозначения:

$$\begin{cases} K_i = y''(x_i) - y''(x_0) - y'''(x_0)(x_i - x_0) \\ L_i = y'(x_i) - y'(x_0) - y''(x_0)(x_i - x_0) \\ M_i = y(x_i) - y(x_0) - y'(x_0)(x_i - x_0) \\ N_i = \int_{x_0}^{x_i} y(t) dt - y(x_0)(x_i - x_0) \\ S_i = \int_{x_0}^{x_i} ds \int_{x_0}^s y(t) dt \end{cases} \quad (4)$$

Для упрощения вычислений и уменьшения ошибки численного интегрирования двойной интеграл можно заменить одинарным:

$$S_i = \int_{x_0}^{x_i} ds \int_{x_0}^s y(t) dt = \int_{x_0}^{x_i} (x_i - t) y(t) dt \quad (5)$$

Теперь мы можем перейти к нахождению показателей экспонент  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , исходя из того, что они будут корнями характеристического уравнения четвёртой степени, которое мы можем решить методом Феррари:

$$\alpha^4 + A\alpha^3 + B\alpha^2 + D\alpha + E = 0 \quad (6)$$

Остаётся найти  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Для этого применим МНК для минимизации следующего выражения:

$$\sum_{i=1}^n (C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} + C_4 e^{\alpha_4 x})^2 \quad (7)$$

Приравняем к нулю частные производные по  $C_1, C_2, C_3, C_4$  и составим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n C_1 e^{2\alpha_1 x_i} + C_2 e^{(\alpha_1 + \alpha_2) x_i} + C_3 e^{(\alpha_1 + \alpha_3) x_i} + C_4 e^{(\alpha_1 + \alpha_4) x_i} = \sum_{i=0}^n y_i e^{\alpha_1 x_i} \\ \sum_{i=0}^n C_1 e^{(\alpha_2 + \alpha_1) x_i} + C_2 e^{2\alpha_2 x_i} + C_3 e^{(\alpha_2 + \alpha_3) x_i} + C_4 e^{(\alpha_2 + \alpha_4) x_i} = \sum_{i=0}^n y_i e^{\alpha_2 x_i} \\ \sum_{i=0}^n C_1 e^{(\alpha_3 + \alpha_1) x_i} + C_2 e^{(\alpha_3 + \alpha_2) x_i} + C_3 e^{2\alpha_3 x_i} + C_4 e^{(\alpha_3 + \alpha_4) x_i} = \sum_{i=0}^n y_i e^{\alpha_3 x_i} \\ \sum_{i=0}^n C_1 e^{(\alpha_4 + \alpha_1) x_i} + C_2 e^{(\alpha_4 + \alpha_2) x_i} + C_3 e^{(\alpha_4 + \alpha_3) x_i} + C_4 e^{2\alpha_4 x_i} = \sum_{i=0}^n y_i e^{\alpha_4 x_i} \end{cases} \quad (8)$$

Из этой линейной системы мы находим последние неизвестные коэффициенты  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . На этом задача построения аппроксимирующей функции завершена. Отметим также, что для определения

$A, B, D, E$  мы можем также проинтегрировать исходное дифференциальное уравнение четыре раза. В этом случае мы получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 & y(x) - y(x_0) - y'(x_0)(x - x_0) - \frac{y''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 - \frac{y'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 \\
 & + A \left[ \int_{x_0}^x y(t) dt - y(x_0)(x - x_0) - \frac{y'(x_0)}{2}(x - x_0)^2 - \frac{y''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 \right] \\
 & + B \left[ \int_{x_0}^x ds \int_{x_0}^s y(t) dt - \frac{y(x_0)}{2}(x - x_0)^2 - \frac{y'(x_0)}{6}(x - x_0)^3 \right] \\
 & + D \left[ \int_{x_0}^x ds \int_{x_0}^s d\xi \int_{x_0}^{\xi} y(t) dt - \frac{y(x_0)}{6}(x - x_0)^3 \right] \\
 & + E \left[ \int_{x_0}^x ds \int_{x_0}^s d\xi \int_{x_0}^{\xi} d\tau \int_{x_0}^{\tau} y(t) dt \right] = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

где, в целях упрощения вычислений и уменьшения ошибки численного интегрирования двойной, тройной и четверной интегралы можно заменить одинарными:

