

УДК 510.589:628.81

ПРОГНОЗИРУЮЩАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОМЕЩЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОТОПЛЕНИЕМ

Асимова С.Р., Емельянчиков М.Ю., студенты

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Примичева З.Н. – канд. физ.-мат. наук, доцент

Аннотация. Данная статья посвящена разработке математической модели тепловых процессов в помещении. Была рассмотрена система дифференциальных уравнений, включающая в себя теплообмен с внешней средой и работу радиатора. Проведено численное моделирование, показавшее оптимальность модели и её пригодность для практического применения. Доказано, что использование прогнозирующей модели повышает продуктивность системы, ускоряя прогрев помещения. Модель может быть применена как основа для создания энергоэффективных систем отопления с виртуальными датчиками температуры.

Ключевые слова. Термодинамика, УПМ, теплоемкость, дифференциальные уравнения, математическая модель.

Управление с прогнозирующими моделями (УПМ) – современный метод управления процессами, при котором будущее состояние переменных предсказывается на основе динамической модели системы. На основе такого прогноза управляющие воздействия могут быть рассчитаны с упреждением, что поднимает эффективность управления.

Одной из перспективных областей применения метода являются системы отопления и кондиционирования. Как правило, процесс изменения микроклимата в помещениях глубоко инерционный, и упреждающее управление, которое предлагает УПМ, позволит существенно повысить скорость и точность контроля [1].

Однако, использование классических методик расчета тепловой эффективности зданий не пригодны [2] для УПМ, так как в них исследуются характеристики помещений в условиях установившегося теплового баланса. Так же известные термодинамические модели [1, 4], мало применимы для УПМ, так как требуют большой вычислительной мощности и не могут использоваться в контроллерах управления.

Таким образом, разработка упрощенной математической модели, описывающей термодинамику помещения, является первоочередной задачей. В данной работе предложена такая модель, а также представлены результаты ее реализации и тестирования, поскольку разработка упрощенной термодинамической модели помещения является актуальной и позволит достаточно хорошо описать динамику тепловых процессов, в то же время не требуя определения большого количества параметров и существенной вычислительной мощности.

Базовая структура модели и применение формул. При разработке термодинамической модели были сделаны следующие допущения: прирост тепловой энергии в помещении происходит за счет отопительных приборов, а ее убыль за счет теплопотерь через внешние стены; смежные помещения имеют ту же температуру, что и исследуемое помещение, поэтому теплообменом с ними можно пренебречь; теплообмен через внешние стены описывается аппроксимацией показанной на рисунке 1.

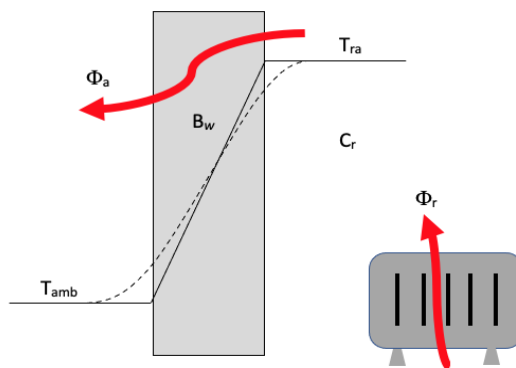


Рисунок 1 – модель теплообмена через внешние стены

Здесь T_{amb} и T_{ra} – температуры внешней среды и комнаты соответственно; параметр B_w описывает теплопроводность внешних стен; C_r – теплоемкость воздуха в помещении; Φ_r – тепловая

мощность, поступающая от радиатора отопления, а Φ_a – тепловая мощность, отдаваемая помещением через стены во внешнюю среду, которая описывается формулой:

$$\Phi_a = B_w \cdot (T_{amb} - T_{ra}). \quad (1)$$

Динамика теплообмена в такой модели может быть представлена простым дифференциальным уравнением.

$$C_r \frac{dT_{ra}}{dt} = \Phi_a + \Phi_r, \quad (2)$$

где левая часть уравнения (2) описывает процесс накопления тепла, а его правая часть – тепловую мощность, подаваемую и теряемую помещением.