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^x ds \int_{x_0}^s y(t) dt &= \int_{x_0}^x (x - t)y(t) dt \\
 \int_{x_0}^x ds \int_{x_0}^s d\xi \int_{x_0}^{\xi} y(t) dt &= \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^2}{2} y(t) dt \\
 \int_{x_0}^x ds \int_{x_0}^s d\xi \int_{x_0}^{\xi} d\tau \int_{x_0}^{\tau} y(t) dt &= \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^3}{6} y(t) dt
 \end{aligned} \tag{10}$$

Дальнейший расчет параметров  $C_1, C_2, C_3, C_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  выполняется по той же схеме, что и в случае с двойным интегрированием. Стоит отметить, что при четырехкратном интегрировании отпадает необходимость в использовании сплайнов для нахождения производных, так как итоговое выражение их больше не содержит. Сравним наш метод с ещё одним альтернативным: решение линейной системы, зависящей от четвертой производной, которая получается, если не интегрировать дифференциальное уравнение.

$$\begin{cases}
 A \sum_{i=0}^n (y_i^{(3)})^2 + B \sum_{i=0}^n y_i^{(3)} y_i^{(2)} + D \sum_{i=0}^n y_i^{(3)} y_i' + E \sum_{i=0}^n y_i^{(3)} y_i = - \sum_{i=0}^n y_i^{(4)} y_i^{(3)} \\
 A \sum_{i=0}^n y_i^{(2)} y_i^{(3)} + B \sum_{i=0}^n (y_i^{(2)})^2 + D \sum_{i=0}^n y_i^{(2)} y_i' + E \sum_{i=0}^n y_i^{(2)} y_i = - \sum_{i=0}^n y_i^{(4)} y_i^{(2)} \\
 A \sum_{i=0}^n y_i' y_i^{(3)} + B \sum_{i=0}^n y_i' y_i^{(2)} + D \sum_{i=0}^n (y_i')^2 + E \sum_{i=0}^n y_i' y_i = - \sum_{i=0}^n y_i^{(4)} y_i' \\
 A \sum_{i=0}^n y_i y_i^{(3)} + B \sum_{i=0}^n y_i y_i^{(2)} + D \sum_{i=0}^n y_i y_i' + E \sum_{i=0}^n (y_i)^2 = - \sum_{i=0}^n y_i^{(4)} y_i
 \end{cases} \tag{11}$$

Поскольку понадобится аппроксимировать производные вплоть до третьей, сплайн пятой степени приблизит их намного точнее кубического и, соответственно, ошибки будут оказывать большее влияние.

В качестве третьего альтернативного подхода рассмотрим прямую интерполяцию параметров экспоненциальной функции нелинейным методом наименьших квадратов. Оценка параметров осуществляется посредством минимизации функционала невязки:

$$\Phi(\theta) = \sum_{i=0}^n \rho(r_i(\theta)), \quad r_i(\theta) = \hat{f}(x_i, \theta) - y_i \tag{12}$$

где  $\theta$  характеризует все искомые параметры  $C_1, C_2, C_3, C_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , а в качестве функции потерь можно рассматривать  $\rho(r) = r^2$ , но для повышения устойчивости к шуму можно использовать сглаженную функцию:

$$\rho(r) = 2 \left( \sqrt{1 + \frac{r^2}{f^2}} - 1 \right) f^2 \quad (13)$$

Минимизация  $\Phi(\theta)$  проводится итерационным методом. На  $k$ -й итерации при текущем приближении  $\theta^{(k)}$  определяется вектор остатков и матрица Якоби:

$$r(\theta^{(k)}) = \begin{bmatrix} r_0(\theta^{(k)}) \\ \vdots \\ r_n(\theta^{(k)}) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$J(\theta^{(k)}) = \left\{ \frac{\partial r_i(\theta^{(k)})}{\partial \theta_j} \right\}_{i,j}$$

Шаг вычисляется из линейной системы вида:

$$\left( J(\theta^{(k)})^T J(\theta^{(k)}) + \lambda I \right) \Delta \theta^{(k)} = -J(\theta^{(k)})^T r(\theta^{(k)}) \quad (15)$$

При  $\lambda \rightarrow 0$  получается классический метод Гаусса–Ньютона, а при больших  $\lambda$  схема переходит к градиентному спуску, что улучшает устойчивость в случае плохой обусловленности. Такое описание схемы Гаусса–Ньютона и градиентного спуска приводится в алгоритме Левенберга–Марквардта [4]. Мы использовали его модифицированную версию с Trust Region: шаг по модулю ограничен динамически изменяемой константой, которая увеличивается в случае успешного предыдущего шага (уменьшения функционала невязки), а иначе уменьшается.

Четвёртый альтернативный метод, выбранный для сравнения: метод матричных пучков (Matrix Pencil Method), широко используемый в задачах преобразования сигналов. Это алгебраический метод, не требующий начального приближения. Вначале необходима интерполяция на равномерную сетку, поскольку классическая формулировка метода предполагает постоянный шаг дискретизации. Можно воспользоваться уже найденными кубическими сплайнами.

Матрицы Ганкеля  $Y_1$  и  $Y_2$  представляют собой сдвинутые на один отсчёт версии одного и того же сигнала, что позволяет выявить экспоненциальную структуру через линейные соотношения.

$$Y_1 = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \dots & y_{K-1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{L-1} & y_L & \dots & y_{N-2} \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_K \\ y_2 & y_3 & \dots & y_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_L & y_{L+1} & \dots & y_{N-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Здесь  $L$  – параметр окна, удовлетворяющий  $4 < L < N - 4$ , а  $K = N - L$ . Наша реализация использует стандартное значение  $L = \lfloor \frac{N}{3} \rfloor$ .

Для повышения устойчивости к шуму выполняется сингулярное разложение:

$$Y_1 = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^{\min(L,K)} \sigma_i u_i v_i^T \quad (17)$$

где  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots$  – сингулярные числа,  $u_i$  и  $v_i$  – левые и правые сингулярные векторы [5].

Сохраняются только 4 наибольших сингулярных числа, соответствующих сигналу, а малые значения отбрасываются как шум:  $U_4 = [u_1, \dots, u_4]$ ,  $V_4 = [v_1, \dots, v_4]$ .

Соответственно, проецируем исходные матрицы на подпространство сигнала:  $Y_1^{(4)} = U_4^T Y_1 V_4$ ,  $Y_2^{(4)} = U_4^T Y_2 V_4$ .

Для суммы экспонент существует линейное соотношение между сдвинутыми версиями сигнала. Это позволяет сформулировать обобщённую проблему собственных значений:

$$Y_2^{(4)} v = z Y_1^{(4)} v \quad (18)$$

Собственные значения  $z_j$  связаны с показателями экспонент:  $\alpha_j = \frac{\ln(z_j)}{h}$ , где  $h$  – шаг дискретизации.

После нахождения показателей задача становится линейной относительно амплитуд, которая решается методом наименьших квадратов. Дополнительно проведём с эксперимент, используя пятый по счёту альтернативный метод, которым выступил широкоизвестный метод Прони [6].

Поскольку классическая формулировка метода требует равномерной сетки, исходные данные, заданные на неравномерной сетке, предварительно интерполируются с помощью сплайна на равномерную сетку. После этого рассматривается последовательность значений  $y$  в заданных точках, для которой предполагается выполнение линейного рекуррентного соотношения:

$$y_{(k+M)} + a_1 y_{(k+M-1)} + \dots + a_M y_k = 0 \quad (19)$$

Коэффициенты  $a_1, \dots, a_M$  находятся методом наименьших квадратов из переопределённой системы линейных уравнений. Далее строится характеристический многочлен

$$z^M + a_1 z^{(M-1)} + \dots + a_M = 0 \quad (20)$$

Корни данного многочлена  $z_k$  связаны с показателями экспонент:  $\alpha_k = \frac{\ln(z_k)}{h}$ , где  $h$  – шаг дискретизации.

После нахождения параметров  $\alpha_k$  коэффициенты  $C_k$  определяются из линейной задачи наименьших квадратов.

Приступим к сравнительному анализу всех методов. Для этого была получена программная реализация методов в среде Jupyter Notebook на языке Python. Разработаны функции для получения  $N$  точек на неравномерной сетке на отрезке  $[0, X]$  для заданной суммы экспонент и добавления к значениям нормально распределённого шума с заданной дисперсией. В качестве метрики используем среднеквадратическое отклонение значений в заданных изначально точках. Рассмотрим результаты аппроксимации функции  $y = 1,6e^{-0.25x} + 1,1e^{-0.75x} + 0,7e^{-1.35x} + 0,4e^{-2.2x}$  и исследуем ряд важных характеристик работы методов.

Здесь и далее MPM обозначает метод матричного пучка, Prony – метод Прони, ODE3 – метод наименьших квадратов без двойного интегрирования с аппроксимацией кубическими сплайнами, ODE5 – то же, но аппроксимация происходит сплайнами пятой степени, ODE\_integral – описанное в статье решение методом наименьших квадратов с двойным интегрированием и аппроксимацией кубическими сплайнами, ODE\_4int – метод с четверым интегрированием дифференциального уравнения, NLS – нелинейный МНК (метод Левенберга–Марквардта с Trust Region).