Теплоемкость воздуха в помещении C_r можно рассчитать через удельную теплоемкость C_{air} и массу воздуха M_{air} следующим образом:

$$C_r = C_{air} \cdot M_{air}, \quad (3)$$

учитывая, что $C_{air} = 1010$ Дж/(кг·К), а M_{air} можно получить через плотность воздуха 1.2 кг/м³, умноженную на объем помещения V , уравнение (3) запишется в виде:

$$C_r = 1010 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}} \right] \cdot 1.2 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right] \cdot V[\text{м}^3] = 1212 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3\cdot\text{К}} \right] \cdot V[\text{м}^3]. \quad (3)$$

Тепловая мощность, отдаваемая радиатором отопления, может быть описана формулой (4) как:

$$\Phi_r = C_h \cdot \rho \cdot q \cdot (T_s - T_r), \quad (4)$$

где T_s – температура поступающей в радиатор воды, а T_r – температура возвращающейся из радиатора воды; $\rho = 1000$ кг/м³ – плотность воды; q – поток воды через радиатор в м³/с, а C_h – теплоемкость системы отопления. Если пренебречь теплоемкостью труб и радиатора, то теплоемкость системы отопления можно определить как:

$$C_h = C_w \cdot M_w, \quad (5)$$

где $C_w = 4180.6$ Дж/(кг·К) – удельная теплоемкость воды, а M_w – масса воды, задействованная в системе отопления.

Массу воды, задействованной в процессе, можно рассчитать, как плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, умноженную на поток воды через радиатор q в м³/сек. Таким образом, формулу (4) можно переписать в виде:

$$\Phi_r = 4180.6 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}} \right] \cdot 1000 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right] \cdot q \left[\frac{\text{м}^3}{\text{сек}} \right] \cdot (T_s - T_r). \quad (6)$$

С другой стороны, тепловую мощность радиатора можно так же описать как его тепловое сопротивление B_r , умноженное на разницу температур радиатора и воздуха в комнате, при этом температуру радиатора можно приближенно описать как среднее значение между температурами поступающей и возвращающейся из радиатора воды:

$$\Phi_r = B_r \cdot \left(\frac{T_s + T_r}{2} - T_{ra} \right). \quad (7)$$

Запись системы уравнений исходных и искомых параметров. Используя формулы (1), (2), (3), (6) и (7), можно записать систему уравнений, описывающую теплообмен моделируемого помещения

$$\begin{cases} \Phi_r = Br \cdot \left(\frac{T_s + T_r}{2} - T_{ra} \right), \\ \Phi_r = 4180600 \cdot q \cdot (T_s - T_r), \\ C_r \frac{dT_{ra}}{dt} = B_w \cdot (T_{amb} - T_{ra}) + \Phi_r, \\ C_r = 1212 \cdot V, \end{cases} \quad (8)$$

где входными (задаваемыми) параметрами являются T_{amb} – внешняя (наружная) температура, B_w – теплопроводность стены (стен), выходящих наружу, Br – теплопроводность радиатора, q – поток воды через радиатор, T_s – входная температура воды в радиаторе, V – объем помещения; а искомыми параметрами служат T_{ra} – температура помещения, T_r – температура возвращающейся из радиатора воды.

Результаты моделирования. Для оценки предложенной работоспособности модели была разработана программа на языке C++ и выполнены расчеты динамики температурных изменений для помещения размером 10м x 3м x 3м (объем $V=90 \text{ м}^3$).

При расчете были использованы параметры модели: $V = 90 \text{ м}^3$, $B_w = 2,9 \text{ Вт/}^\circ\text{С}$, $Br = 10 \text{ Вт/}^\circ\text{С}$, $q = 0,0001667 \text{ м}^3/\text{сек}$, $T_{amb} = 0^\circ\text{С}$, $T_{ra} = 0^\circ\text{С}$.

На первом этапе имитировался прогрев комнаты при фиксированной температуре воды, подаваемой в батарею $T_s = 30^\circ\text{С}$. Результат симуляции представлен на рисунке 2.