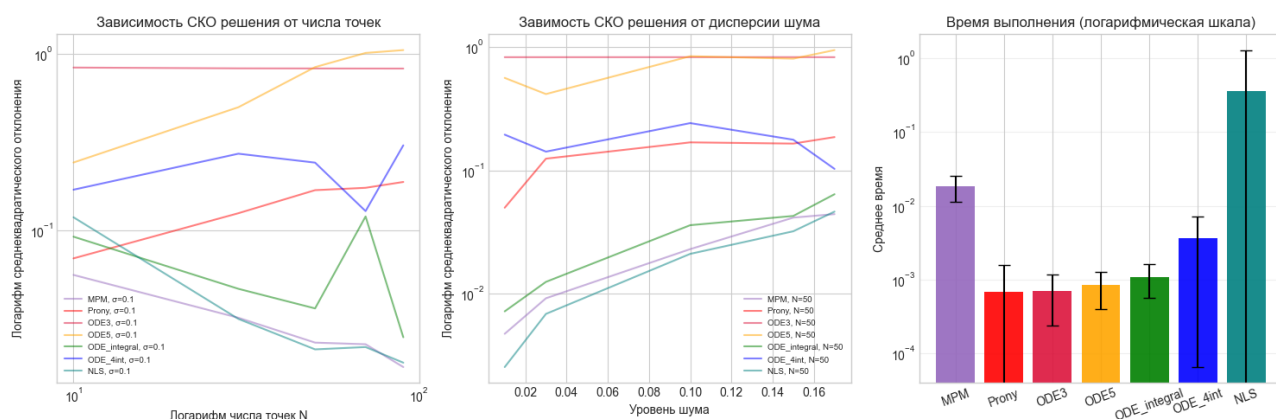


Рисунок 1 – графики исследуемых характеристик для первого примера

Из полученных графиков можно сделать несколько выводов. Во-первых, из-за большой ошибки для аппроксимации производных в МНК без двойного интегрирования точно не подходят кубические сплайны (что понятно, ведь третья производная у таких сплайнов есть кусочно-постоянная функция). Во-вторых, если в этом же методе увеличить степень сплайнов до пятой, то он всё равно заметно проиграет в точности остальным из-за сильной чувствительности к шуму, особенно при аппроксимации производных выше второго порядка. В-третьих, метод Прони и метод четырёхкратного интегрирования показывают несколько худшие результаты при различных условиях по сравнению с методом матричного пучка, методом двойного интегрирования и методом Левенберга–Марквардта. В-четвёртых, при варьировании числа узлов сетки и уровня дисперсии шума результаты трёх вышеуказанных подходов демонстрируют высокую степень близости. Однако по времени выполнения однозначно выигрывает МНК с двойным интегрированием, что видно на третьем графике рисунка 1. Метод решения нелинейной системы работает заметно медленнее остальных, поскольку он не всегда сходится, а если сходится, то за большое число итераций. У функционала в данном методе много локальных минимумов, и получение решения вычислительно дорого. Более того, успех аппроксимации зависит от удачного выбора начального приближения. Было найдено множество тестовых примеров,

для которых подход с NLS находит неоптимальное решение, при этом затрачивая на порядок большее количество времени, а именно:  $y = 0,8e^{0.7x} + 0,4e^{0.9x} + 1,5e^{-0.5x} + 1,2e^{-0.7x}$ ,  $y = 2,5e^{0.7x} + 0,5e^{0.9x} - 1,5e^{3.5x} - 0,9e^{3.1x}$ ,  $y = 0,8e^{0.5x} - 0,4e^{-0.5x} + 1,5e^{-1x} - 1,2e^{-1.2x}$ . Начальное приближение везде совпадало с таковым для первого примера. Рассмотрим значения метрик для  $y = 0,8e^{0.7x} + 0,4e^{0.9x} + 1,5e^{-0.5x} + 1,2e^{-0.7x}$ .

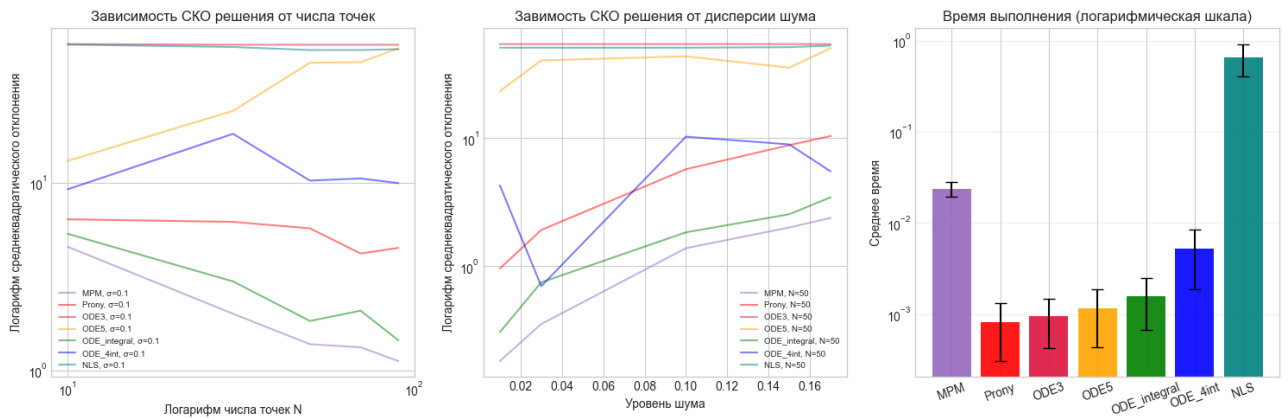


Рисунок 2 – графики исследуемых характеристик для второго примера

Рисунок опять же подтверждает все выводы, приведённые выше, и демонстрирует расходимость для нелинейного МНК. Также был проведён эксперимент с более близким начальным приближением, в результате, NLS начал сходиться, причём достаточно быстро.

При малых значениях показателей экспонент ( $y = 0,8e^{-2.5x} + 0,4e^{-2x} - 1,5e^{-3x} - 2,5e^{-3.5x}$ ) метод Прони показал хорошие результаты, сравнимые с MPM и методом двойного интегрирования. Также СКО приближения, полученного методом Прони и методом без интегрирования, было одним из наименьших именно при условии отсутствия шума в данных.

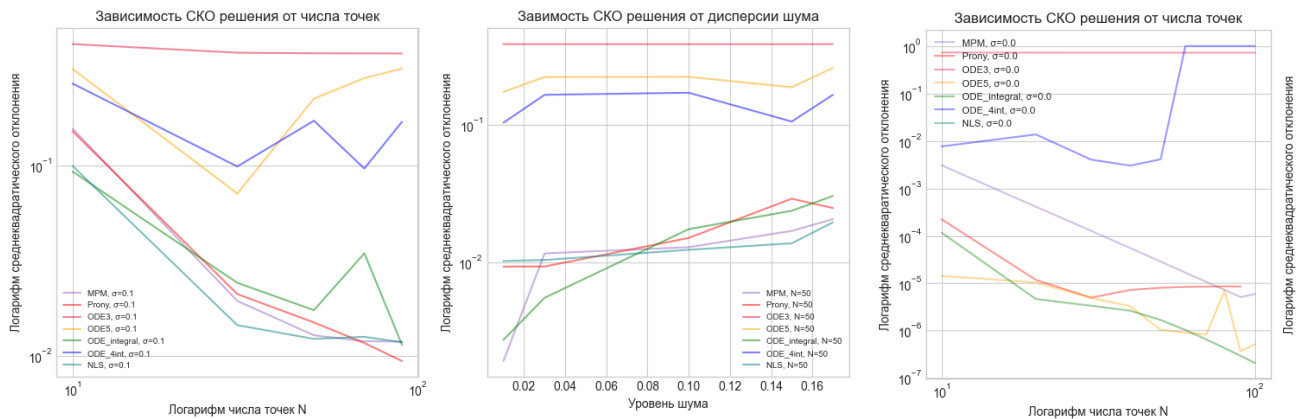


Рисунок 3 – графики исследуемых характеристик для примеров с малыми показателями экспонент, а также при отсутствии шума в данных

Таким образом, ключевым преимуществом метода Прони является высочайшая вычислительная эффективность. Однако он крайне чувствителен к шуму и малому числу точек соответственно, на многих примерах проигрывает методу матричного пучка и методу двойного интегрирования. Кроме того, обязательно требуется интерполяция на равномерную сетку.