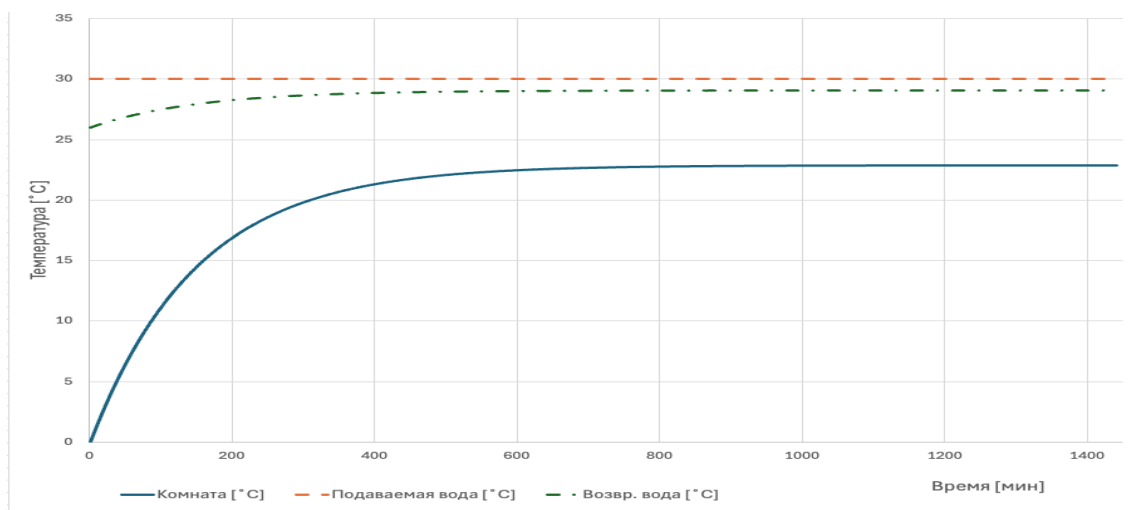


Рисунок 2 – симуляция прогрева комнаты при постоянной температуре подаваемой воды

Из полученного графика видно, что температура в комнате стабилизировалась на уровне 22°С примерно через час после начала подачи воды, при этом разница температур подаваемой в радиатор и возвращаемой воды была сначала около 4 градусов и постепенно снижалась, достигнув со временем 1°С . Это соответствует процессу снижения тепловой мощности, отдаваемой радиатором по мере прогрева помещения.

Графики, проиллюстрированные на рисунке 2, соответствуют ситуации, когда температура воды, подаваемой в радиатор фиксирована. Это не очень эффективный метод, так как стабилизация температуры комнаты происходит довольно долго. Если же активно управлять температурой подаваемой воды в зависимости от наблюдаемых условий, время прогрева можно будет существенно сократить.

На рисунке 3 приведены результаты симуляции, когда температура подаваемой воды меняется пропорционально разнице желаемой и текущей температуры в комнате. Для этой симуляции желаемая температура в комнате была установлена $T = 22^\circ\text{С}$ и температура воды менялась с помощью управляющего воздействия в диапазоне от 0 до 100%, рассчитываемого пропорционально разнице текущей и заданной температуры в комнате. Управляющее воздействие в 100% приводило к подаче воды температурой 70°С , а нулевое его значение снижало температуру до минимума в 30°С .

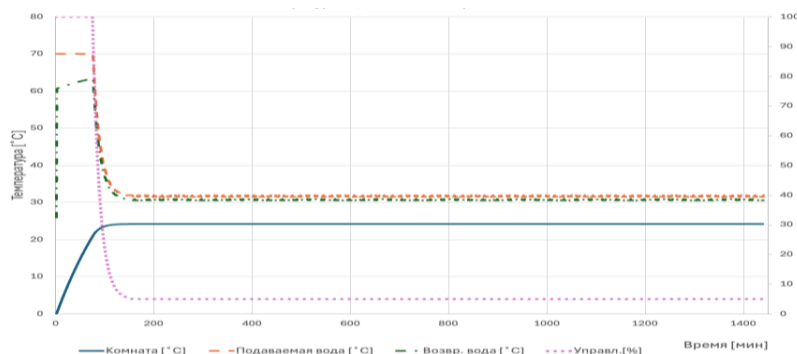


Рисунок 3 – симуляция прогрева комнаты при управлении температурой воды

Результаты симуляции показывают, что активное управление температурой воды позволит сократить время прогрева комнаты с одного часа до примерно трех минут. Однако на практике для реализации такого управления необходимо использовать датчик температуры в комнате, на основе показаний которого будет выработываться управляющее воздействие. Установка такого датчика в помещении может быть проблематичной, так как он должен располагаться на удалении от радиатора отопления и от других управляющих устройств.