Отличительной положительной чертой метода четырёхкратного интегрирования является отсутствие требования вычисления сплайнов для аппроксимации производных, а также некоторое сглаживание шума. Он показал достаточно хорошие результаты при максимальной зашумлённости. Отрицательные свойства: смещение модели из-за неточной аппроксимации производных на границе интервала, а также потенциально высокое число обусловленности линейной системы, в результате чего МНК в некоторых случаях не сходился. Поэтому этот подход часто лучше методов без интегрирования, но хуже двойного интегрирования. В примере  $y = 0,7e^{0.7x} - 0,2e^{0.9x} + 1,5e^{-0.5x} - 1,2e^{-0.7x}$  все методы, кроме двойного интегрирования и метода матричного пучка, показали неудовлетворительные результаты.

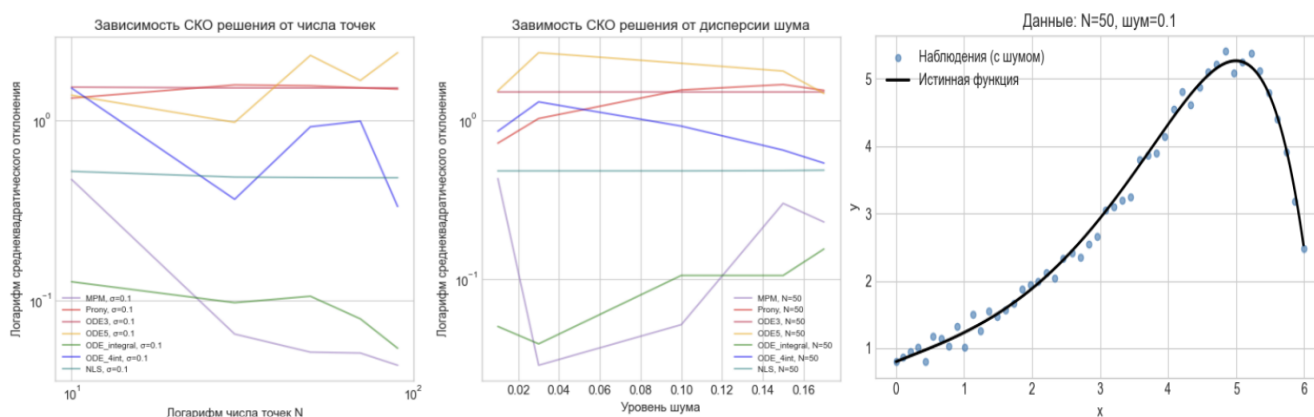


Рисунок 4 – графики исследуемых характеристик для дополнительного примера

Обобщая представленные результаты следует отметить, что предложенный метод решения МНК с двойным интегрированием дифференциального уравнения является достаточно эффективным для решения поставленной задачи, поскольку на разнообразных тестовых примерах он обеспечивает малую ошибку и вычислительную устойчивость при сравнительно низкой временной сложности. Дополнительным преимуществом метода является отсутствия требования равномерности для сетки.

**Список использованных источников:**

1. Бахвалов Н. С. Численные методы: учеб. пособие для вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 10-е изд., стер. – М.: Лаборатория знаний, 2021. – 640 с.
2. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
3. Садовничий, В.А. Методы численного дифференцирования / В.А. Садовничий, А.А. Ларионов. – М.: МГУ, 1999. – 184 с.
4. Dennis, J.E. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / J.E. Dennis, R.B. Schnabel. – Philadelphia: SIAM, 1996. – 378 с.
5. Hua, Y., Sarkar, T.K. Matrix Pencil Method for Estimating Parameters of Exponentially Damped Sinusoids / Y. Hua, T.K. Sarkar. – IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 1990. – Vol. 38, № 5. – P. 814–824.
6. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов: учебник / А. Б. Сергиенко. — Санкт-Петербург: Питер, 2002. — 608 с.

UDC 512.743.4

## APPROXIMATION BY THE SUM OF EXPONENTIALS FOR AN IMPLICITLY DEFINED FUNCTION

Areshchanka M. S., Lukansky D. M., Khadorik M. D., students

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Republic of Belarus

Anisimov V.Y. – PhD in Physics and Mathematics

**Annotation.** In many physical and economic problems, data obeys the exponential growth law, but in more complex cases, the relationship is described by the sum of several exponentials. The purpose of our work is to solve the problem of restoring unknown parameters of a function by a given sum of exponentials with known values at discrete points in an uneven grid. The least squares method was used, based on the search for the coefficients of the corresponding fourth-order differential equation integrated twice. This method is compared with alternative methods. It is shown that it provides a small error at a high speed relative to other methods.

**Keywords.** Approximation, sum of exponentials, least squares method, differential equation