Вместе с тем разработанная математическая модель позволяет отказаться от физического датчика, заменив его виртуальным. Таким виртуальным датчиком может служить расчетная температура комнаты, которую можно вычислить на основе косвенных параметров таких, как внешняя (наружная) температура и разница температур подаваемой и возвращаемой горячей воды. Наружная температура T_{amb} может быть получена из сети интернет с помощью сервисов прогноза погоды, а температуры T_s и T_r могут быть измерены прямо на трубах системы отопления. Параметры B_w , B_r и V будут неизменными и могут задаваться расчетным или экспериментальным путем при установке системы отопления.

При определении потока воды q через радиатор можно считать, что он не будет меняться часто, поскольку сопротивление труб и радиатора потоку практически постоянны, а давление воды в системе меняется редко и его можно периодически рассчитывать из системы (8), учитывая, что в условиях теплового равновесия изменение температуры в комнате стремиться к нулю:

$$\frac{dT_{ra}}{dt} \rightarrow 0. \quad (9)$$

Тогда из системы (8) можно записать следующее уравнение:

$$B_r \cdot \left(\frac{T_s + T_r}{2} - T_{ra} \right) + B_w \cdot (T_{amb} - T_{ra}) = 0. \quad (10)$$

Решив уравнение (10) для T_{ra} , получим:

$$T_{ra} = \frac{B_r \cdot \frac{T_s + T_r}{2} - B_w \cdot T_{amb}}{B_r + B_w}. \quad (11)$$

Отсюда и используя формулу (6), можно вычислить q .

Разработанная математическая модель, хотя и является упрощенной, позволяет достаточно хорошо описывать динамику тепловых процессов в отапливаемом помещении. Она может быть использована как прогнозирующая модель в системах УПМ, что позволит реализовать принцип упреждающего управления и повысить скорость и точность контроля. Так же на ее основе может быть разработана система управления отоплением с использованием виртуального датчика температуры помещения, что позволит снизить ее стоимость и трудоёмкость инсталляции.

Список использованных источников:

1. Марьясин О.Ю., Колодкина А.С. "Управление тепловым режимом зданий с использованием прогнозирующих моделей", вестник Самарского Государственного Технического Университета. Серия Технические науки. 2017. № 1 (53). – С.122-132.
2. Богословский В.Н., Сканава А.Н. "Отопление". Стройиздат. Москва. 1991. – 736 с.
3. Богословский В.Н. Тепловой режим здания. – М.: Стройиздат, 1979. – 249 с.
4. Klaus Kaas Andersen et. al. "Modelling the heat dynamics of a building using stochastic differential equations", Energy and Buildings 3 1 2000. – P. 13-24.
5. А.В. Пуговкин, и др. "Математическая модель теплоснабжения помещений для АСУ энергосбережения", Доклады ТУСУРа, № 2 (22), часть 1, декабрь 2010. – С.293-298.

UDC 510.589:628.81

PREDICTIVE MATHEMATICAL MODEL OF A ROOM FOR HEATING CONTROL SYSTEMS

Asimava S.R., Emelyanchikov M.Y., students

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
Minsk, Republic of Belarus*

Primicheva Z.N. – PhD in Physics and Mathematics

Annotation. This article is devoted to the development of a mathematical model of indoor thermal processes. A system of differential equations was examined, including heat exchange with the external environment and radiator operation. Numerical simulation demonstrated the model's optimality and suitability for practical application. It was demonstrated that using a predictive model improves system performance, accelerating room heating. The model can be used as a basis for creating energy-efficient heating systems with virtual temperature sensors.

Keywords. Thermodynamics, MPC, thermal capacity, differential equations, mathematical model.